الحلول الكاملة

لتمارين كتاب الوزارة

الإستاتيكا

الديناميكا

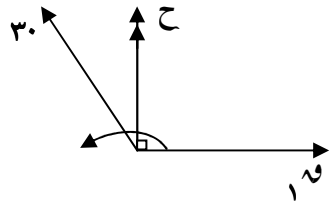
الحلول الكاملة لتمارين كتاب الوزارة فى الإستاتيكا

الفصل الأول : القوى

تمارين (١ - ٢)

(١) قوتان تؤثران فى نقطة وظل الزاوية بينهما يساوى ($-\frac{1}{\sqrt{3}}$) ، إذا عُلم أن محصلتهما عمودية على الصغرى وأن مقدار المركبة الكبرى يساوى ٣٠ نيوتن . فما هو مقدار كل من المركبة الأخرى والمحصلة .

الحل



∵ ظا ى = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ∴ ق($\hat{ى}$) = ١٥٠°

∵ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ + ٢ ق$_{١}$ ق$_{٢}$ جتا ى

∴ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ٩٠٠ + ٢ ق$_{١}$ ق$_{٢}$ جتا ١٥٠°

∴ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ٩٠٠ − ٣٠ $\sqrt{3}$ ق$_{١}$ ..... (١)

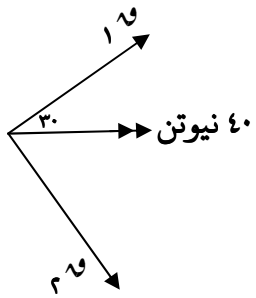
∵ المحصلة عمودية على ق$_{١}$ ∴ ق$_{١}$ + ق$_{٢}$ جتا ى = صفر

∴ ق$_{١}$ + ٣٠ جتا ١٥٠° = ٠ ∴ ق$_{١}$ = ١٥ $\sqrt{3}$ نيوتن ومن (١) ق$_{٢}$ = ١٥ نيوتن

---

(٢) حلل قوة أفقية مقدارها ٤٠ نيوتن فى اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° إلى أعلى .

الحل



ق$_{١}$ = ٤٠ جتا ٣٠° = ٢٠ $\sqrt{3}$ نيوتن

ق$_{٢}$ = ٤٠ جا ٣٠° = ٢٠ نيوتن

وتميل على الأفقى بزاوية ٦٠° لأسفل

---

(٣) حلل قوة مقدارها ٥٠٠ نيوتن فى اتجاهين يميل أولهما على القوة بزاوية قياسها ٤٥° والآخر بزاوية قياسها ٦٠° فى الناحية الأخرى .

الحل

ق$_{١}$ = $\frac{\text{ق جا هـ}_{٢}}{\text{جا (هـ}_{١} + \text{هـ}_{٢})}$ (لاحظ أن جا ١٠٥° = جا ٧٥°)

∴ ق$_{١}$ = $\frac{٥٠٠ \text{ جا } ٦٠}{\text{جا } ١٠٥}$ = ٤٤٨,٣ نيوتن وبالمثل ق$_{٢}$ = $\frac{٥٠٠ \text{ جا } ٤٥}{\text{جا } ١٠٥}$ = ٣٣٦ نيوتن

(٤) قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° ، أوجد قيمة ق فى كل من الحالات الآتية :

(أ) مقدار المحصلة تساوى ق .

(ب) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية .

(جـ) اتجاه المحصلة يميل بزاوية ٤٥° على القوة الثانية .

(د) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين .

الحل

(أ) ∵ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ + ٢ ق$_{١}$ ق$_{٢}$ جتا ى

∴ ق^{٢} = ٤ + ق^{٢} + ٢ × ٢ ق جتا ١٢٠° ومنها ق = ٢ نيوتن

(ب) ∵ ح ⊥ ق ∴ ق + ٢ جتا ١٢٠° = صفر ومنها ق = ١ نيوتن

(جـ) ∵ ظا هـ = $\frac{ق_{٢} \text{ جا ى}}{ق_{٢} + ق_{١} \text{ جتا ى}}$ ∴ ظا ٤٥° = $\frac{٢ \text{ جا } ١٢٠°}{ق + ٢ \text{ جتا } ١٢٠°}$

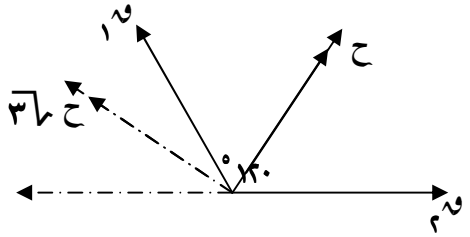
وبعد التعويض ينتج لنا : ق − ١ = $\sqrt{٣}$ ∴ ق = ١ + $\sqrt{٣}$ = ٢,٧٣ نيوتن تقريباً

(د) ∵ المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين ∴ القوتان متساويتان ∴ ق = ٢ نيوتن

---

(٥) قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ومقدار محصلتهما ح والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° ، إذا عكس اتجاه ق$_{٢}$ فإن مقدار المحصلة يساوى ح $\sqrt{٣}$. أثبت أن ق$_{١}$ = ق$_{٢}$ وأن المحصلة فى الحالة الثانية يكون اتجاهها عمودياً على اتجاه المحصلة الأولى .

الحل



الحالة الأولى :

∵ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ + ٢ ق$_{١}$ ق$_{٢}$ جتا ١٢٠

∴ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ − ق$_{١}$ ق$_{٢}$ ..... (١)

الحالة الثانية :

(ح $\sqrt{٣}$)^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ + ٢ ق$_{١}$ ق$_{٢}$ جتا ٦٠

∴ ٣ ح^{٢} = ق$_{١}^{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ + ق$_{١}$ ق$_{٢}$ ..... (٢)

بضرب المعادلة (١) × − ٣ وجمعها مع المعادلة (٢)

∴ ٢ ق$_{١}^{٢}$ + ٢ ق$_{٢}^{٢}$ - ٢ ق$_{١}$ ق$_{٢}$ = ٠ أى ق$_{١}^{٢}$ - ق$_{١}$ ق$_{٢}$ + ق$_{٢}^{٢}$ = ٠

∴ (ق$_{١}$ - ق$_{٢}$)^{٢} = ٠ ∴ ق$_{١}$ = ق$_{٢}$ (وهو المطلوب أولاً)

∵ القوتان متساويتان ∴ المحصلة تنصف الزاوية بينهما

فى الحالة الأولى : زاوية ميل المحصلة = ٦٠°

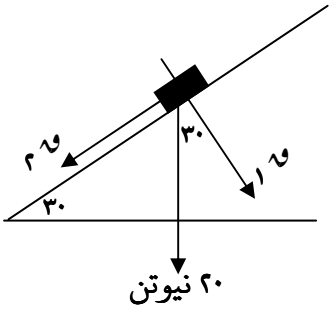
فى الحالة الثانية : زاوية ميل المحصلة = ٣٠°

∴ المحصلة فى الحالة الثانية يكون اتجاهها عمودياً على اتجاه المحصلة الأولى .

---

(٦) جسم مقدار وزنه ٢٠ نيوتن موضوع على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° . احسب مركبتى الوزن (و) فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه .

الحل



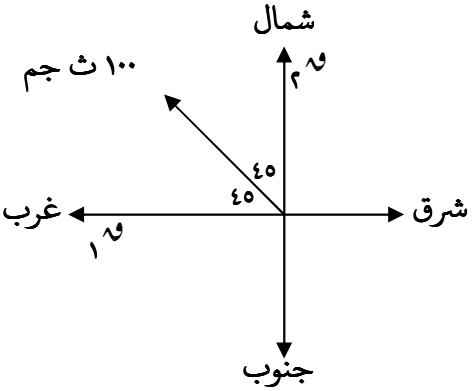
ق$_{١}$ = ٢٠ جتا ٣٠° = ١٠ √٣ نيوتن

ق$_{٢}$ = ٢٠ جا ٣٠° = ١٠ نيوتن

---

(٧) قوة مقدارها ١٠٠ ثقل جم تعمل فى اتجاه الشمال الغربى . احسب مركبتيها فى اتجاهى الشمال والغرب .

الحل



ق$_{١}$ = ١٠٠ جتا ٤٥° = ٥٠ √٢ ث جم

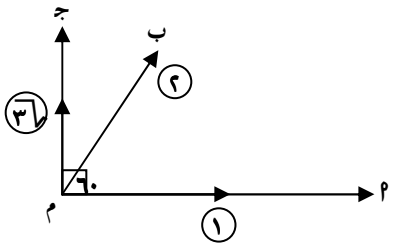
ق$_{٢}$ = ١٠٠ جا ٤٥° = ٥٠ √٢ ث جم

(لاحظ أن جا ٤٥ = جتا ٤٥)

تمارين (١ – ٣)

(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣√ نيوتن تؤثر فى نقطة م واتجاهاتها هى $\overleftarrow{م ا}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م جـ}$ على الترتيب حيث ق(∠ ا م ب) = ٦٠° ، ق(∠ ا م جـ) = ٩٠° أوجد المحصلة ؟

الحل



القوى : (١ ، ٠°) ، (٢ ، ٦٠°) ، (٣√ ، ٩٠°)

س = ١ جتا ٠ + ٢ جتا ٦٠ + ٣√ جتا ٩٠ = ٢

ص = ١ جا ٠ + ٢ جا ٦٠ + ٣√ جا ٩٠ = ٢ ٣√

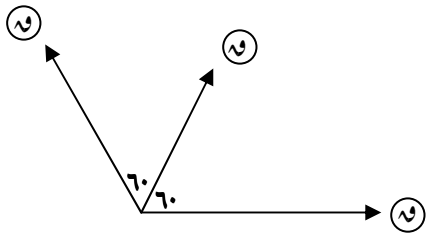
ح = √(س^٢ + ص^٢) = √((٢)^٢ + (٢ ٣√)^٢) = ٤ نيوتن

ظا هـ = ص / س = ٢ ٣√ / ٢ = ٣√ ∴ هـ = ٦٠° أى أن المحصلة تعمل فى اتجاه القوة ٢ نيوتن $\overleftarrow{م ب}$.

---

(٢) ثلاث قوى مستوية ومتساوية فى المقدار تؤثر فى نقطة مادية وكان خط عمل القوة الثانية يصنع مع اتجاهى القوتين الأولى والثالثة زاويتين قياس كل منهما ٦٠° . أوجد المحصلة ؟

الحل



القوى : (ق ، ٠) ، (ق ، ٦٠) ، (ق ، ١٢٠)

س = ق جتا ٠ + ق جتا ٦٠ + ق جتا ١٢٠ = ق

ص = ق جا ٠ + ق جا ٦٠ + ق جا ١٢٠ = ق ٣√

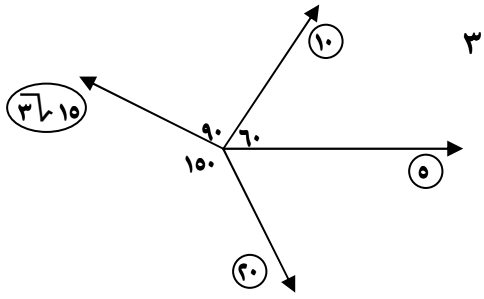
ح = √(س^٢ + ص^٢) = √((ق)^٢ + (ق ٣√)^٢) = ٢ ق

ظا هـ = ص / س = ق ٣√ / ق = ٣√ ∴ هـ = ٦٠° أى أن المحصلة تعمل فى اتجاه القوة الثانية .

---

(٣) تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها ٥ ، ١٠ ، ١٥ ٣√ ، ٢٠ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين الأولى والثانية ٦٠° ، وبين الثانية والثالثة ٩٠° ، وبين الثالثة والرابعة ١٥٠° أوجد المحصلة ؟

الحل



القوى : (٥ ، ٠) ، (١٠ ، ٦٠) ، (١٥ ٣√ ، ١٥٠) ، (٢٠ ، ٣٠٠)

س = ٥ جتا ٠ + ١٠ جتا ٦٠ + ١٥ ٣√ جتا ١٥٠ + ٢٠ جتا ٣٠٠

= – ٢,٥

ص = ٥ جا ٠ + ١٠ جا ٦٠ + ١٥ ٣√ جا ١٥٠ + ٢٠ جا ٣٠٠

= ٢,٥ ٣√

ح = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{(-٢,٥)^{٢} + (٣\sqrt{٢,٥})^{٢}}$ = ٥ نيوتن

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{-٥}$ = $-\sqrt{٣}$ ∴ هـ = ١٢٠°

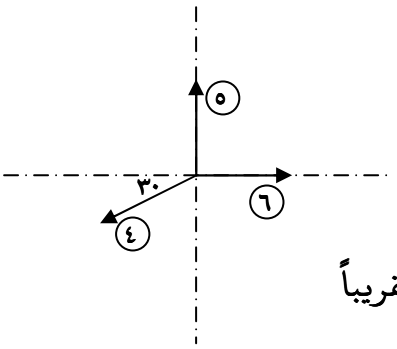
أى أن المحصلة تميل على القوة (٥ نيوتن) بزاوية قياسها ١٢٠° .

---

(٤) أوجد محصلة مجموعة القوى المستوية المتلاقية فى نقطة مادية :

٥ نيوتن شمالاً ، ٦ نيوتن شرقاً ، ٤ نيوتن جنوب الغرب بزاوية ٣٠°

الحل



القوى : (٦ ، ٠) ، (٥ ، ٩٠) ، (٤ ، ٢١٠)

س = ٦ جتا ٠ + ٥ جتا ٩٠ + ٤ جتا ٢١٠ = ٦ − ٢$\sqrt{٣}$

ص = ٦ جا ٠ + ٥ جا ٩٠ + ٤ جا ٢١٠ = ٣

ح = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{(٦ - ٢\sqrt{٣})^{٢} + (٣)^{٢}}$ = ٣,٩٣ نيوتن تقريباً

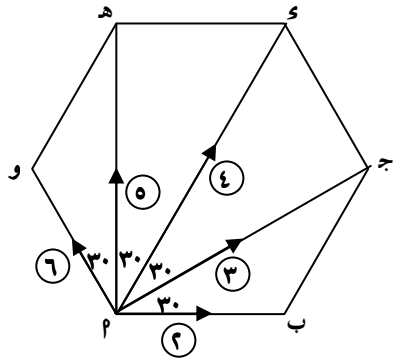
ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٣}{٦ - ٢\sqrt{٣}}$ ∴ هـ = ٤٩° ٤٨′

أى أن المحصلة تصنع زاوية ٤٩° ٤٨′ شمال الشرق .

---

(٥) تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن فى الرأس أ من المسدس المنتظم أ ب جـ ء هـ و فى الاتجاهات $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ هـ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ على الترتيب أوجد المحصلة ؟

الحل



القوى : (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٣٠) ، (٤ ، ٦٠) ، (٥ ، ٩٠) ، (٦ ، ١٢٠)

س = ٢ جتا ٠ + ٣ جتا ٣٠ + ٤ جتا ٦٠ + ٥ جتا ٩٠ + ٦ جتا ١٢٠

= $\frac{١}{٢}$ (٢ + ٣$\sqrt{٣}$)

ص = ٢ جا ٠ + ٣ جا ٣٠ + ٤ جا ٦٠ + ٥ جا ٩٠ + ٦ جا ١٢٠

= $\frac{١}{٢}$ (١٣ + ١٠$\sqrt{٣}$)

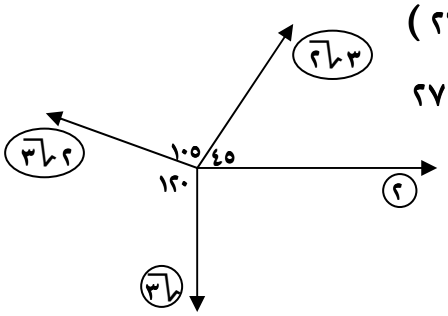
ح = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$ = $\sqrt{[\frac{١}{٢}(٢ + ٣\sqrt{٣})]^{٢} + [\frac{١}{٢}(١٣ + ١٠\sqrt{٣})]^{٢}}$ = ١٥,٥٨ نيوتن

ظا هـ = $\frac{ص}{س}$ ومنها نجد أن هـ = ٧٦° ٣٩′

أى أن المحصلة تصنع مع $\overleftarrow{أ ب}$ زاوية قياسها ٧٦° ٣٩′ .

(٦) تؤثر القوى المستوية التى مقاديرها ٢ ، ٣ $\sqrt{2}$ ، ٢ $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ نيوتن فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين القوة الأولى والقوة الثانية ٤٥° وبين القوة الثانية والقوة الثالثة ١٠٥° وبين القوة الثالثة والقوة الرابعة ١٢٠° . أوجد محصلة هذه القوى ؟

الحل



القوى : (٢ ، ٠) ، (٣ $\sqrt{2}$ ، ٤٥) ، (٢ $\sqrt{3}$ ، ١٥٠) ، ($\sqrt{3}$ ، ٢٧٠)

س$_{هـ}$ = ٢ جتا ٠ + ٣ $\sqrt{2}$ جتا ٤٥ + ٢ $\sqrt{3}$ جتا ١٥٠ + $\sqrt{3}$ جتا ٢٧٠

= ٢

ص$_{هـ}$ = ٢ جا ٠ + ٣ $\sqrt{2}$ جا ٤٥ + ٢ $\sqrt{3}$ جا ١٥٠ + $\sqrt{3}$ جا ٢٧٠

= ٣

ح = $\sqrt{\text{س}_{هـ}^{٢} + \text{ص}_{هـ}^{٢}}$ = $\sqrt{(٢)^{٢} + (٣)^{٢}}$ = $\sqrt{١٣}$

ظا هـ = $\frac{\text{ص}_{هـ}}{\text{س}_{هـ}}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ هـ = ١٩′ ٥٦°

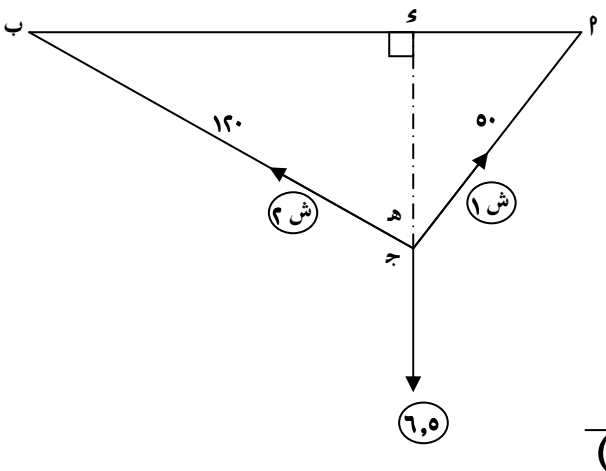
أى أن المحصلة تصنع مع القوة (٢ نيوتن) زاوية قياسها ١٩′ ٥٦° .

الفصل الثانى : إتـزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة

تمارين (٢ - ١)

(١) علق جسم وزنه ٦,٥ نيوتن بواسطة خيطين طول أحدهما ٠,٥ متر وطول الآخر ١,٢ متر وربط الخيطان فى نقطتين من مستقيم أفقى بحيث كانا متعامدين . أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين .

الحل



ا ب = ١٣٠ سم (من فيثاغورس)

$جء = \frac{١٢٠ \times ٥٠}{١٣٠} = \frac{٦٠٠}{١٣}$

$بء = \frac{١٤٤٠}{١٣}$ (من فياغورس فى Δ ب ء جـ)

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى

بتطبيق قاعدة لامى عند النقطة جـ

$$\frac{ش ١}{جا (١٨٠ - هـ)} = \frac{٦,٥}{جا ٩٠} = \frac{ش ٢}{جا (٩٠ + هـ)}$$

$$\frac{ش ١}{جا هـ} = \frac{٦,٥}{١} = \frac{ش ٢}{جتا هـ}$$

$ش_١ = ٦,٥ \times جا هـ = ٦,٥ \times \frac{ب ء}{ب جـ} = ٦$ نيوتن

$ش_٢ = ٦,٥ \times جتا هـ = ٦,٥ \times \frac{هـ ء}{ب جـ} = ٢,٥$ نيوتن

(عزيزى الطالب حاول حل هذا السؤال بقاعدة مثلث القوى)

(٢) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ١٢ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية ، فإذا كانت القوى متزنة فما هى الزاوية بين القوتين الأخرتين ؟

الحل

∵ القوى الثلاثة متزنه

∴ محصلة أى قوتين منها تساوى القوة الثالثة مقداراً وتضادها إتجاهاً

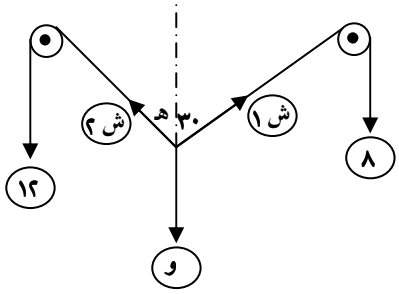
∴ القوة ٨ نيوتن هى محصلة القوتين ١٠ ، ١٢ نيوتن والزاوية بينهما (ى)

∵ $ح^٢ = ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢$ جتا ى ∴ ٦٤ = ١٠٠ + ١٤٤ + ٢٤٠ جتا ى

∴ جتا ى = $- \frac{١٨٠}{٢٤٠} = -$ ٠.٧٥ ∴ ى = ١٣٨ ° ٣٥ ′

(٣) علق وزن (و) نيوتن بواسطة خيطين يميل أولهما على الرأسى بزاوية قياسها (هـ) ويمر على بكرة صغيرة ملساء ويحمل فى نهايته الأخرى وزناً مقداره ١٢ نيوتن ويميل الثانى على الرأسى بزاوية ٣٠° ويمر على بكرة صغيرة ملساء ويحمل فى نهايته الأخرى وزناً مقداره ٨ نيوتن . أوجد مقدار الوزن وقيمة هـ .

الحل



من خصائص البكرة الملساء المتزنة تساوى القوتين حولها

∴ ش$_{١}$ = ٨ نيوتن ، ش$_{٢}$ = ١٢ نيوتن

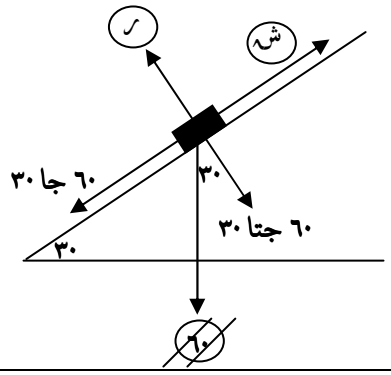
بتطبيق قاعدة لامى : $\frac{٨}{\text{جا هـ}} = \frac{\text{و}}{\text{جا}(٣٠ + \text{هـ})} = \frac{١٢}{\text{جا}\ ٣٠}$

جا هـ = $\frac{٨ \text{ جا}\ ٣٠}{١٢} = \frac{١}{٣}$ ومنها هـ = ١٩° ٢٨′

و = $\frac{١٢ \text{ جا}\ ٢٨′\ ٤٩°}{\text{جا}\ ٣٠}$ = ١٨ نيوتن تقريباً

(٤) وضع جسم وزنه ٦٠ نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية ٣٠° وشُد إلى أعلى المستوى بخيط ينطبق على خط أكبر ميل فى المستوى . أوجد مقدار الشد فى الخيط ورد فعل المستوى على الجسم .

الحل



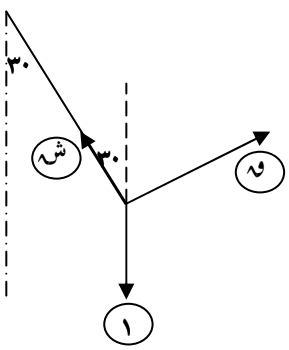
الجسم متزن

∴ ر = ٦٠ جتا ٣٠ = ٣٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ ش = ٦٠ جا ٣٠ = ٣٠ نيوتن

(٥) أُزيحت كرة بندول وزنها ١ نيوتن حتى صار الخيط يصنع ٣٠° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط . أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط .

الحل



بتطبيق قاعدة لامى :

$\frac{\text{ش}}{\text{جا}\ ١٢٠} = \frac{١}{\text{جا}\ ٩٠} = \frac{\text{ق}}{\text{جا}\ ١٥٠}$

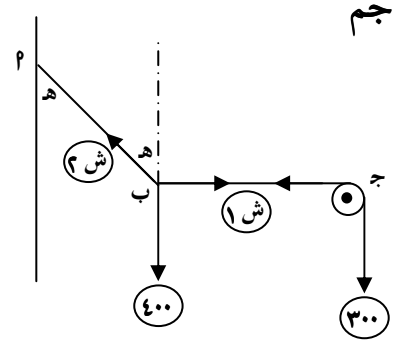
ش = جا ١٢٠ = $\frac{١}{٢}\sqrt{٣}$ نيوتن

ق = جا ١٥٠ = $\frac{١}{٢}$ نيوتن

(٦) جسم وزنه ٤٠٠ ثقل جرام معلق من نقطة ا بواسطة خيط . ربط خيط فى نقطة ب من الخيط وشُد أفقياً بخيط ثان $\overline{ب جـ}$ يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة ويتدلى فى نهايته ثقل مقداره ٣٠٠ ثقل جرام . أوجد ميل $\overline{ا ب}$ على الرأسى والشد فى كل من الخيطين $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ب جـ}$.

الحل

البكرة ملساء ومتزنة وكذلك الخيط $\overline{ب جـ}$ ∴ ش$_{١}$ = ٣٠٠ ث جم

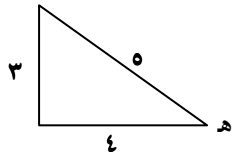


بتطبيق قاعدة لامى عند النقطة ب

$$\frac{٣٠٠}{جا(١٨٠ - هـ)} = \frac{٤٠٠}{جا(٩٠ + هـ)} = \frac{ش_{٢}}{جا ٩٠}$$

$$\frac{٣٠٠}{جا\ هـ} = \frac{٤٠٠}{جتا هـ} = \frac{ش_{٢}}{١}$$

بقسمة النسبة الأولى على الثانية : ظا هـ = $\frac{٣}{٤}$ ومنها هـ = ٣٦° ٥٢′



ش$_{٢}$ = $\frac{٤٠٠}{جتا هـ}$ = ٥٠٠ ث جم

---

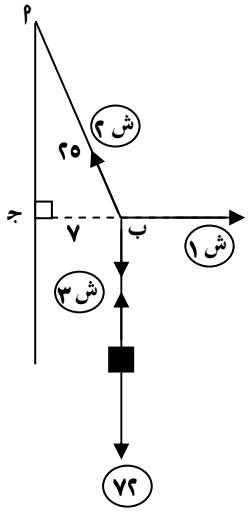
(٧) علق وزن مقداره ٧٢ ثقل جرام فى أحد طرفى خيط وثبت الطرف الثانى للخيط فى نقطة ا على حائط رأسى . ربط خيط ثان عند نقطة ب من الخيط الأول تبعد عن ا بمقدار ٢٥ سم وشُد فى اتجاه أفقى حتى صارت النقطة ب تبعد عن الحائط ٧ سم . أوجد قوة الشد فى الخيط الأفقى وفى كل من جزأى الخيط الثانى .

الحل

الخيط الرأسى متزن ∴ ش$_{٣}$ = ٧٢ ث جم

∵ Δ ا ب جـ أضلاعه توازى القوى مأخوذة فى ترتيب دورى واحد

Δ ا ب جـ هو مثلث القوى : ا جـ = ٢٤ سم (من فيثاغورس)



∴ $\frac{ش_{١}}{ب جـ} = \frac{٧٢}{ا جـ} = \frac{ش_{٢}}{ا ب}$

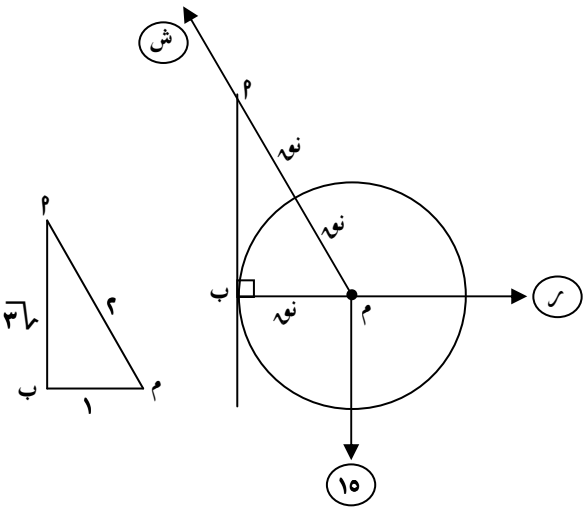
∴ $\frac{ش_{١}}{٧} = \frac{٧٢}{٢٤} = \frac{ش_{٢}}{٢٥}$

∴ ش$_{١}$ = ٢١ ث جم ، ش$_{٢}$ = ٧٥ ث جم

تمارين (٢ - ٢)

(١) كرة ملساء وزنها ١٥ نيوتن تستند على حائط أملس ومعلقة بخيط مثبت أحد طرفيه فى نقطة على سطحها وطرفه الآخر مربوط فى الحائط فى نقطة أعلى نقطة تماس الكرة تماماً . فإذا كان طول الخيط يساوى طول نصف قطر الكرة ، فأوجد الضغط الواقع على الحائط والشد فى الخيط .

الحل



Δ م ب جـ ثلاثينى ستينى وهو مثلث القوى

∴ $\frac{ش}{م م} = \frac{١٥}{م ب} = \frac{ر}{م ب}$

∴ $\frac{ش}{٢} = \frac{١٥}{٣\sqrt{}} = \frac{ر}{١}$

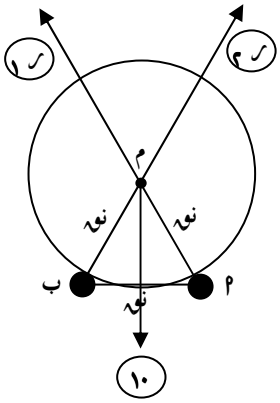
∴ ش = ١٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، ر = ٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن (يساوى الضغط مقداراً ويضاده فى الاتجاه)

---

(٢) كرة مصمتة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد والبعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة . أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة يساوى ١٠ نيوتن .

الحل



Δ م ب جـ متساوى الأضلاع والمجموعة متزنة

بتطبيق قاعدة لامى عند النقطة م :

∴ $\frac{ر_١}{جا ١٥٠} = \frac{١٠}{جا ٦٠} = \frac{ر_٢}{جا ١٥٠}$

∴ $ر_١ = ر_٢ = \frac{١٠ جا ١٥٠}{جا ٦٠} = \frac{١٠}{٣}\sqrt{٣}$ نيوتن

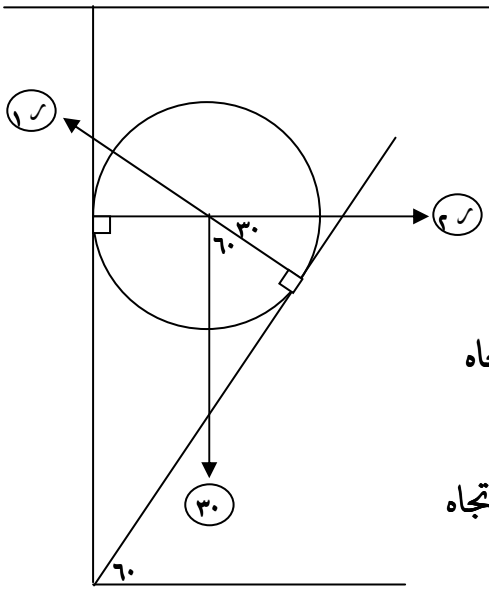
---

(٣) كرة ملساء من الحديد وزنها ٣٠ نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° . أوجد الضغط الواقع كل من الحائط والمستوى .

الحل

∵ المستويين أملسين

∴ رد فعل كل منهما على الكرة عمودى عليه أى يمر بمركزها



∵ الكرة متزنة تحت تأثير القوى الثلاثة

بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ق_1}{جا\ ٩٠} = \frac{٣٠}{جا\ ١٥٠} = \frac{ق_2}{جا\ ١٢٠}$

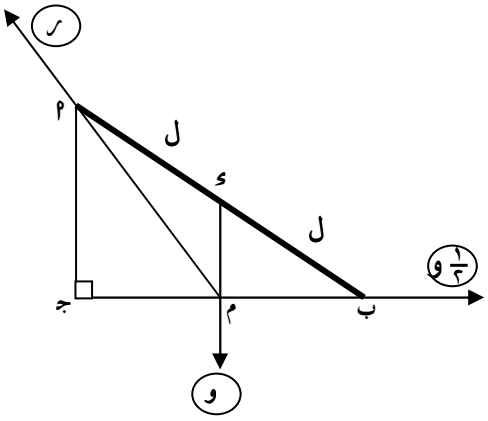
∴ $ق_1 = \frac{٣٠}{جا\ ١٥٠} = ٦٠$ نيوتن = الضغط فى عكس الاتجاه

، $ق_2 = \frac{٣٠\ جا\ ١٢٠}{جا\ ١٥٠} = ٣٠\sqrt{٣}$ = الضغط فى عكس الاتجاه

---

(٤) ساق منتظمة قابلة للحركة حول أحد طرفيها شُدت جانباً بقوة أفقية تؤثر فى طرفها الآخر وتساوى نصف ثقل الساق . أوجد قياس زاوية ميل الساق على الرأسى عندما تتزن وكذلك رد الفعل عند الطرف الأول .

الحل



المجموعة متزنة

∵ القوة الأفقية (و) والوزن يتلاقيان فى م

∴ القوة الثالثة (ق) تمر بنقطة م

Δ أ م جـ هو مثلث القوى :

∴ $\frac{ق}{أ\ م} = \frac{و}{جـ\ أ} = \frac{\frac{١}{٢}\ و}{م\ جـ}$

∴ $\frac{م\ جـ}{أ\ جـ} = \frac{\frac{١}{٢}\ و}{و}$ ومنها أ جـ = ٢ م جـ ..... (١)

∵ ء منتصف $\overline{أ\ ب}$ ∴ م منتصف $\overline{ب\ جـ}$ ∴ ب جـ = ٢ م جـ ..... (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ جـ = ب جـ ∴ Δ أ جـ ب قائم الزاوية ومتساوى الساقين

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ٤٥° أى أن الساق تميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

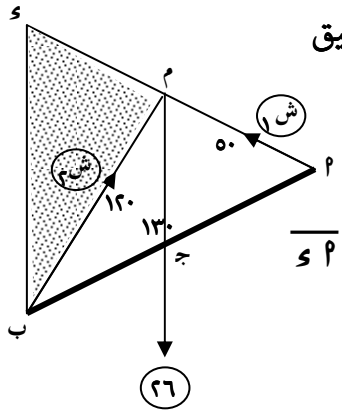
فى Δ أ م جـ : $(أ\ م)^2 = (أ\ جـ)^2 + (م\ جـ)^2$ ومنها أ م = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$ أ جـ

ومن قاعدة مثلث القوى السابقة :

$ق = \frac{و \times أ\ م}{جـ\ أ} = \frac{٥\sqrt{٢}}{٢}\ و$

(٥) علق قضيب منتظم طوله ١٣٠ سم ووزنه ٢٦ نيوتن من طرفيه تعليقاً مطلقاً فى خيطين مربوطين فى نقطة واحدة وكان طول أحدهما ٥٠ سم وطول الآخر ١٢٠ سم . ماهو الوضع الذى يكون فيه القضيب متزناً . وما هو مقدار الشد فى كل من الخيطين .

الحل



الوضع الذى يتزن فيه القضيب أن يمر خط عمل الوزن بنقطة التعليق

Δ أ م ب قائم الزاوية (وذلك من العلاقة بين أطوال أضلاعه)

∵ جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ م جـ = $\frac{١}{٢}$ الوتر $\overline{أ ب}$ = ٦٥ سم

Δ أ ب ء : ∵ $\overleftarrow{م جـ}$ // $\overleftarrow{ء ب}$ ، جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ م منتصف $\overline{أ ء}$

∴ م ء = ٥٠ سم ، ب ء = ١٣٠ سم

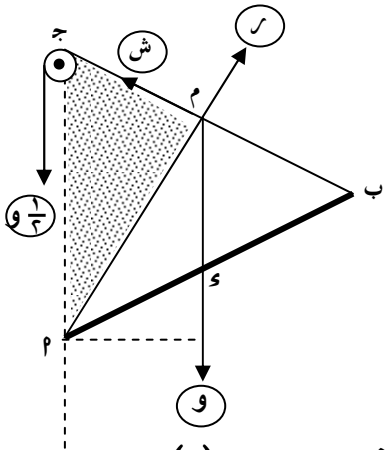
∵ المجموعة متزنه ، Δ أ ب ء هو مثلث القوى :

∴ $\frac{ش_{١}}{م ء} = \frac{٢٦}{ب ء} = \frac{ش_{٢}}{م ب}$ ∴ $\frac{ش_{١}}{٥٠} = \frac{٢٦}{١٣٠} = \frac{ش_{٢}}{١٢٠}$

∴ ش١ = ١٠ نيوتن ، ش٢ = ٢٤ نيوتن

(٦) قضيب منتظم $\overline{أ ب}$ يمكنه الدوران بغير عائق فى مستوى رأسى حول مفصل فى أ ربط طرفه الآخر ب بخيط يمر على بكرة ملساء عند جـ أعلى أ تماماً ويحمل ثقلاً يساوى نصف ثقل القضيب . أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن إذا علم أن أ جـ = أ ب

الحل



∵ البكرة ملساء ∴ ش = $\frac{١}{٢}$ و

وكما فى التمرين السابق : م جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ ..... (١)

المجموعة متزنه والقوى الثلاثة تتلاقى عند نقطة م :

Δ أ م جـ هو مثلث القوى :

∴ $\frac{ر}{أ م} = \frac{و}{أ جـ} = \frac{\frac{١}{٢} و}{م جـ}$

وبقسمة النسبة الثالثة على النسبة الثانية نحصل على : م جـ = $\frac{١}{٢}$ أ جـ ..... (٢)

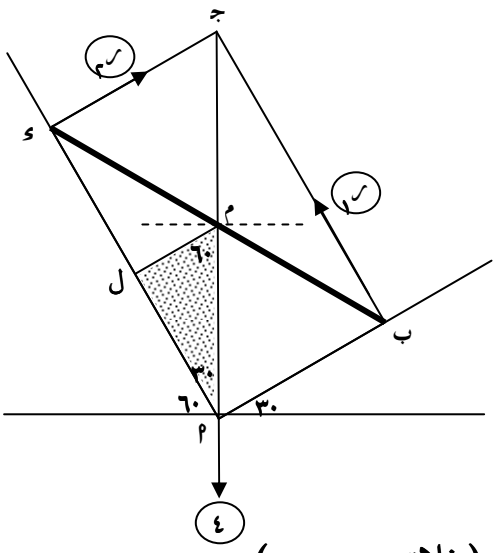
من (١) ، (٢) ∴ أ جـ = ب جـ ولكن أ جـ = أ ب ∴ أ جـ = ب جـ = أ ب

∴ Δ أ ب جـ متساوى الأضلاع ∴ ق (∠ ب أ جـ) = ٦٠°

∴ زاوية ميل القضيب على الأفقى = ٣٠°

(٧) وضع قضيب منتظم وزنه ٤ نيوتن على مستويين أملسين متقابلين ويميلان على الأفقى بالزاويتين ٣٠° ، ٦٠° بحيث يقع القضيب وخطا أكبر ميل للمستويين فى مستوى واحد . أوجد مقدار الضغط على كل من المستويين وكذا زاوية ميل القضيب على الأفقى فى حالة التوازن .

الحل



∵ المستويان أملسان ∴ ردى الفعل عموديان عليهما

، المستويان متعامدان ∴ الشكل أ ب جـ ء مستطيل

ومن هندسة الشكل :

ق(∠ م أ ب) = ٦٠°

∴ Δ م ب أ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ ب م أ) = ٦٠°

∴ زاوية ميل القضيب على الأفقى = ٣٠°

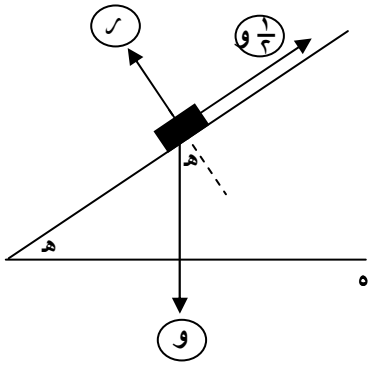
∴ المجموعة متزنه ، Δ أ م ل هو مثلث القوى (ثلاثينى ستينى) :

∴ $\frac{ر_1}{ل أ} = \frac{٤}{م أ} = \frac{ر_2}{م ل}$ ∴ $\frac{ر_1}{\sqrt{٣}} = \frac{٤}{٢} = \frac{ر_2}{١}$

∴ ر١ = ٢ √٣ نيوتن ، ر٢ = ٢ نيوتن .

(٨) جسم فى حالة توازن على مستوى مائل تحت تأثير قوة تعمل فى اتجاه المستوى إلى أعلى ومقدارها يساوى نصف مقدار وزن الجسم ، أوجد زاوية ميل المستوى على الأفقى ورد فعل المستوى .

الحل



بتطبيق قاعدة لامى :

∴ $\frac{ر}{جا(٩٠ + هـ)} = \frac{و}{جا ٩٠} = \frac{\frac{1}{2} و}{جا(١٨٠ - هـ)}$

∴ $\frac{ر}{جتا هـ} = \frac{و}{١} = \frac{\frac{1}{2} و}{جا هـ}$

بقسمة النسبة الثالثة على الثانية : ∴ جا هـ = $\frac{1}{2}$ ∴ هـ = ٣٠°

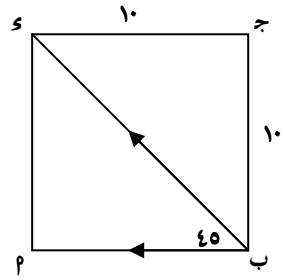
، ر = و × جتا هـ = و جتا ٣٠ = $\frac{\sqrt{٣}}{2}$ و

الفصل الثالث : العزوم

تمارين (٣ - ١)

(١) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٠ سم ، عين حاصل الضرب القياسى للمتجهين $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$.
احسب كذلك المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{ب ء}$ فى اتجاه المتجه $\overleftarrow{ج ب}$.

الحل



$\overleftarrow{ب ء} \odot \overleftarrow{ب أ}$ = || $\overleftarrow{ب ء}$ || || $\overleftarrow{ب أ}$ || جتا ($\angle$ أ ب ء)

= ١٠ $\sqrt{٢}$ × ١٠ × جتا ٤٥ = ١٠٠

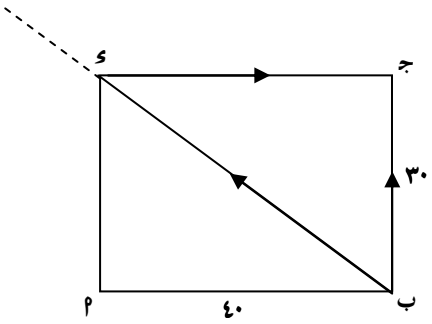
مسقط $\overleftarrow{ب ء}$ فى اتجاه $\overleftarrow{ج ب}$ = || $\overleftarrow{ب ء}$ || جتا ١٣٥

= - ١٠

---

(٢) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٣٠ سم ، عين المسقط الجبرى للمتجه $\overleftarrow{ب ء}$ فى اتجاهى $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$.

الحل



ب ء = ٥٠ سم

مسقط $\overleftarrow{ب ء}$ فى اتجاه $\overleftarrow{ب جـ}$ = ب ء جتا ($\angle$ جـ ب ء)

= ٥٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ٣٠

مسقط $\overleftarrow{ب ء}$ فى اتجاه $\overleftarrow{ء جـ}$ = ب ء جتا (١٨٠ - $\widehat{ب جـ ء}$)

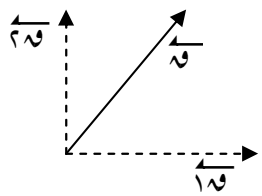
= ٥٠ × (- جتا $\widehat{ب ء جـ}$)

= - ٥٠ × $\frac{٤}{٥}$ = - ٤٠

---

(٣) يراد تحليل قوة $\overleftarrow{ق}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$. فإذا كانت $\overleftarrow{ق_١}$ توازى متجهاً معطى $\overleftarrow{ب}$ ، بينما $\overleftarrow{ق_٢}$ عمودية على $\overleftarrow{ب}$.
أثبت أن : $\overleftarrow{ق_١}$ = ($\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب}}{ب^٢}$) $\overleftarrow{ب}$ ثم أوجد $\overleftarrow{ق_٢}$

الحل



$\overleftarrow{ق_١}$ = مسقط $\overleftarrow{ق}$ فى اتجاه $\overleftarrow{ب}$ منسوب إلى متجه الوحدة فى اتجاه $\overleftarrow{ب}$

= $\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب}}{||\overleftarrow{ب}||}$ × $\frac{\overleftarrow{ب}}{||\overleftarrow{ب}||}$ = ($\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب}}{ب^٢}$) $\overleftarrow{ب}$

، ∵ $\overleftarrow{ق}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ ∴ $\overleftarrow{ق_٢}$ = $\overleftarrow{ق}$ - $\overleftarrow{ق_١}$ = $\overleftarrow{ق}$ - ($\frac{\overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ب}}{ب^٢}$) $\overleftarrow{ب}$

(٤) أوجد متجه وحدة عمودى على كل من المتجهين : $\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{س} - \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$

الحل

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (١ ، -١) \times (١ ، ١) = [(١ \times ١) - (-١ \times ١)] \overleftarrow{ع} = ٢ \overleftarrow{ع}$

وهو متجه عمودى على مستوى $\overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب}$

∴ متجه الوحدة العمودى = $\frac{١}{٢}(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب})$

---

(٥) $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ ثلاث متجهات قوى تحقق العلاقة : $\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{٠}$

أثبت أن : $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_١}$ فسر هذه النتيجة هندسياً .

الحل

∴ $\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{٠}$ بالضرب اتجاهياً × $\overleftarrow{ق_٢}$

∴ $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{٠} \times \overleftarrow{ق_٢}$

∴ $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{٠} + \overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{٠}$

∴ $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٢} = -\overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٣}$ (وهو المطلوب أولاً) ..... (١)

∴ $\overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{٠}$ بالضرب اتجاهياً × $\overleftarrow{ق_٣}$

∴ $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٣} + \overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٣} + \overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{٠} \times \overleftarrow{ق_٣}$

∴ $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٣} + \overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٣} + \overleftarrow{٠} = \overleftarrow{٠}$

∴ $\overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٣} = -\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_١}$ (وهو المطلوب أولاً) ..... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\overleftarrow{ق_١} \times \overleftarrow{ق_٢} = \overleftarrow{ق_٢} \times \overleftarrow{ق_٣} = \overleftarrow{ق_٣} \times \overleftarrow{ق_١}$

التفسير الهندسى :

كل منهم يساوى ضعف مساحة المثلث الذى يمثل القوى $\overleftarrow{ق_١}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ تمثيلاً تاماً .

---

(٦) إذا كان : $\overleftarrow{أ} = ١٥ \overleftarrow{س} + ٦ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٣ \overleftarrow{س} + ٥ \overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{جـ} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ فأوجد كلا من :

$(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) \times \overleftarrow{جـ}$ ، $(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}) \odot \overleftarrow{جـ}$ ، $\overleftarrow{أ} \odot (\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ})$ ،

$(\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}) \times \overleftarrow{جـ}$ ، $\overleftarrow{ب} \times (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{جـ})$ ، $\overleftarrow{أ} \times (\overleftarrow{جـ} \times \overleftarrow{ب})$

الحل

$\overleftarrow{أ} = (١٥ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{ب} = (٣ ، ٥)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (١ ، ١)$

$\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (١٨ ، ١١)$

$(\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب}) \times \overleftarrow{جـ} = (١٨، ١١) \times (١، ١) = (١٨ \times ١ - ١١ \times ١)\overleftarrow{ع} = ٧\overleftarrow{ع}$

، $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (١٥، ٦) \times (٣، ٥) = (١٥ \times ٥ - ٦ \times ٣)\overleftarrow{ع} = ٥٧\overleftarrow{ع}$

$(\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}) \odot \overleftarrow{جـ} = ٥٧\overleftarrow{ع} \odot (١، ١) =$ صفر (لأن $\overleftarrow{ع}$ عمودى على $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$)

، $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{جـ} = (٣، ٥) \times (١، ١) = (٣ - ٥)\overleftarrow{ع} = -٢\overleftarrow{ع}$

∴ $\overleftarrow{أ} \odot -٢\overleftarrow{ع} =$ صفر

، $\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ} = (٣، ٥) \times (١٥، ٦) = (١٨ - ٧٥)\overleftarrow{ع} = -٥٧\overleftarrow{ع}$

∴ $(\overleftarrow{ب} \times \overleftarrow{أ}) \times \overleftarrow{جـ} = -٥٧\overleftarrow{ع} \times (١، ١) = -٥٧(\overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ع} \times \overleftarrow{ص})$

$= -٥٧[\overleftarrow{ص} + (-\overleftarrow{س})] = ٥٧\overleftarrow{س} - ٥٧\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{جـ} = (١٥، ٦) \times (١، ١) = (١٥ - ٦)\overleftarrow{ع} = ٩\overleftarrow{ع}$

∴ $\overleftarrow{ب} \times (\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{جـ}) = (٣، ٥) \times ٩\overleftarrow{ع} = ٢٧\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} + ٤٥\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع}$

$= -٢٧\overleftarrow{ص} + ٤٥\overleftarrow{س} = ٤٥\overleftarrow{س} - ٢٧\overleftarrow{ص}$

، $\overleftarrow{جـ} \times \overleftarrow{ب} = (١، ١) \times (٣، ٥) = (٥ - ٣)$ ع ثم = ٢ ع ثم

∴ $\overleftarrow{أ} \times (\overleftarrow{جـ} \times \overleftarrow{ب}) = (١٥، ٦) \times ٢\overleftarrow{ع} = ٣٠\overleftarrow{س} \times \overleftarrow{ع} + ١٢\overleftarrow{ص} \times \overleftarrow{ع}$

$= -٣٠\overleftarrow{ص} + ١٢\overleftarrow{س} = ١٢\overleftarrow{س} - ٣٠\overleftarrow{ص}$

---

(٧) أوجد حاصل الضرب الاتجاهى $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ إذا علمت أن :

$\overleftarrow{أ} = ٥\overleftarrow{س} - ٤\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب} = ٣\overleftarrow{س} + ٧\overleftarrow{ص}$ ثم أوجد مساحة سطح المثلث المقام على القطعتين المستقيمتين الموجهتين الممثلتين لهذين الضلعين كضلعين متجاورين .

الحل

$\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب} = (٧، ٣) \times (٥، -٤) = (٣٥ + ١٢)\overleftarrow{ع} = ٤٧\overleftarrow{ع}$

∴ $\overleftarrow{أ} \times \overleftarrow{ب}$ = ضعف مساحة سطح المثلث

∴ مساحة سطح المثلث = $\frac{٤٧}{٢}$ = ٢٣,٥ وحدة مساحة

تمارين (٣ - ٢)

• فى التمارين التالية $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ، وفى اتجاهى $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ على الترتيب بينما $\overleftarrow{ع}$ متجه وحدة عمودى على كل من $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ بحيث تكون { $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ع}$ } مجموعة يمينية من متجهات الوحدة .

(١) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق} = -\overleftarrow{س} + ٣\overleftarrow{ص}$ فى النقطة أ = (١ ، ٢) . عين متجه عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل و = (٠ ، ٠) واحسب طول العمود الساقط من النقطة و على خط عمل القوة .

الحل

$\overleftarrow{ر} = (٢ ، ١)$ ، $\overleftarrow{ق} = (-١ ، ٣)$

$\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (٢ ، ١) \times (-١ ، ٣) = (٣ + ٢)\overleftarrow{ع} = ٥\overleftarrow{ع}$

$|| \overleftarrow{ج_و} || = ٥$ ، $|| \overleftarrow{ق} || = \sqrt{(-١)^٢ + (٣)^٢} = \sqrt{١٠}$

∴ طول العمود = ل = ٥ ÷ $\sqrt{١٠}$ = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٠}$ وحدة طول

---

(٢) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق} = ٣\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص}$ فى نقطة أ = (٢ ، - ١) . أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٢) ثم احسب طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة .

الحل

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ب أ} = أ - ب = (٢ ، -١) - (١ ، ٢) = (١ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{ق} = (٣ ، ٢)$

$\overleftarrow{ج_ب} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (١ ، -٣) \times (٣ ، ٢) = (٢ + ٩)\overleftarrow{ع} = ١١\overleftarrow{ع}$

$|| \overleftarrow{ج_ب} || = ١١$ ، $|| \overleftarrow{ق} || = \sqrt{(٣)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{١٣}$

∴ ل = ١١ ÷ $\sqrt{١٣}$ = $\frac{١١}{١٣}\sqrt{١٣}$

---

(٣) تؤثر القوة $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص}$ عند النقطة أ = (- ٣ ، - ٣) . احسب عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل ، وفسر النتيجة التى حصلت عليها .

الحل

$\overleftarrow{ر} = (-٣ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{ق} = (١ ، ١)$

$\overleftarrow{ج_و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق} = (-٣ ، -٣) \times (١ ، ١) = (-٣ + ٣)\overleftarrow{ع} = \overleftarrow{٠}$

∴ خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ يمر بنقطة الأصل و .

(٤) تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_1} = س + ص$ ، $\overleftarrow{ق_2} = م س - ٢ ص$. عند النقطتين $أ_1 = (٢، ٠)$ ، $أ_2 = (٠، ٢)$ على الترتيب . عيّن قيمة الثابت $م$ بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل .

الحل

$\overleftarrow{ر_1} = (٠، ٢)$ ، $\overleftarrow{ر_2} = (٢، ٠)$ ، $\overleftarrow{ق_1} = (١، ١)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (م، -٢)$

$\overleftarrow{ج_1} = \overleftarrow{ر_1} \times \overleftarrow{ق_1} = (٢، ٠) \times (١، ١) = (٢ - ٠) \overleftarrow{ع} = ٢ \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{ر_2} \times \overleftarrow{ق_2} = (٠، ٢) \times (م، -٢) = (٠ - ٢ م) \overleftarrow{ع} = -٢ م \overleftarrow{ع}$

$\because \overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{٠}$ $\therefore$ $٢ \overleftarrow{ع} - ٢ م \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{٠}$

$\therefore ٢ - ٢ م = ٠$ $\therefore$ $م = ١$

(٥) تؤثر القوتان $\overleftarrow{ق_1} = (م س + ٢ ص)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (ل س - ص)$ عند النقطتين $أ_1 = (١، ١)$ ، $أ_2 = (-١، -٢)$ على الترتيب . عيّن قيمة كل من الثابتين $م$ ، $ل$ بحيث ينعدم مجموع عزمى هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل وبالنسبة للنقطة $ب = (٢، ٣)$.

الحل

بالنسبة لنقطة الأصل :

$\overleftarrow{ر_1} = (١، ١)$ ، $\overleftarrow{ر_2} = (-١، -٢)$ ، $\overleftarrow{ق_1} = (م، ٢)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (ل، -١)$

$\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{٠}$ $\therefore$ $\overleftarrow{ر_1} \times \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ر_2} \times \overleftarrow{ق_2} = \overleftarrow{٠}$

$\therefore (١، ١) \times (م، ٢) + (-١، -٢) \times (ل، -١) = \overleftarrow{٠}$

$\therefore (٢ - م) \overleftarrow{ع} + (١ + ٢ ل) \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{٠}$

$\therefore ٣ - م + ٢ ل = ٠$ ..... (١)

بالنسبة لنقطة ب :

$\overleftarrow{ر_3} = \overleftarrow{ب أ_1} = أ_1 - ب = (-١، -٢)$ ، $\overleftarrow{ر_4} = (-٣، -٥)$

، $\overleftarrow{ق_1} = (م، ٢)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (ل، -١)$

$\overleftarrow{ج_3} + \overleftarrow{ج_4} = \overleftarrow{٠}$ $\therefore$ $\overleftarrow{ر_3} \times \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ر_4} \times \overleftarrow{ق_2} = \overleftarrow{٠}$

$\therefore (-١، -٢) \times (م، ٢) + (-٣، -٥) \times (ل، -١) = \overleftarrow{٠}$

$\therefore (-٢ + ٢ م) \overleftarrow{ع} + (٣ + ٥ ل) \overleftarrow{ع} = \overleftarrow{٠}$

∴ ١ + ٢ م + ٥ ل = ٠ ..... (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على : ل = – $\frac{٧}{٩}$ ، م = $\frac{١٣}{٩}$

(٦) القوى $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ – $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٥ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = – ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى النقطة أ (١ ، ١) برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازى المستقيم المار بالنقطتين ب (٢ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) .

الحل

$\overleftarrow{ح}$ = $\overleftarrow{ق_١}$ + $\overleftarrow{ق_٢}$ + $\overleftarrow{ق_٣}$ = ٤ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$

$\overleftarrow{ر_١}$ = $\overleftarrow{ب أ}$ = أ – ب = (– ١ ، ٠) ، $\overleftarrow{ر_٢}$ = $\overleftarrow{جـ أ}$ = أ – جـ = (– ٥ ، – ٣)

$\overleftarrow{ج_ب}$ = $\overleftarrow{ر_١}$ × $\overleftarrow{ح}$ = (– ١ ، ٠) × (٤ ، ٣) = (– ٣ – ٠) $\overleftarrow{ع}$ = – ٣ $\overleftarrow{ع}$

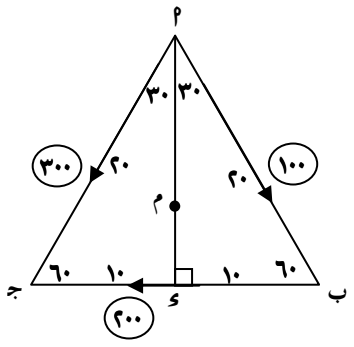
$\overleftarrow{ج_جـ}$ = $\overleftarrow{ر_٢}$ × $\overleftarrow{ح}$ = (– ٥ ، – ٣) × (٤ ، ٣) = (– ١٥ + ١٢) $\overleftarrow{ع}$ = – ٣ $\overleftarrow{ع}$

∵ $\overleftarrow{ج_ب}$ = $\overleftarrow{ج_جـ}$ ∴ خط عمل المحصلة // $\overline{ب جـ}$

(٧) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، طول ضلعه ٢٠ سم ، تؤثر القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

أولاً : حول نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث . ثانياً : حول منتصف $\overline{ب جـ}$.

الحل



أ ء = ١٠ $\sqrt{٣}$

، أ م = $\frac{٢}{٣}$ × ١٠ $\sqrt{٣}$ = $\frac{٢٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$

، م ء = $\frac{١٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$

ج م = – ١٠٠ × أ م جا ٣٠ – ٢٠٠ × م ء + ٣٠٠ × أ م جا ٣٠

= – ١٠٠ × $\frac{٢٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠ – ٢٠٠ × $\frac{١٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$ + ٣٠٠ × $\frac{٢٠}{٣}$ $\sqrt{٣}$ جا ٣٠

= صفر

، ج ء = – ١٠٠ × ب ء جا ٦٠ – ٢٠٠ × صفر + ٣٠٠ × جـ ء جا ٦٠

= – ١٠٠ × ٥ جا ٦٠ + ٣٠٠ × ٥ جا ٦٠

= ١٠٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن . سم

(٨) تعمل القوى الثلاث $\overleftarrow{ق_1} = ٣\overleftarrow{س} + ١٢\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_2} = ٩\overleftarrow{س} + ٤\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_3} = ٨\overleftarrow{س} + ١٤\overleftarrow{ص}$

عند نقطة الأصل و = (٠ ، ٠) . أوجد عزم كل من هذه القوى بالنسبة للنقطة ب = (١ ، ٢)

ثم احسب مجموع هذه العزوم ، عيّن بعد ذلك محصلة القوى الثلاث ، ثم أوجد عزمها بالنسبة للنقطة ب . ماذا تستنتج بمقارنة النتائج ؟

الحل

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{بو} = و - ب = (-١ ، -٢)$

$\overleftarrow{ق_1} = (٣ ، ١٢)$ ، $\overleftarrow{ق_2} = (٩ ، ٤)$ ، $\overleftarrow{ق_3} = (٨ ، ١٤)$

$\overleftarrow{ج_1} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_1} = (-١ ، -٢) \times (٣ ، ١٢) = (-١٢ + ٦) \overleftarrow{ع} = -٦ \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_2} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_2} = (-١ ، -٢) \times (٩ ، ٤) = (-٤ + ١٨) \overleftarrow{ع} = ١٤ \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_3} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق_3} = (-١ ، -٢) \times (٨ ، ١٤) = (-١٤ + ١٦) \overleftarrow{ع} = ٢ \overleftarrow{ع}$

$\overleftarrow{ج_1} + \overleftarrow{ج_2} + \overleftarrow{ج_3} = -٦ ع + ١٤ \overleftarrow{ع} + ٢ \overleftarrow{ع} = ١٠ \overleftarrow{ع}$

، $\overleftarrow{ح} = \overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} = (٢٠ ، ٣٠)$

∴ $\overleftarrow{ج} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ح} = (-١ ، -٢) \times (٢٠ ، ٣٠) = (-٣٠ + ٤٠) \overleftarrow{ع} = ١٠ \overleftarrow{ع}$

نستنتج أن :

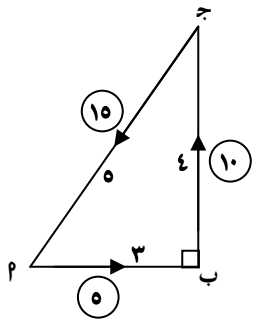
مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة ب يساوى عزم محصلتها بالنسبة لنفس النقطة .

---

(٩) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم ، جـ أ = ٥ سم ، أثرت القوى ٥ ، ١٠ ، ١٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ على الترتيب .

أوجد المجموع الجبرى لعزوم القوى حول كل من أ ، ب ، جـ .

الحل



الأضلاع ٣ ، ٤ ، ٥ تكون مثلث قائم الزاوية فى ب

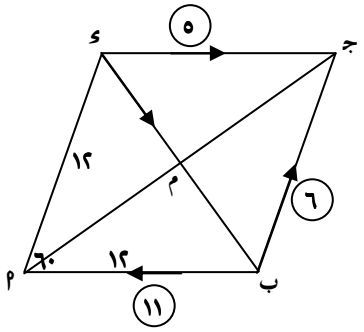
$ج_أ = ٥ \times ٠ + ١٥ \times ٠ + ١٠ \times ٣ = ٣٠$ نيوتن . سم

$ج_ب = ٥ \times ٠ + ١٠ \times ٠ + ١٥ \times ٣$ جا أ $= ٤٥ \times \frac{٤}{٥} = ٣٦$ نيوتن . سم

$ج_جـ = ١٠ \times ٠ + ١٥ \times ٠ + ٥ \times ٤ = ٢٠$ نيوتن . سم

(١٠) أ ب جـ ء معين طول ضلعه ١٢ سم ، ق(∠ أ) = ٦٠° ، أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ نيوتن فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ على الترتيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

أولاً : حول أ . ثانياً : حول م نقطة تقاطع قطرى المعين .



الحل

ج$_{أ}$ = ٦ × أ ب جا ٦٠ − ٥ × أ ء جا ٦٠ − ٧ × أ ء جا ٦٠

= (٦ − ٥ − ٧) × ١٢ جا ٦٠ = − ٣٦ √٣ نيوتن . سم

∵ Δ أ ب ء متساوى الأضلاع ∴ ب ء = ١٢ سم

، ج$_{م}$ = ٦ × ب م جا ٦٠ − ٥ × م ء جا ٦٠ − ١١ × ب م جا ٦٠

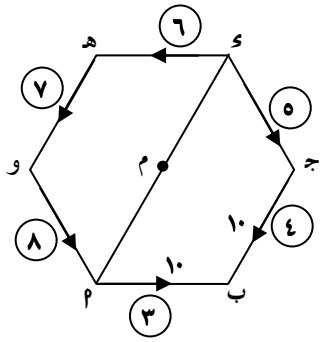
= (٦ − ٥ − ١١) × ٦ جا ٦٠ = − ٣٠ √٣ نيوتن . سم

---

(١١) أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم ، أثرت القوى ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ على الترتيب .

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى :

أولاً : حول أ . ثانياً : حول مركز المسدس .



الحل

ج$_{أ}$ = − ٤ × أ ب جا ٦٠ − ٥ × أ ء جا ٦٠ + ٦ × أ ء جا ٦٠

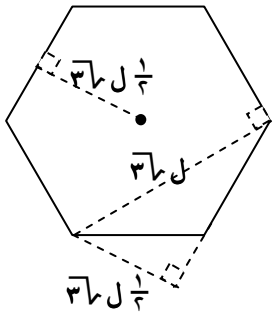
+ ٧ × أ و جا ٦٠

= − ٤ × ٥ √٣ − ٥ × ١٠ √٣ + ٦ × ١٠ √٣ + ٧ × ٥ √٣

= ٢٥ √٣ نيوتن . سم

ج$_{م}$ = (٣ − ٤ − ٥ + ٦ + ٧ + ٨) × ٥ √٣

= ٧٥ √٣ نيوتن . سم



ملحوظة هامة جداً :

فى السداسى المنتظم يوجد عمودان فقط :

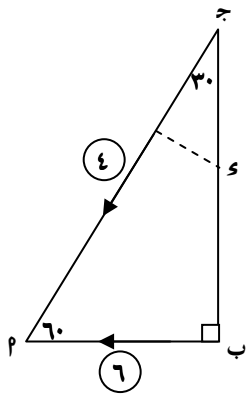
العمود الطويل = ل √٣

، العمود القصير = ½ ل √٣

---

(١٢) أ ب جـ مثلث فيه : ق(∠ ب) = ٩٠° ، ق(∠ أ) = ٦٠° ، ب جـ = ٦ سم . أثرت القوتان : ٦ ، ٤ نيوتن فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ على الترتيب .
أوجد نقطة ء ∈ $\overline{ب جـ}$ وتجعل المجموع الجبرى لعزمى هاتين القوتين عندها يساوى صفراً .

الحل



نفرض جـ ء = س سم ∴ ب ء = (٦ − س) سم

∵ ج ء = ٠

∴ ٤ × جـ ء جا ٣٠ − ٦ × ب ء = ٠

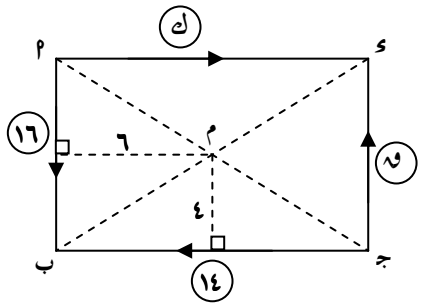
∴ ٤ × س × $\frac{١}{٢}$ − ٦ (٦ − س) = ٠

∴ ٢ س − ٣٦ + ٦ س = ٠

∴ ٨ س = ٣٦ ومنها س = ٤,٥ سم

(١٣) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم . القوى ١٦ ، ١٤ ، ق ، ك ث جم تؤثر فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب . فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من جـ ومركز المستطيل يساوى صفراً . أوجد ق ، ك .

الحل



∵ ج جـ = ٠

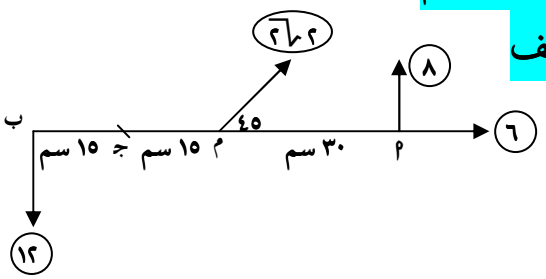
∴ ١٦ × ١٢ − ك × ٨ = ٠

∴ ك = ٢٤ ث جم

، ∵ ج م = ٠

∴ ١٦ × ٦ − ١٤ × ٤ + ق × ٦ − ك × ٤ = ٠ ∴ ق = $\frac{٢٨}{٣}$ ث جم

(١٤) فى الشكل المقابل : أثرت القوى ٦ ، ٨ ، ٢ $\sqrt{٢}$ ، ١٢ ث كجم فى قضيب أ ب طوله ٦٠ سم ، حيث م نقطة منتصف القضيب . أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول النقطة جـ من القضيب التى تبعد ١٥ سم عن الطرف ب .

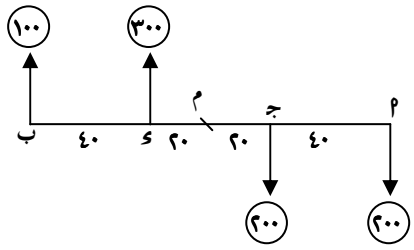


الحل

ج جـ = ١٢ × ١٥ + ٢ $\sqrt{٢}$ × ١٥ جا ٤٥ + ٨ × ٤٥ + ٦ × ٠ = ٥٧٠ ث كجم . سم

(١٥) أثرت القوى الأربع ٢٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، ١٠٠ نيوتن فى قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ١٢٠ سم عند النقط أ ، جـ ، ء ، ب على الترتيب . حيث جـ ، ء نقطتى تثليث $\overline{أ ب}$. وبحيث كانت كل القوى عمودية على القضيب . وفى الاتجاهات المبينة بالشكل .

أوجد المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى عند النقط أ ، ب وعند نقطة منتصف القضيب م ، ثم قارن نتائجك ببعضها .



الحل

ج$_{أ}$ = ٢٠٠ × ٤٠ − ٣٠٠ × ٨٠ − ١٠٠ × ١٢٠ = − ٢٨٠٠٠ نيوتن . سم

ج$_{ب}$ = ٣٠٠ × ٤٠ − ٢٠٠ × ٨٠ − ٢٠٠ × ١٢٠ = − ٢٨٠٠٠ نيوتن . سم

ج$_{م}$ = − ١٠٠ × ٦٠ − ٣٠٠ × ٢٠ − ٢٠٠ × ٢٠ − ٢٠٠ × ٦٠ = − ٢٨٠٠٠ نيوتن . سم

∴ ج$_{أ}$ = ج$_{ب}$ = ج$_{م}$

---

(١٦) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى ب فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أثرت قوة $\overleftarrow{ق}$ فى مستوى المثلث بحيث كان ج$_{أ}$ = ج$_{ب}$ = ٦٠ نيوتن . سم ، ج$_{جـ}$ = − ٦٠ نيوتن . سم

أوجد مقدار $\overleftarrow{ق}$ وعيّن خط عملها .

الحل

∵ ج$_{أ}$ = ج$_{ب}$ ∴ خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ // $\overline{أ ب}$

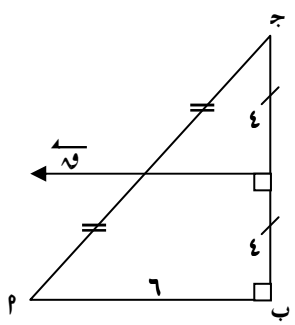
∵ ج$_{أ}$ = − ج$_{جـ}$ ∴ خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{أ جـ}$

∵ ج$_{ب}$ = − ج$_{جـ}$ ∴ خط عمل القوة $\overleftarrow{ق}$ يمر بمنتصف $\overline{ب جـ}$

∵ ج$_{ب}$ = ٦٠

∴ ق × ٤ = ٦٠

∴ ق = ١٥ نيوتن

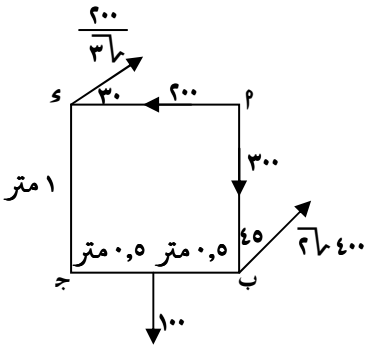


(١٧) فى الشكل المرسوم : تؤثر خمس قوى مقاديرها ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ ، $\frac{٢٠٠}{\sqrt{٣}}$ ، ٤٠٠ $\sqrt{٢}$ نيوتن فى المربع أ ب جـ ء الذى طول ضلعه متر .

عيّن المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول الرأس جـ

ماهى القوة التى يجب أن تؤثر عند نقطة منتصف $\overline{جـ ء}$

وفى اتجاه عمودى على هذا الضلع حتى ينعدم هذا المجموع ؟

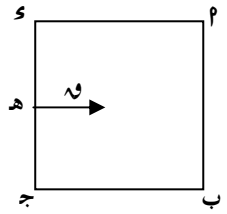


الحل

$ق_{جـ} = -١٠٠ \times ٠,٥ + ٤٠٠\sqrt{٢} \times ب جـ \text{ جا } ٤٥ - ٣٠٠ \times ١ + ٢٠٠ \times ١ - \frac{٢٠٠}{\sqrt{٣}} \times أ ء \text{ جا } ٦٠$

= ١٥٠ نيوتن . متر

نفرض القوة المطلوبة = ق وتؤثر عند النقطة هـ منتصف $\overline{جـ ء}$



ولكى ينعدم المجموع الجبرى لعزوم القوى

يجب أن يكون عزم ق بالنسبة لنقطة جـ = - ١٥٠ نيوتن . متر

∴ - ق × ٠,٥ = - ١٥٠

∴ ق = ٣٠٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{جـ ب}$.

---

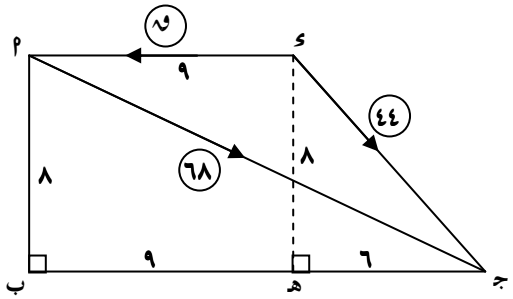
(١٨) أ ب جـ ء شبة منحرف قائم الزاوية فى ب ، $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، أ ء = ٩ سم . أثرت قوى مقاديرها ق ، ٤٤ ، ٦٨ ث . جم فى $\overleftarrow{ء أ}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ على الترتيب . إذا كان خط عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة ب فأوجد قيمة ق .

الحل

نرسم $\overline{ء هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ، ء جـ = ١٠ سم ، أ جـ = ١٧ سم

∵ خط عمل المحصلة يمر بنقطة ب

∴ $ق_{ب}$ = صفر



∴ - ٦٨ × أ ب جا ($\widehat{ب أ جـ}$) - ٤٤ × ب جـ جا ($\widehat{ب جـ ء}$) + ق × أ ب = ٠

∴ - ٦٨ × ٨ × $\frac{١٥}{١٧}$ - ٤٤ × ١٥ × $\frac{٨}{١٠}$ + ق × ٨ = ٠

∴ - ٤٨٠ - ٥٢٨ + ٨ ق = ٠

∴ ٨ ق = ١٠٠٨ ومنها ق = ١٢٦ ث . جم

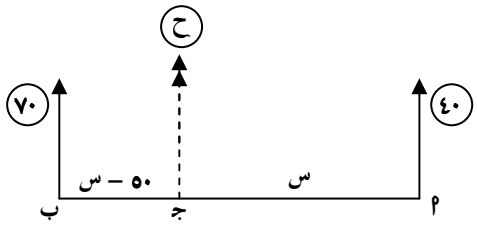
تمارين (٤ - ١)

(١) قوتان متوازيتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب ، إذا كانت $ق_1 = ٤٠$ نيوتن ، $ق_2 = ٧٠$ نيوتن ، أ ب = ٥٠ سم ، أوجد محصلتهما :

أولاً : إذا كانتا متحدتان فى الاتجاه . ثانياً : إذا كانتا متضادتان فى الاتجاه .

الحل

أولاً : إذا كانتا متحدتان فى الاتجاه



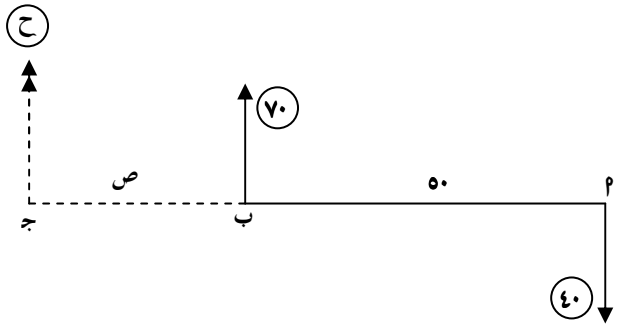
ح = ٤٠ + ٧٠ = ١١٠ نيوتن لأعلى

وتعمل فى نفطة جـ $\in \overline{أ ب}$ وتبعد عن أ بمقدار س سم

٤٠ × س = ٧٠ (٥٠ - س)

٤ س = ٣٥٠ - ٧ س ⇐ ١١ س = ٣٥٠ ⇐ س = ٣١,٨ سم

ثانياً : إذا كانتا متضادتان فى الاتجاه



ح = ٧٠ - ٤٠ = ٣٠ نيوتن لأعلى

وتعمل فى نقطة جـ $\in \overleftarrow{أ ب}$ ، $\notin \overline{أ ب}$

وتبعد عن ب بمقدار ص سم

٧٠ × ص = ٤٠ × (٥٠ + ص)

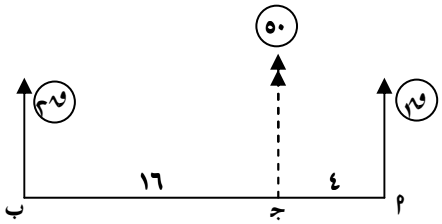
٧ ص = ٢٠٠ + ٤ ص ⇐ ٣ ص = ٢٠٠ ⇐ ص = ٦٦,٧ سم

---

(٢) $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان متوازيتان متحدتان فى الاتجاه والبعد بين خطى عملهما ٢٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن خط عمل $\overleftarrow{ق_1}$ مسافة ٤ سم .

أوجد مقدار كل من القوتين .

الحل



$ق_1 + ق_2 = ٥٠$ ..... (١)

$٤ ق_1 = ١٦ ق_2$

$ق_1 = ٤ ق_2$ ..... (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١) ∴ $٤ ق_2 + ق_2 = ٥٠$ ∴ $٥ ق_2 = ٥٠$

∴ $ق_2 = ١٠$ نيوتن

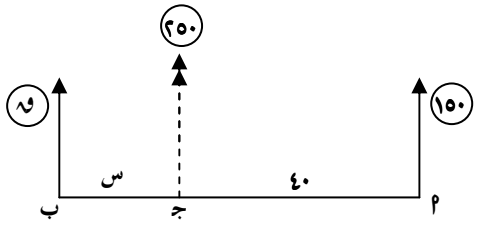
بالتعويض فى (٢) ∴ $ق_1 = ٤٠$ نيوتن

(٣) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ١٥٠ نيوتن وتعمل على بعد ٤٠ سم من المحصلة . أوجد مقدار القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

أولاً : فى اتجاه واحد . ثانياً : فى اتجاهين متضادين .

الحل

أولاً : القوة المعلومة والمحصلة فى اتجاه واحد



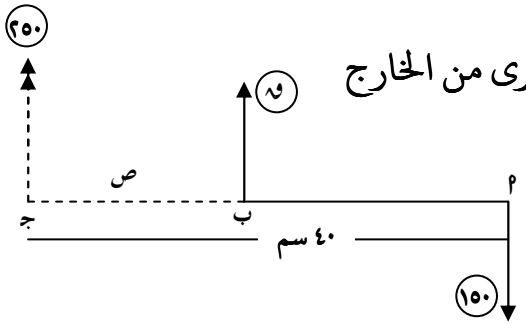
∵ المحصلة > القوة المعلومة وفى نفس اتجاهها

∴ القوتان فى نفس الاتجاه

∴ ١٥٠ + ق$_{م}$ = ٢٥٠ ومنها ق$_{م}$ = ١٠٠ نيوتن

، ١٠٠ س = ١٥٠ × ٤٠ ومنها س = ٦٠ ∴ البعد بين القوتين = ٤٠ + ٦٠ = ١٠٠ سم

أولاً : القوة المعلومة والمحصلة فى اتجاهين متضادين



∴ القوتان متضادتان فى الاتجاه والمحصلة فى اتجاه الكبرى من الخارج

٢٥٠ = ق − ١٥٠ ∴ ق = ٢٥٠ + ١٥٠ = ٤٠٠ نيوتن

، ٤٠٠ ص = ١٥٠ × ٤٠

∴ ص = ١٥

∴ البعد بين القوتين = ٤٠ − ١٥ = ٢٥ سم

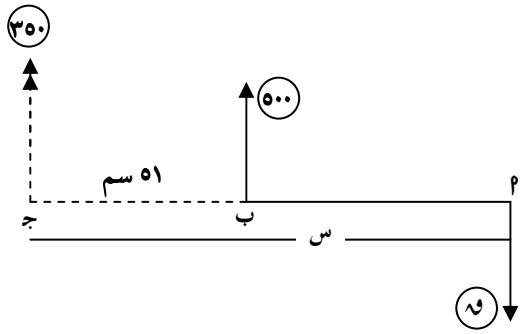
---

(٤) قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بعد ٥١ سم من المحصلة . أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى عمل القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان :

أولاً : فى اتجاه واحد . ثانياً : فى اتجاهين متضادين .

الحل

أولاً : القوة المعلومة والمحصلة فى اتجاه واحد



∵ المحصلة < القوة المعلومة وفى نفس اتجاهها

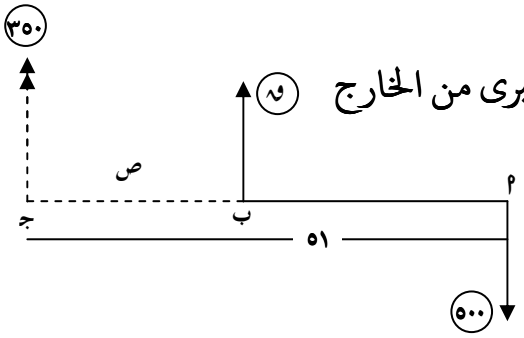
∴ القوتان متضادتان فى الاتجاه والمحصلة فى اتجاه القوة الكبرى من الخارج

∴ ٣٥٠ = ٥٠٠ − ق ومنها ق = ١٥٠ نيوتن

، ١٥٠ × س = ٥٠٠ × ٥١ ومنها س = ١٧٠ سم

∴ البعد بين القوتين = ١٧٠ – ٥١ = ١١٩ سم

أولاً : القوة المعلومة والمحصلة فى اتجاهين متضادين



∴ القوتان متضادتان فى الاتجاه والمحصلة فى اتجاه الكبرى من الخارج

∴ ق – ٥٠٠ = ٣٥٠ ومنها ق = ٨٥٠ نيوتن

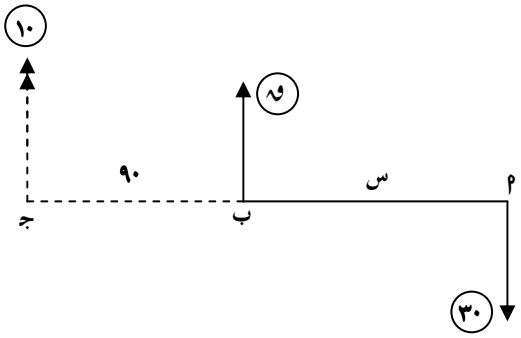
، ٥٠٠ × ٥١ = ٨٥٠ ص ومنها ص = ٣٠ سم

∴ البعد بين القوتين = ٥١ – ٣٠ = ٢١ سم

---

(٥) قوتان متوازيتان صغراهما ٣٠ نيوتن وتؤثر فى الطرف أ من قضيب خفيف $\overline{أ ب}$ والكبرى تؤثر فى الطرف ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم . فما طول القضيب .

الحل



∵ المحصلة > كل من القوتين

∴ القوتان متضادتان فى الاتجاه

المحصلة فى اتجاه القوة ق من الخارج

١٠ = ق – ٣٠ ومنها ق = ٤٠ نيوتن

، ٤٠ × ٩٠ = ٣٠ × (س + ٩٠)

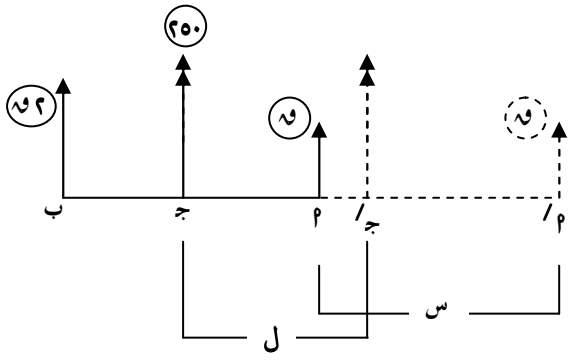
∴ ٣٦٠ = ٣ س + ٢٧٠ ∴ ٣ س = ٩٠ ومنها س = ٣٠ سم

طول القضيب = البعد بين القوتين = ٣٠ سم .

---

(٦) قوتان متوازيتان وفى اتجاه واحد مقدارهما ق ، ٢ ق تؤثران فى النقطتين أ ، ب على الترتيب . فإذا تحركت القوة ق بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها س على الشعاع $\overleftarrow{ب أ}$ فأثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٣}$ س فى نفس الاتجاه .

الحل



نفرض أن المسافة التى تتحركها المحصلة = ل سم

الحالة الأولى :

ق × أ ج = ٢ ق × ب ج

أ ج = ٢ ب ج ..... (١)

الحالة الثانية :

ق × أ / جـ / = ٢ ق × ب جـ /

∴ س - أ جـ / = ٢ (جـ جـ / + ب جـ)

س - (ل - أ جـ) = ٢ (ل + ب جـ)

س - ل + أ جـ = ٢ ل + ٢ ب جـ

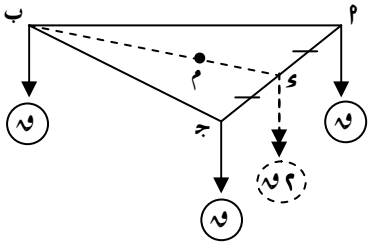
س - ل + ٢ ب جـ = ٢ ل + ٢ ب جـ

∴ ٣ ل = س ومنها ل = $\frac{١}{٣}$ س

---

(٧) أ ب جـ مثلث ، تؤثر عند رءوسه أ ، ب ، جـ ثلاث قوى متساوية ومتوازية وفى اتجاه واحد . أثبت أن محصلة هذه القوى تمر بنقطة تلاقى متوسطات المثلث .

الحل



محصلة القوتين ق ، ق المتوازيتين المؤثرتين فى أ ، جـ

تساوى ٢ ق وتؤثر فى ء منتصف $\overline{أ جـ}$

∴ مجموعة القوى الثلاث تؤول إلى قوتين هما :

ق عند جـ ، ٢ ق عند ء وفى نفس الاتجاه

بفرض أن محصلة هاتين القوتين تؤثر فى نقطة م

حيث : ٢ ق × ء م = ق × ب م

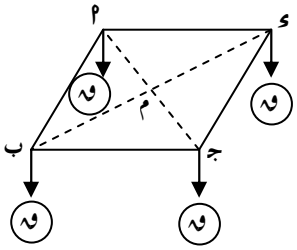
∴ ء م : ب م = ١ : ٢ ولكن $\overline{ب ء}$ مستقيم متوسط ، م تقسمه بنسبة ١ : ٢

∴ المحصلة تمر بالنقطة م نقطة تلاقى متوسطات المثلث .

---

(٨) أ ب جـ ء مربع ، تؤثر فى رءوسه أ ، ب ، جـ ، ء أربع قوى متساوية ومتوازية وفى اتجاه واحد . أثبت أن محصلة هذه القوى الأربع تمر بنقطة تقاطع قطرى المربع .

الحل



محصلة القوتين عند أ ، جـ = ٢ ق وتؤثر فى م منتصف $\overline{أ جـ}$

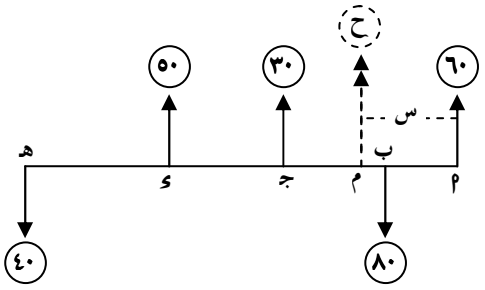
محصلة القوتين عند ب ، ء = ٢ ق وتؤثر فى م منتصف $\overline{ب ء}$

∴ القوى الأربع تؤول إلى قوتين ٢ ق ، ٢ ق وتؤثران فى م

∴ محصلة القوى الأربع = ٤ ق وتؤثر فى م ملتقى القطرين

(٩) أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم ، جـ ء = ٨ سم ، ء هـ = ١٠ سم . أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث كجم فى النقط أ ، جـ ، ء ، ب ، هـ على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overline{أ هـ}$ بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الاتجاه ، والقوتان الأخيرتان فى الاتجاه المضاد . عيّن محصلة المجموعة .

الحل



المحصلة = (٦٠ + ٣٠ + ٥٠) − (٨٠ + ٤٠)

= ٢٠ ث كجم لأعلى

، نفرض أن المحصلة تقطع $\overline{أ هـ}$ فى م على بعد س من أ

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

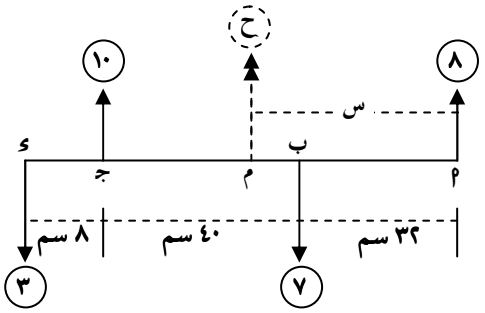
∴ ٨٠ × ٤ − ٣٠ × ١٠ − ٥٠ × ١٨ + ٤٠ × ٢٨ = − ٢٠ × س

∴ ٢٠ س = − ٢٤٠ ∴ س = − ١٢

أى أن المحصلة تعمل فى نقطة م ∋ $\overleftarrow{هـ أ}$ وتبعد عن أ بمقدار ١٢ سم .

(١٠) أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث أ ب = ٣٢ سم ، ب جـ = ٤٠ سم ، جـ ء = ٨ سم . أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى أ ، جـ وأثرت فى ب ، ء القوتان ٧ ، ٣ نيوتن فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين المؤثرتين فى أ ، جـ عيّن محصلة هذه المجموعة من القوى وبُعد نقطة تقاطع خط عملها مع أ ء عن نقطة أ .

الحل



المحصلة = (٨ + ١٠) − (٧ + ٣) = ٨ نيوتن لأعلى

نفرض أن المحصلة تقطع $\overline{أ ء}$ فى م حيث أ م = س سم

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

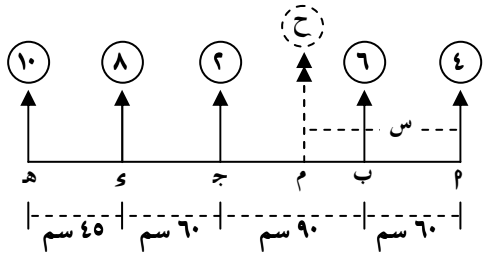
∴ ٧ × ٣٢ − ١٠ × ٧٢ + ٣ × ٨٠ = − ٨ × س

∴ − ٨ س = − ٢٥٦ ∴ س = ٣٢

أى أن المحصلة تبعد عن أ بمقدار ٣٢ سم أى تعمل فى النقطة ب .

(١١) خمس قوى متوازية متحدة الاتجاه مقاديرها ٤ ، ٦ ، ٢ ، ٨ ، ١٠ نيوتن تؤثر فى النقط أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ الواقعة على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى . أوجد بُعد نقطة تأثير محصلة هذه القوى عن أ علماً بأن أ ب = جـ ء = ٦٠ سم ، ب جـ = ٢ ء هـ = ٩٠ سم .

الحل



المحصلة = ٤ + ٦ + ٢ + ٨ + ١٠ = ٣٠ نيوتن لأعلى

نفرض أن المحصلة تقطع $\overline{أ هـ}$ فى م حيث أ م = س سم

∵ مجموع عزوم القوى حول أ = عزم المحصلة حول أ

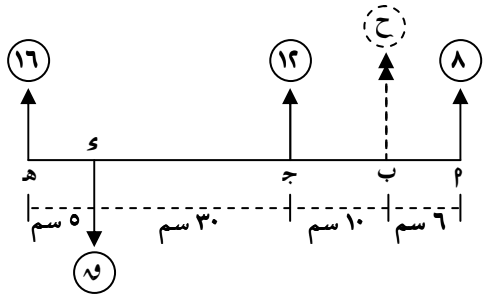
∴ − ٦ × ٦٠ − ٢ × ١٥٠ − ٨ × ٢١٠ − ١٠ × ٢٥٥ = − ٣٠ × س

∴ ٣ س = ٤٨٩ ومنها س = ١٦٣ سم

---

(١٢) أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ خمس نقط تقع على مستقيم واحد حيث ٥ أ ب = ٣ ب جـ = جـ ء = ٦ ء هـ = ٣٠ سم . أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٨ ، ١٢ ، ١٦ ، ق نيوتن فى النقط أ ، جـ ، هـ ، ء على الترتيب وفى اتجاه عمودى على $\overline{أ هـ}$ بحيث كانت القوى الثلاث الأولى فى اتجاه واحد والقوة ق فى الاتجاه المضاد . فإذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر فى نقطة ب . أوجد ق .

الحل



∵ المحصلة تمر بنقطة ب

∴ مجموع عزوم القوى حول ب = صفر

∴ ٨ × ٦ − ١٢ × ١٠ + ق × ٤٠ − ١٦ × ٤٥ = ٠

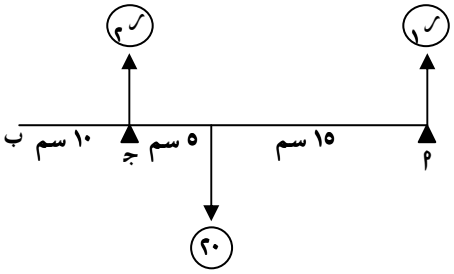
∴ ٤٠ ق = ٧٩٢

ومنها ق = ١٩,٨ نيوتن .

تمارين (٤ – ٢)

(١) ترتكز ساق من الحديد طولها ٣٠ سم ووزنها ٢٠ نيوتن (يؤثر عند منتصف الساق) فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند أحد الطرفين والآخر على بُعد ١٠ سم من الطرف الآخر . أوجد رد فعل كل من الحاملين على الساق .

الحل



∵ الساق متزنه ∴ ر١ + رم = ٢٠ ..... (١)

ج م = صفر

٢٠ × ١٥ – رم × ٢٠ = ٠

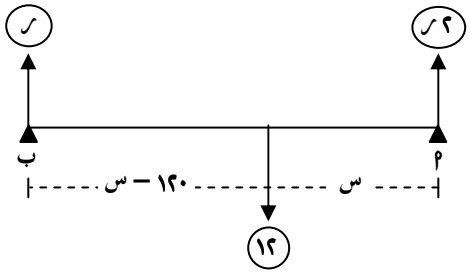
∴ رم = ١٥ نيوتن

بالتعويض فى (١) ∴ ر١ = ٥ نيوتن

---

(٢) ساق مهملة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين . عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساوياً لضعف قيمته عند الطرف الثانى .

الحل



نفرض أن نقطة تعليق الثقل تبعد س سم عن الطرف م

∵ المجموعة متزنه :

∴ ح = ٠ ، ج م = صفر

∴ ٢ ر + ر = ١٢

∴ ٣ ر = ١٢ ومنها ر = ٤ ث كجم

، ١٢ س = ر (١٢٠ – س)

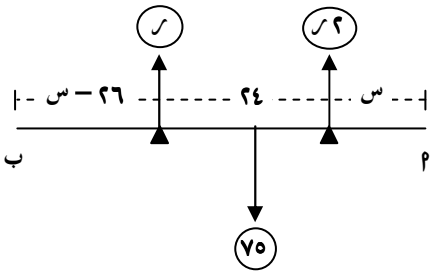
∴ ١٢ س = ٤ (١٢٠ – س)

∴ ٣ س = ١٢٠ – س

∴ ٤ س = ١٢٠ ومنها س = ٣٠ سم .

(٣) ساق من الحديد طولها ٥٠ سم ووزنها ٧٥ نيوتن يؤثر عند منتصفها ، ترتكز فى وضع أفقى على حاملين البعد بينهما ٢٤ سم ، فإذا كان الضغط على أحد الطرفين ضعف الضغط على الحامل الآخر . أوجد بُعد كل من الحاملين عن طرف الساق القريب منه .

الحل



∵ المجموعة متزنه :

∴ ح = ٠ ، ج$_{م}$ = صفر

∴ ٢ ر + ر = ٧٥ ومنها ر = ٢٥ نيوتن

∴ – ٢ ر × س + ٧٥ × ٢٥ – ر × (٢٤ + س) = ٠

∴ – ٢ × ٢٥ س + ٧٥ × ٢٥ – ٢٥ × ٢٤ – ٢٥ س = ٠

∴ ٣ س = ٥١ ومنها س = ١٧ سم .

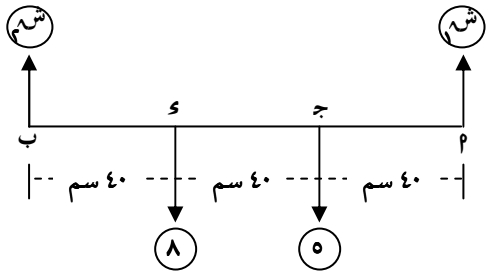
أى أن أحد الحاملين يبعد ١٧ سم عن الطرف القريب منه والحامل الآخر يبعد (٢٦ – ١٧)

أى ٩ سم عن الطرف الآخر .

---

(٤) عُلق قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه ، ثم عُلق فيه ثقلان مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن عند نقطتى تثليثه . أوجد الشد فى كل من الخيطين .

الحل



∵ المجموعة متزنه

∴ ح = ٠ ، ج$_{م}$ = صفر

∴ ش$_{١}$ + ش$_{م}$ = ٥ + ٨ = ١٣ ..... (١)

، ٥ × ٤٠ + ٨ × ٨٠ – ش$_{م}$ × ١٢٠ = ٠

ومنها ش$_{م}$ = ٧ نيوتن

بالتعويض فى (١) :

∴ ش$_{١}$ + ٧ = ١٣ ومنها ش$_{١}$ = ٦ نيوتن .

---

(٥) يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند نقطتى تثليثه وعُلق من طرفيه ثقلان مقدارهما ٢٠ ، ٣٠ نيوتن عيّن الضغط الواقع على كل من الخيطين .

الحل

∵ المجموعة متزنه

∴ ح = ٠ ، ج = صفر

∴ ر١ + ر٢ = ٥٠ ..... (١)

، - ٢٠ × ٣٠ - ر٢ × ٣٠ + ٣٠ × ٦٠ = ٠

∴ ر٢ = ٤٠ نيوتن ∴ الضغط على الحامل ج هو ٤٠ نيوتن لأسفل

ومن (١) ر١ = ١٠ نيوتن ∴ الضغط على الحامل ء هو ١٠ نيوتن لأسفل

(٦) $\overline{أ ب}$ مسطرة طولها ٥٠ سم ووزنها ٥٠٠ ث جم يؤثر فى نقطة منتصفها . علقت المسطرة فى وضع أفقى من خيطين رأسيين عند طرفيها وعُلق فيها ثقلان أحدهما ١,٥ ث كجم على بُعد ١٠ سم من أ ومقدار الآخر ٢ ث كجم على بُعد ١٥ سم من ب . عيّن الشد فى كل خيط .

الحل

∵ المجموعة متزنه

∴ ح = ٠ ، ج = صفر

∴ ش١ + ش٢ = ٤ ..... (١)

، - ١,٥ × ١٠ - ٠,٥ × ٢٥ - ٢ × ٣٥ + ش٢ × ٥٠ = ٠

∴ ش٢ = ١,٩٥ ث كجم

بالتعويض فى (١) : ∴ ش١ + ١,٩٥ = ٤ ومنها ش١ = ٢,٠٥ ث كجم

(٧) قضيب منتظم $\overline{أ ب}$ طوله ٨٠ سم ووزنه ٤ ث كجم يؤثر فى نقطة منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حاملين أحدهما على بُعد ١٠ سم من أ والثانى على بُعد ٢٠ سم من ب وعُلق فى القضيب ثقلان مقدارهما ٣ ، ٥ ث كجم على بُعدى ٢٠ سم من أ ، ٣٠ سم من ب على الترتيب . عيّن الضغط على كل من الحاملين .

الحل

∵ المجموعة متزنه

∴ ح = ٠ ، ج = صفر

∴ ر١ + ر٢ = ١٢ ..... (١)

، ٣ × ١٠ + ٤ × ٣٠ + ٥ × ٤٠ − ر$_{م}$ × ٥٠ = ٠

∴ ٥٠ ر$_{م}$ = ٣٥٠ ومنها ر$_{م}$ = ٥ ث كجم

بالتعويض فى (١) : ∴ ر$_{١}$ + ٥ = ١٢ ومنها ر$_{١}$ = ٧ ث كجم

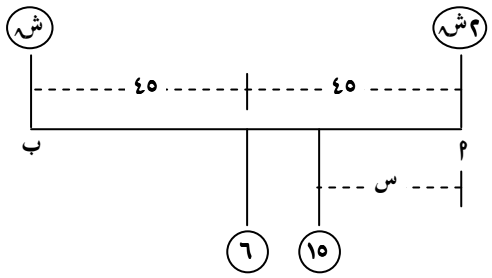
∴ الضغط على الحامل جـ = ٧ ث كجم لأسفل ، الضغط على الحامل ء = ٥ ث كجم لأسفل

---

(٨) $\overline{أ ب}$ مسطرة طولها ٩٠ سم ووزنها ٦ نيوتن يؤثر فى نقطة منتصفها . عُلقت فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيها . أين يُعلق ثقل مقداره ١٥ نيوتن حتى يكون الشد فى أحد الخيطين مساوياً ضعف قيمته فى الخيط الآخر .

الحل

نفرض أن الثقل ١٥ نيوتن يُعلق على بعد س من أ



∵ المجموعة متزنه :

∴ ح = ٠ ، جـ$_{م}$ = صفر

∴ ٢ ش + ش = ٢١ ومنها ش = ٧ نيوتن

، ١٥ × س + ٦ × ٤٥ − ش × ٩٠ = ٠

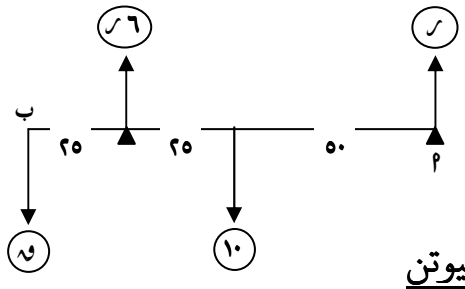
∴ ١٥ س + ٦ × ٤٥ − ٧ × ٩٠ = ٠

∴ ١٥ س = ٣٦٠ ومنها س = ٢٤ سم .

---

(٩) يرتكز قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند أ والآخر على بُعد ٢٥ سم من ب . ماهو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند الطرف ب للقضيب بحيث تصبح قيمة رد الفعل عند الحامل القريب من هذا الطرف مساوياً ستة أمثال قيمتها عند أ وماهما قيمتى رد الفعل عندئذ ؟

الحل



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، جـ$_{ب}$ = صفر

∴ ر + ٦ ر = ١٠ + ق ∴ ق = ٧ ر − ١٠ ..... (١)

، ر × ١٠٠ − ١٠ × ٥٠ + ٦ ر × ٢٥ = ٠

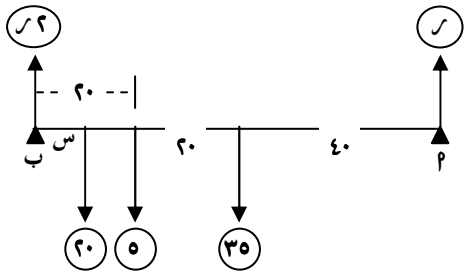
ومنها ر = ٢ نيوتن ، بالتعويض فى (١) ∴ ق = ٤ نيوتن

رد الفعل عند أ = ٢ نيوتن ، رد الفعل عند الحامل القريب = ١٢ نيوتن .

(١٠) يرتكز قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ٨٠ سم ووزنه ٣٥ نيوتن ويؤثر فى منتصفه فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه ويحمل ثقلاً مقداره ٥ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠ سم عن ب . فى أى نقطة من القضيب يجب تعليق ثقل مقداره ٢٠ نيوتن حتى تصبح قيمة رد الفعل عند ب مساوية ضعف قيمتها عند أ ؟ وماهى قيم ردى الفعل عندئذ ؟

الحل

نفرض أن الثقل ٢٠ نيوتن يُعلق على بُعد س من ب



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{ب}$ = صفر

∴ ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ = ٦٠ ∴ ر$_{١}$ = ٢٠ نيوتن

، ر$_{٢}$ × ٨٠ − ٣٥ × ٤٠ − ٥ × ٢٠ − ٢٠ س = ٠

∴ ٢٠ × ٨٠ − ٣٥ × ٤٠ − ٥ × ٢٠ − ٢٠ س = ٠

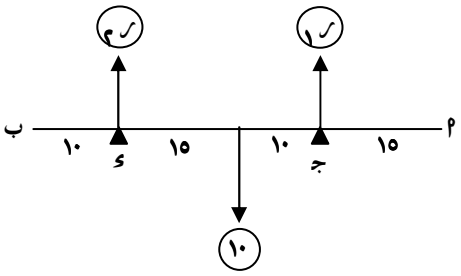
∴ س = ٥ سم

رد الفعل عند الحامل أ = ٢٠ نيوتن ، رد الفعل عند الحامل ب = ٤٠ نيوتن

---

(١١) قضيب $\overline{أ ب}$ طوله ٥٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حاملين أحدهما يبعد ١٥ سم عند أ والآخر يبعد ١٠ سم عن ب . أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين . ماهو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب حتى يكون القضيب على وشك الدوران ؟ وماهى قيمة الضغط على الحامل عندئذ ؟

الحل



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{جـ}$ = صفر

∴ ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ = ١٠ ..... (١)

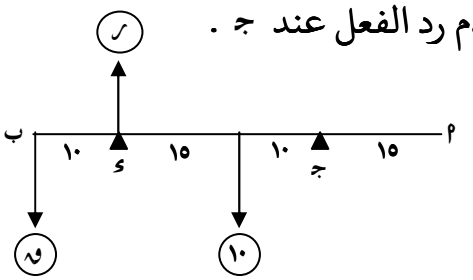
، ١٠ × ١٠ − ر$_{٢}$ × ٢٥ = ٠ ومنها ر$_{٢}$ = ٤ نيوتن

بالتعويض فى (١) ∴ ر$_{١}$ = ٦ نيوتن

الضغط الواقع على الحامل جـ = ٦ نيوتن لأسفل ، الضغط الواقع على الحامل ء = ٢ نيوتن لأسفل

، عندما يصبح القضيب على وشك الدوران حول ء ينعدم رد الفعل عند جـ .

(لاحظ أن رد الفعل عند ء يختلف عن الحالة السابقة)



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{ء}$ = صفر

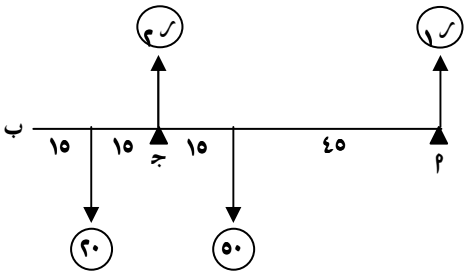
∴ ر = ١٠ + هـ ..... (١)

، - ١٠ × ١٥ + هـ × ١٠ = ٠ ∴ هـ = ١٥ نيوتن

ومن (١) ر = ٢٥ نيوتن . أى أن الضغط على الحامل ء = ٢٥ نيوتن لأسفل .

(١٢) يرتكز قضيب أ ب طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين . أحدهما عند الطرف أ والآخر عند نقطة تبعد ٣٠ سم عن ب ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن ب . عيّن قيمة الضغط على كل من الحاملين وأوجد أيضاً مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وماهى قيمة الضغط على الحامل عندئذ ؟

الحل



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج م = صفر

∴ ر١ + رم = ٧٠ ..... (١)

، ٥٠ × ٤٥ + ٢٠ × ٧٥ - رم × ٦٠ = ٠

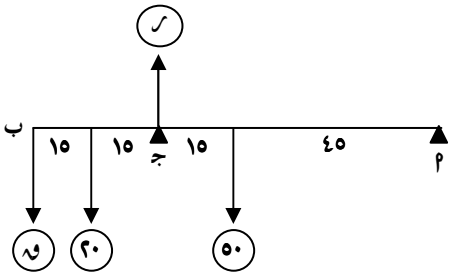
∴ ٦٠ رم = ٣٧٥٠ ومنها رم = ٦٢,٥ نيوتن

ومن (١) ∴ ر١ = ٧,٥ نيوتن

الضغط على الحامل أ = ٧,٥ نيوتن لأسفل ، الضغط على الحامل جـ = ٦٢,٥ نيوتن لأسفل

، عندما يصبح القضيب على وشك الدوران حول جـ ينعدم رد الفعل عند أ .

(لاحظ أن رد الفعل عند جـ يختلف عن الحالة السابقة)



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج جـ = صفر

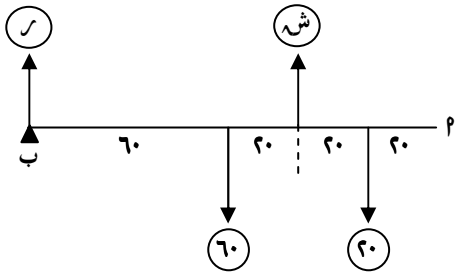
∴ ر = ٧٠ + هـ ..... (١)

، - ٥٠ × ١٥ + ٢٠ × ١٥ + هـ × ٣٠ = ٠ ∴ هـ = ١٥ نيوتن

ومن (١) ر = ٨٥ نيوتن . أى أن الضغط على الحامل جـ = ٨٥ نيوتن لأسفل .

(١٣) $\overline{أ ب}$ قضيب طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه ، يرتكز القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ويُحفظ القضيب فى حالة توازن بواسطة خيط رأسى مثبت من نقطة فيه تبعد ٤٠ سم من الطرف أ ويحمل ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٢٠ سم من أ . عيّن قيمة كل من الشد فى الخيط والضغط على الحامل . وماهو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه فى الطرف أ حتى يصبح على وشك الانفصال عن الحامل وماهى قيمة الشد فى الخيط عندئذ ؟

الحل



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{ب}$ = صفر

∴ شـ + ر = ٨٠ ..... (١)

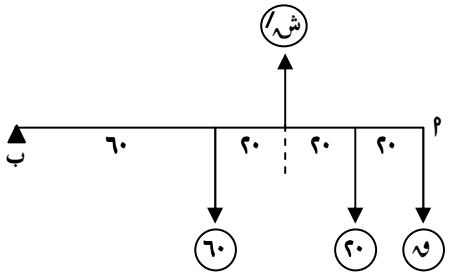
، ٢٠ × ١٠٠ + شـ × ٨٠ − ٦٠ × ٦٠ = ٠

∴ ٨٠ شـ = ٥٦٠٠ ∴ شـ = ٧٠ نيوتن .

من (١) ∴ ر = ١٠ نيوتن ، الضغط على الحامل ب = ١٠ نيوتن لأسفل

عندما يصبح القضيب على وشك الانفصال عن ب ينعدم رد الفعل

(لاحظ أن الشد يختلف عن الحالة السابقة)



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{أ}$ = صفر

∴ شـ/ = و + ٨٠ ..... (١)

، ٢٠ × ٢٠ − شـ/ × ٤٠ + ٦٠ × ٦٠ = ٠

∴ ٤٠ شـ/ = ٤٠٠٠ ومنها شـ/ = ١٠٠ نيوتن لأعلى

من (١) : ∴ و = ٢٠ نيوتن .

---

(١٤) قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠٠ ث جم يرتكز على حاملين جـ ، ء المسافة بينهما ٦٠ سم حيث أ جـ = ٢٥ سم عُلق فى القضيب ثقل عند هـ حيث أ هـ = ٣٠ سم . أوجد :

أولاً : رد الفعل عند كل من جـ ، ء إذا كان الثقل المعلق عند هـ = ٢٠٠ جم .

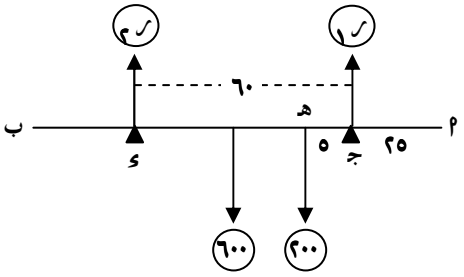
ثانياً : مقدار الثقل المعلق عند هـ إذا كان رد الفعل عند جـ ضعف رد الفعل عند ء .

الحل

أولاً : ∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{جـ}$ = صفر

∴ ر$_{١}$ + ر$_{٢}$ = ٨٠٠ ..... (١)

، ٢٠٠ × ٥ + ٦٠٠ × ٣٥ − ر$_م$ × ٦٠ = ٠

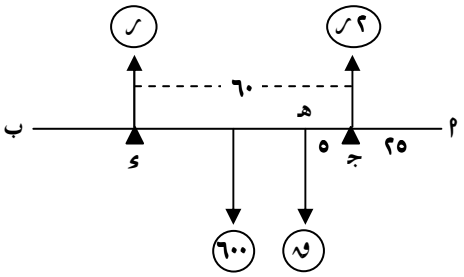


∴ ٦٠ ر$_م$ = ٢٢٠٠٠ ومنها ر$_م$ = ٣٦٦ $\frac{٢}{٣}$ ث جم

من (١) : ∴ ر$_١$ = ٤٣٣ $\frac{١}{٣}$ ث جم

ثانياً :

∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_هـ$ = صفر



٣ ر = ٦٠٠ + ف٨ ..... (١)

، ٢ ر × ٥ + ٦٠٠ × ٣٠ − ر × ٥٥ = ٠

∴ ٤٥ ر = ١٨٠٠٠ ومنها ر = ٤٠٠ ث جم

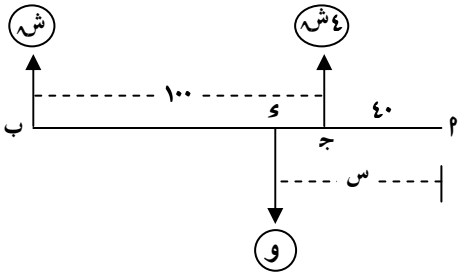
من (١) : ∴ ف٨ = ٣ × ٤٠٠ − ٦٠٠ = ٦٠٠ ث جم .

---

(١٥) أ ب قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقياً بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠ سم من أ ، فإذا كان الشد فى الخيط الأول $\frac{١}{٤}$ الشد فى الخيط الثانى ، فعيّن نقطة تأثير وزن القضيب . وإذا عُلم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من أ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب .

الحل

∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_م$ = صفر



∴ ٤ شـ + شـ = و

∴ ٥ شـ = و ..... (١)

، − ٤ شـ × ٤٠ + و × س − شـ × ١٤٠ = ٠

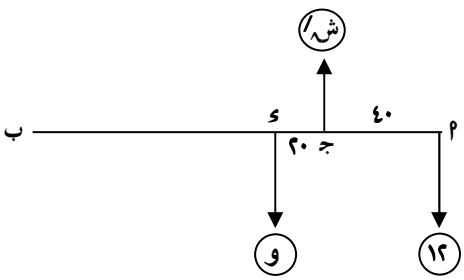
∴ − ١٦٠ شـ + ٥ شـ × س − ١٤٠ شـ = ٠ وبالقسمة على شـ

∴ − ١٦٠ + ٥ س − ١٤٠ = ٠ ومنها س = ٦٠ سم

أى أن نقطة تأثير القضيب تبعد عن الطرف أ بمقدار ٦٠ سم .

عندما يكون القضيب على وشك إختلال التوازن

ينعدم الشد عند الطرف ب

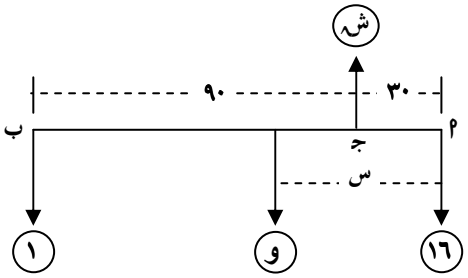


∵ المجموعة متزنه : ∴ ج$_جـ$ = صفر

∴ و × ٤٠ − ١٢ × ٤٠ = ٠ ومنها و = ٢٤ نيوتن .

(١٦) $\overline{أ ب}$ قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ، إذا ثبت عند طرفه ب ثقل قدره ١ نيوتن وعُلق من أ ثقل قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن فى هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم من أ ، وإذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن عند نقطة تبعد ٤٠ سم من أ أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره .

الحل

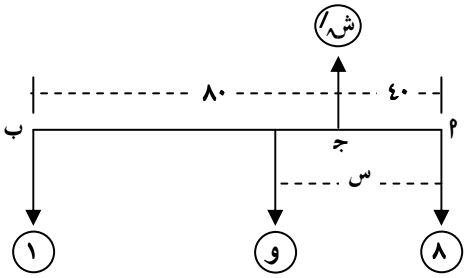


الحالة الأولى :

∵ المجموعة متزنه ∴ ج$_{جـ}$ = صفر

– ١٦ × ٣٠ + و × (س – ٣٠) + ١ × ٩٠ = ٠

∴ و (س – ٣٠) = ٣٩٠ ..... (١)



الحالة الثانية :

∵ المجموعة متزنه ∴ ج$_{جـ}$ = صفر

– ٨ × ٤٠ + و × (س – ٤٠) + ١ × ٨٠ = ٠

∴ و (س – ٤٠) = ٢٤٠ ..... (٢)

بقسمة (١) على (٢) ∴ $\frac{\text{س} - ٣٠}{\text{س} - ٤٠} = \frac{٣٩}{٢٤}$

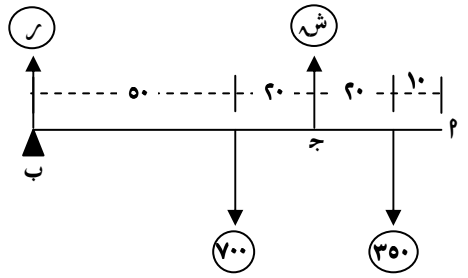
∴ ٢٤ (س – ٣٠) = ٣٩ (س – ٤٠) ومنها س = ٥٦ سم

من (١) ∴ و × ١٦ = ٣٩٠ ومنها و = ١٥ نيوتن

---

(١٧) $\overline{أ ب}$ قضيب طوله متر واحد ووزنه ٧٠٠ ثقل جرام (يؤثر عند منتصفه) يرتكز القضيب على حامل عند طرفه ب وحُفظ فى حالة توازن فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف رأسى مثبت فى نقطة على القضيب تبعد عن طرفه أ بمقدار ٣٠ سم ويحمل ثقلاً مقداره ٣٥٠ ثقل جرام من نقطة تبعد ١٠ سم عن أ . أوجد كلاً من الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وإذا عُلق من أ ثقلاً جعل القضيب على وشك الانفصال عن الحامل فأوجد مقدار هذا الثقل وقيمة الشد فى الخيط عندئذ .

الحل



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، ج$_{جـ}$ = صفر

∴ شـ + ر = ١٠٥٠ ..... (١)

، $-٣٥٠ \times ٢٠ + ٧٠٠ \times ٢٠ - ر \times ٧٠ = ٠$

∴ $٧ ر = ٧٠٠$ ومنها $ر = ١٠٠$ ث جم

من (١) : ∴ $ش_{هـ} = ١٠٥٠ - ١٠٠ = ٩٥٠$ ث جم

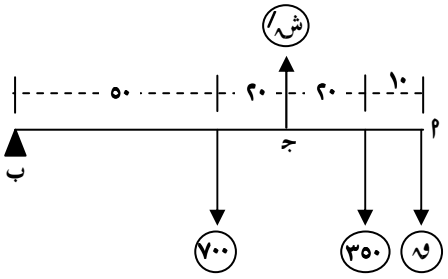
∴ الشد فى الخيط = ٩٥٠ ث جم ، الضغط على الحامل = ١٠٠ ث جم لأسفل

الحالة الثانية :

∵ القضيب على وشك الانفصال عن الحامل

∴ رد الفعل عند ب ينعدم

(لاحظ أن قيمة الشد فى الخيط تتغير)



∵ المجموعة متزنه : ∴ ح = ٠ ، $ج_{جـ}$ = صفر

∴ $ش/_{هـ} = ٧٠٠ + ٣٥٠ + و_{هـ}$

∴ $ش/_{هـ} = ١٠٥٠ + و_{هـ}$ ..... (١)

، $- و_{هـ} \times ٣٠ - ٣٥٠ \times ٢٠ + ٧٠٠ \times ٢٠ = ٠$

∴ $٣ و_{هـ} = ٧٠٠$ ∴ $و_{هـ} = ٢٣٣ \frac{١}{٣}$ ث جم

من (١) : ∴ $ش/_{هـ} = ١٢٨٣ \frac{١}{٣}$ ث جم .

الفصل الخامس : الإزدواجات

تمارين (٥ - ١)

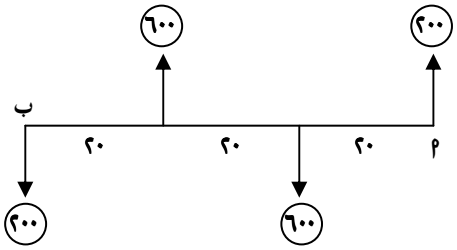
(١) $\overline{أ ب}$ قضيب مهمل الوزن وطوله ٦٠ سم . أثرت فيه أربع قوى متوازية وعمودية عليه عند النقط وفى الاتجاهات المبينة على الأشكال التالية . وكانت مقادير القوى المبينة منسوبة كلها إلى نفس وحدات قياس مقدار القوة .

أثبت أن الجسم يتزن فى الحالتين (أ ، ب) ولايتزن فى الحالة (جـ) .

(ملحوظة : الأشكال موضحة فى حل كل جزء)

الحل

الحالة (أ) :



شكل (أ)

القوتان (٤٠٠ ، ٤٠٠) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{١}$

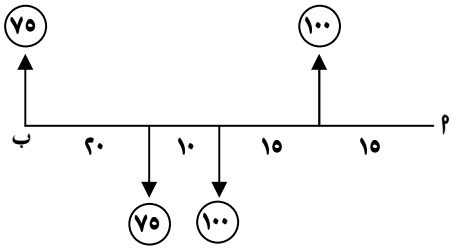
ج$_{١}$ = ٤٠٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠٠ وحدة عزم

، القوتان (٦٠٠ ، ٦٠٠) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{٢}$

ج$_{٢}$ = - ٦٠٠ × ٤٠ = - ٢٤٠٠٠٠ وحدة عزم

∵ ج$_{١}$ + ج$_{٢}$ = ٠ ∴ الجسم متزن

الحالة (ب) :



شكل (ب)

القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{١}$

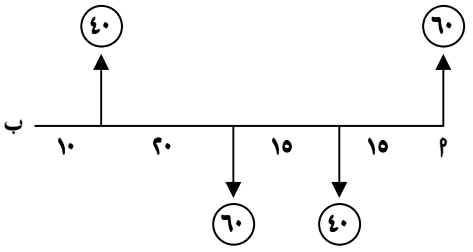
ج$_{١}$ = ١٠٠ × ١٥ = ١٥٠٠ وحدة عزم

، القوتان (٧٥ ، ٧٥) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{٢}$

ج$_{٢}$ = - ٧٥ × ٢٠ = ١٥٠٠ وحدة عزم

∵ ج$_{١}$ + ج$_{٢}$ = ٠ ∴ الجسم متزن

الحالة (جـ) :



شكل (جـ)

القوتان (٦٠ ، ٦٠) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{١}$

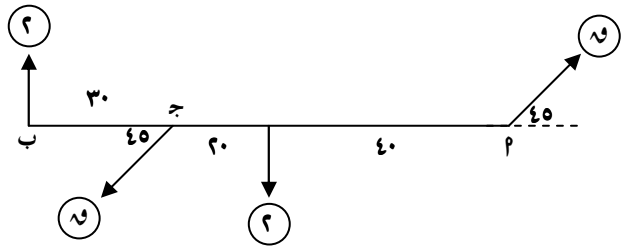
ج$_{١}$ = ٦٠ × ٣٠ = ١٨٠٠ وحدة عزم

، القوتان (٤٠ ، ٤٠) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{٢}$

ج$_{٢}$ = - ٤٠ × ٣٥ = ١٤٠٠ وحدة عزم

∵ ج$_{١}$ + ج$_{٢}$ = ١٨٠٠ - ١٤٠٠ = ٤٠٠ ≠ ٠ ∴ الازدواجان لا يتزنان .

(٢) أثر ازدواجان مستويان فى قضيب $\overline{أ ب}$ مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين ق ، ق ث كجم . والثانى من قوتين ٢ ، ٢ ث كجم وتؤثر عند النقط وفى الاتجاهات الموضحة على الرسم . عيّن قيمة ق التى تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الازدواجين .



الحل

القوتان (٢ ، ٢) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{١}$ = − ٢ × ٥٠ = − ١٠٠ ث كجم . سم

القوتان (ق، ق) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{٢}$ = ق × أ جـ جا ٤٥

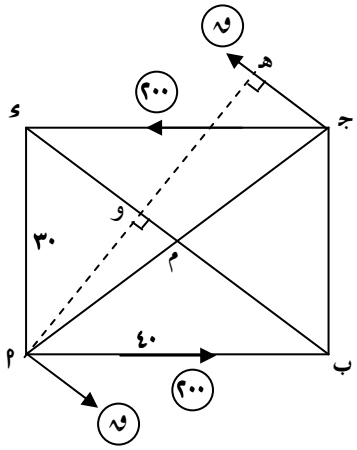
∵ الازدواجان متزنان ∴ ج$_{٢}$ = − ج$_{١}$

∴ ق × ٦٠ جا ٤٥ = ١٠٠ ومنها ق = $\frac{٥}{٣}$ √٢ ث كجم . سم

---

(٣) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٣٠ سم أثرت قوتان كل منهما ٢٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ وقوتان أخريان مقدار كل منهما ق ، ق عند أ ، جـ وتوازيان $\overleftarrow{ب ء}$. عيّن قيمة ق حتى يتكافأ الازدواجان الناتجان .

الحل



القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{١}$

ج$_{١}$ = ٢٠٠ × ٣٠ = ٦٠٠٠ نيوتن . سم

، القوتان (ق، ق) تكونان ازدواج عزمه = ج$_{٢}$

فى Δ أ ب ء القائم فى أ :

ب ء = ٥٠ سم ، أ و = $\frac{٣٠ \times ٤٠}{٥٠}$ = ٢٤ سم (إقليدس)

∴ أ هـ = ٢ أ و = ٤٨ سم (لأن $\overline{م و}$ // $\overline{جـ هـ}$ ، م منتصف $\overline{أ جـ}$ ⇐ و منتصف $\overline{أ هـ}$)

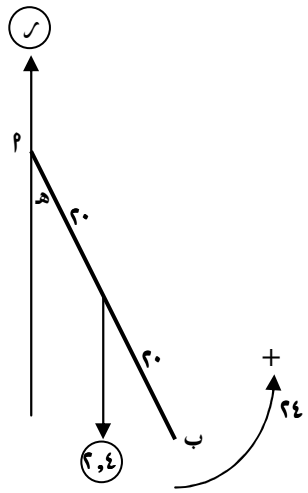
∴ ج$_{٢}$ = ق × ٤٨

∵ الازدواجان متكافئان ∴ ج$_{١}$ = ج$_{٢}$

∴ ٤٨ ق = ٦٠٠٠ ومنها ق = ١٢٥ نيوتن .

(٤) قضيب طوله ٤٠ سم ووزنه ٢,٤ ث كجم يؤثر عند منتصفه . يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستو رأسى حول مفصل ثابت عند طرفه . أثر على القضيب ازدواج معيار عزمه ٢٤ ث كجم . سم واتجاهه عمودى على المستوى الرأسى الذى يمكن للقضيب الدوران فيه . عيّن مقدار واتجاه رد فعل المفصل وزاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع الاتزان .

الحل



∵ المجموعة متزنه ، الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (ق ، ٢,٤) يكونان ازدواج عزمه = ج ١

∴ ر = ٢,٤ ث كجم رأسياً لأعلى

ولكن : ج ١ + ج ٢ = ٠ (من الاتزان)

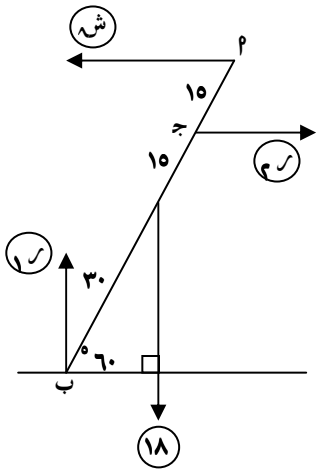
∴ – ٢,٤ × ٢٠ جا هـ + ٢٤ = ٠

∴ ٤٨ جا هـ = ٢٤ ∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠°

---

(٥) $\overline{أ ب}$ قضيب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه . يمكن للقضيب الدوران بسهولة فى مستو رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند النقطة جـ التى تبعد ١٥ سم عن أ فإذا استند القضيب بطرفه ب على نضد أفقى أملس وشُد الطرف أ أفقياً بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب . أوجد الشد فى الحبل ورد فعل المسمار علماً بأن القضيب يتزن فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° .

الحل



القوتان (١٨ ، ر ١) المتساويتان تكونان ازدواج عزمه = ج ١

∴ ج ١ = – ١٨ × ٣٠ جا ٣٠ = – ٢٧٠ نيوتن . سم

∵ الادواج لا يتزن إلا مع ازدواج

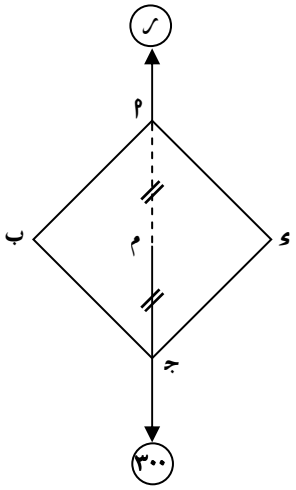
∴ القوتان (ش ، ر ٢) يكونان ازدواج عزمه = ٢٧٠

∴ ش × ١٥ جا ٦٠ = ٢٧٠

∴ ش = ر ٢ = ١٢ $\sqrt{٣}$ نيوتن .

(٦) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠ سم ووزنها ٣٠٠ ث جم ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين . ثُقبت الصفيحة ثقباً صغيراً بالقرب من أ وعُلقت من هذا الثقب فى مسمار أفقى رفيع بحيث اتزنت فى مستو رأسى . أوجد الضغط على المسمار . وإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٧٥٠٠ ث جم . سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة ، أثبت أن الضغط الواقع على المسمار لا يتغير ثم أوجد ميل القطر $\overline{أ جـ}$ على الرأسى فى وضع الاتزان .

الحل



∵ الصفيحة متزنه

∴ ر = ٣٠٠ ث جم

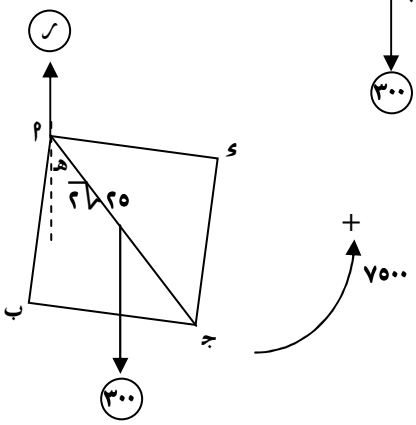
∴ الضغط على المسمار = ٣٠٠ ث جم لأسفل

، ∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (٣٠٠ ، ر) تكونان ازدواج عزمه ج أ

∴ ر = ٣٠٠ ث جم

∴ الضغط على المسمار لا يتغير



، ج أ = − ٧٥٠٠ ث جم . سم

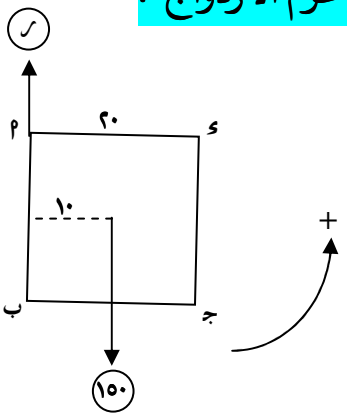
∴ − ٣٠٠ × ٢٥ $\sqrt{٢}$ جا هـ = − ٧٥٠٠

∴ جا هـ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ هـ = ٤٥°

(لاحظ فى هذه الحالة أن $\overline{أ ء}$ يكون رأسياً)

(٧) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٢٠ سم ووزنها ١٥٠ ث جم ويؤثر فى نقطة تلاقى القطرين . عُلقت الصفيحة على مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء فاتزنت فى مستو رأسى . أوجد الضغط على المسمار . وإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عمودياً على مستويها فاتزنت فى وضع فيه $\overline{أ ء}$ أفقى . أوجد معيار عزم الازدواج .

الحل



كما فى السؤال السابق : الضغط = ١٥٠ ث جم لأسفل

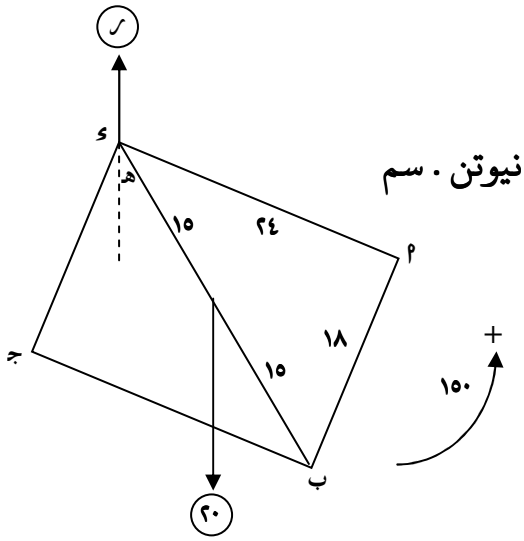
عزم الازدواج = ١٥٠ × ١٠ = ١٥٠٠ نيوتن . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ معيار عزم الازدواج المطلوب = ١٥٠٠ نيوتن . سم

(٨) أ ب جـ ء صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه أ ب = ١٨ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاق القطرين . عُلقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ء بحيث كان مستواها رأسياً . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٥٠ نيوتن . سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل $\overline{ء ب}$ على الرأسى فى وضع الاتزان .

الحل



∵ المجموعة متزنه ، الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (٢٠ ، ر) يكونان ازدواج عزمه = ١٥٠ نيوتن . سم

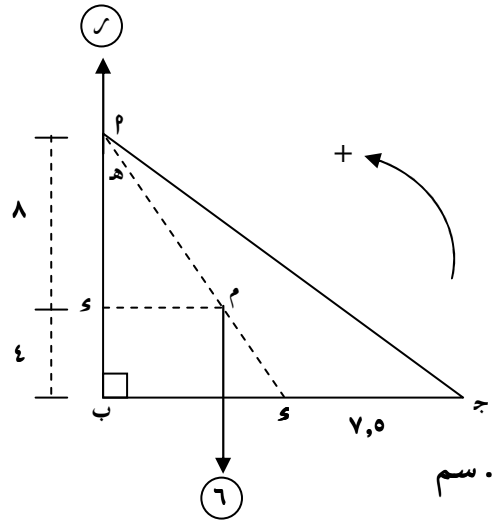
∴ ر = ٢٠ نيوتن

، ٢٠ × ١٥ جا هـ = ١٥٠

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠° أ، ١٥٠°

(٩) أ ب جـ صفيحة رقيقة على هيئة مثلث قائم الزاوية فى ب ، فيه أ ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٥ سم ووزنها ٦ نيوتن ويؤثر فى نقطة تلاق متوسطات المثلث . عُلقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسياً . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عمودى على مستويها بحيث اتزنت فى وضع كان فيه $\overline{أ ب}$ رأسياً . أوجد معيار عزم الازدواج .

الحل



أ ء = $\sqrt{(١٢)^٢ + (٧,٥)^٢}$ = $\frac{٣}{٤}$ $\sqrt{٨٩}$

أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ ء = $\sqrt{٨٩}$ ∴ م ء = ٥

∵ المجموعة متزنه والازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

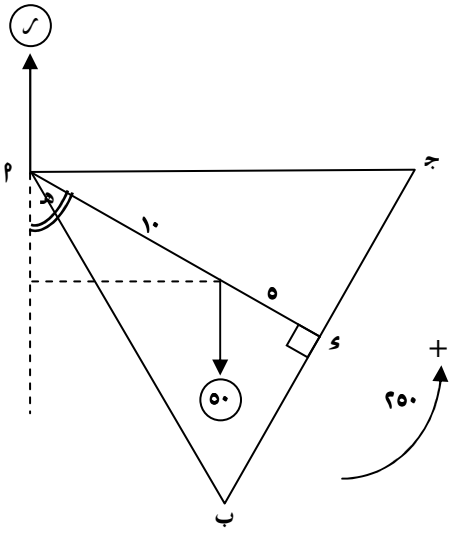
∴ القوتان (٢٠ ، ر) يكونان ازدواج عزمه = ج ١

∴ ج ١ = − ٦ × م ء

∴ عزم الازدواج المطلوب = − ج ١ = ٦ × ٥ = ٣٠ نيوتن . سم

∴ معيار عزم الازدواج = ٣٠ نيوتن . سم

(١٠) ﻫ ب جـ صفيحة رقيقة على هيئة مثلث متساوى الأضلاع ووزنها ٥٠ ث جم ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث . عُلقت الصفيحة فى مسمار أفقى رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس ﻫ بحيث كان مستواها رأسياً . أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٢٥٠ ث جم . سم واتجاهه عمودى على مستويها فاتزنت . أوجد ميل $\overline{\text{ﻫ ب}}$ على الأفقى إذا عُلم أن ارتفاع المثلث يساوى ١٥ سم .



الحل

∵ المجموعة متزنه والازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (٥٠ ، ر) تكونان ازدواج عزمه = - ٢٥٠

∴ ر = ٥٠ ث جم

، - ٢٥٠ = - ٥٠ × ١٠ جا هـ

∴ جا هـ = $\frac{١}{٢}$ ∴ هـ = ٣٠° أ، ١٥٠°

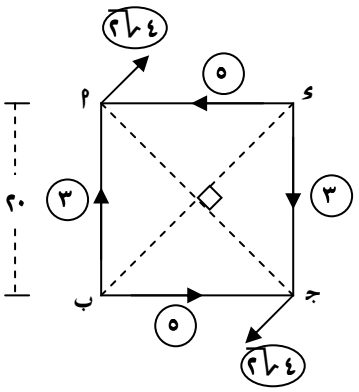
عندما هـ = ٣٠° ⇐ $\overline{\text{ﻫ ب}}$ رأسياً

عندما هـ = ١٥٠° ⇐ $\overline{\text{ﻫ ب}}$ يميل على الأفقى بزاوية ٣٠°

تمارين (٥ - ٢)

(١) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٢٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب . كما أثرت قوتان مقدار كل منهما $٤\sqrt{٢}$ ث كجم عند الرأسين أ ، جـ وفى الاتجاهين $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ على الترتيب . عيّن عزم الازدواج المحصل للمجموعة .

الحل



القوتان (٣ ، ٣) تكونان ازدواج عزمه $ج_١$

$\therefore ج_١ = -٣ \times ٢٠ = -٦٠$ ث كجم . سم

القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواج عزمه $ج_٢$

$\therefore ج_٢ = ٥ \times ٢٠ = ١٠٠$ ث كجم . سم

القوتان ($٤\sqrt{٢}$ ، $٤\sqrt{٢}$) تكونان ازدواج عزمه $ج_٣$

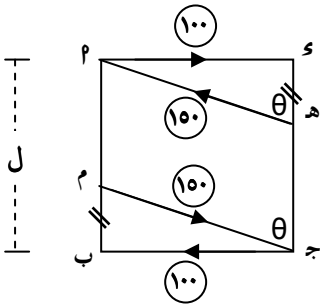
$\therefore ج_٣ = -٤\sqrt{٢} \times ٢٠\sqrt{٢} = -١٦٠$ ث كجم . سم

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = $ج_١ + ج_٢ + ج_٣ = -١٢٠$ ث كجم . سم

---

(٢) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ل ، م $\in \overline{أ ب}$ ، هـ $\in \overline{ء جـ}$ بحيث م ب = هـ ء = $\frac{١}{٣\sqrt{}}$ ل . أثرت قوتان مقدار كل منهما ١٠٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ وأثرت قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٥٠ نيوتن فى $\overleftarrow{م جـ}$ ، $\overleftarrow{هـ أ}$. عيّن عزم الازدواج المحصل .

الحل



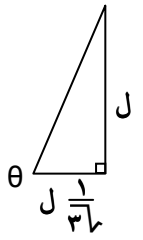
القوتان (١٠٠ ، ١٠٠) تكونان ازدواج عزمه $ج_١$

$\therefore ج_١ = -١٠٠ \times ل = -١٠٠ ل$ نيوتن

القوتان (١٥٠ ، ١٥٠) تكونان ازدواج عزمه $ج_٢$

$\therefore ج_٢ = ١٥٠ \times$ هـ جـ جا θ = $١٥٠ \times (ل - \frac{١}{٣\sqrt{}} ل) \times$ جا ٦٠°

(لأن من $\triangle$ أ ء هـ : ظا θ = $\sqrt{٣}$ $\therefore$ θ = ٦٠°)

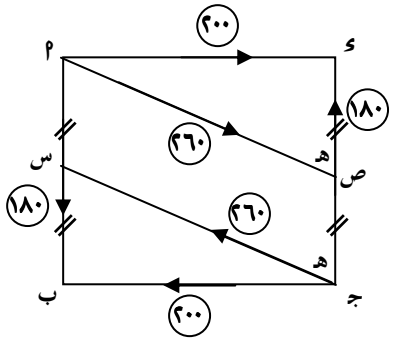


$\therefore ج_٢ = ١٥٠ \times ل (١ - \frac{١}{٣\sqrt{}}) \times \frac{٣\sqrt{}}{٢} = ٧٥\sqrt{٣} ل - ٧٥ ل$ نيوتن

$\therefore$ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = $ج_١ + ج_٢ = -٤٥ ل$ نيوتن تقريباً

(٣) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ١٠ سم ، جـ ب = ١٢ سم . نصف $\overline{أ ب}$ فى س ، $\overline{جـ ء}$ فى ص وأثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ث جم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ص}$ ، $\overleftarrow{جـ س}$ على الترتيب . أوجد عزم الازدواج المحصل .

الحل



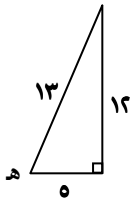
القوتان (١٨٠ ، ١٨٠) تكونان ازدواج عزمه ج ١

∴ ج ١ = ١٨٠ × ١٢ = ٢١٦٠ ث جم

، القوتان (٢٠٠ ، ٢٠٠) تكونان ازدواج عزمه ج ٢

∴ ج ٢ = − ٢٠٠ × ١٠ = − ٢٠٠٠ ث جم

، القوتان (٢٦٠ ، ٢٦٠) تكونان ازدواج عزمه ج ٣



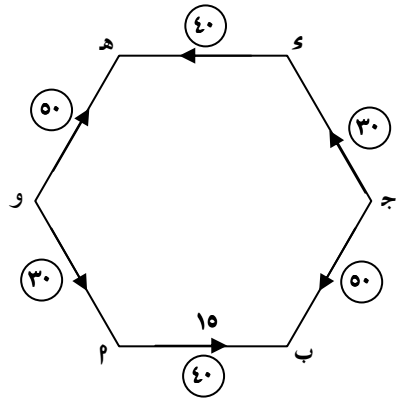
∴ ج ٣ = − ٢٦٠ × جا هـ = − ٢٦٠ × ٥ × $\frac{١٢}{١٣}$ = − ١٢٠٠ ث جم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ج ١ + ج ٢ + ج ٣ = − ١٠٤٠ ث جم

---

(٤) أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم . اثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء هـ}$ ، $\overleftarrow{هـ و}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ على الترتيب . عيّن عزم الازدواج المكافئ للمجموعة .

الحل



(لا حظ أن أطوال الأعمدة متساوية = ل $\sqrt{٣}$ = ١٥ $\sqrt{٣}$)

القوتان (٤٠ ، ٤٠) تكونان ازدواج عزمه ج ١

∴ ج ١ = ٤٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = ٦٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

، القوتان (٥٠ ، ٥٠) تكونان ازدواج عزمه ج ٢

∴ ج ٢ = − ٥٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = − ٧٥٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

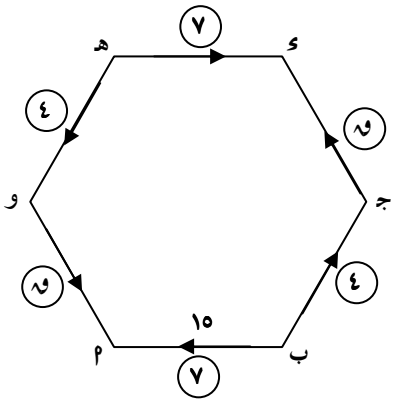
، القوتان (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواج عزمه ج ٣

∴ ج ٣ = ٣٠ × ١٥ $\sqrt{٣}$ = ٤٥٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

∴ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ج ١ + ج ٢ + ج ٣ = ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ نيوتن

(٥) أ ب جـ ء هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٧ ، ٤ ، ٧ ، ٤ ، ٧ ، ٧ ث جم فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{هء}$ ، $\overleftarrow{هو}$ على الترتيب . كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٧ ث جم فى $\overleftarrow{جء}$ ، $\overleftarrow{وأ}$. عيّن قيمة ٧ إذا عُلم أن المجموعة متوازنة .

الحل



القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواج عزمه ج١

∴ ج١ = – ٧ × ١٠ جا ٣٠° = – ٧٠ جا ٣٠° ث جم

، القوتان (٤ ، ٤) تكونان ازدواج عزمه ج٢

∴ ج٢ = ٤ × ١٠ جا ٣٠° = ٤٠ جا ٣٠° ث جم

، القوتان (٧ ، ٧) تكونان ازدواج عزمه ج٣

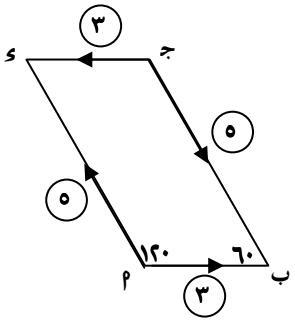
∴ ج٣ = ٧ × ١٠ جا ٣٠° = ١٠ جا ٣٠° ٧ ث جم

∵ المجموعة متوازنه ∴ عزم الازدواج المحصل = صفر

∴ ج١ + ج٢ + ج٣ = ٠ ∴ ١٠ جا ٣٠° ٧ – ٣٠ جا ٣٠° = ٠ ومنها ٧ = ٣ ث جم

(٦) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٦ سم ، ب جـ = ٢٠ سم ، ٧ (∠ أ ب جـ) = ١٢٠° . أثرت القوى ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث كجم فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{جـب}$ ، $\overleftarrow{جء}$ ، $\overleftarrow{أء}$ على الترتيب . عيّن عزم الازدواج المحصل .

الحل



القوتان (٣ ، ٣) تكونان ازدواج عزمه = ج١

∴ ج١ = ٣ × ب جـ جا ٦٠

= ٣ × ٢٠ جا ٦٠ = ٣٠ جا ٣٠° ث كجم

، القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواج عزمه ج٢

∴ ج٢ = – ٥ × جء جا ٦٠

= – ٥ × ١٦ جا ٦٠ = – ٤٠ جا ٣٠° ث كجم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ج١ + ج٢ = – ١٠ جا ٣٠° ث كجم

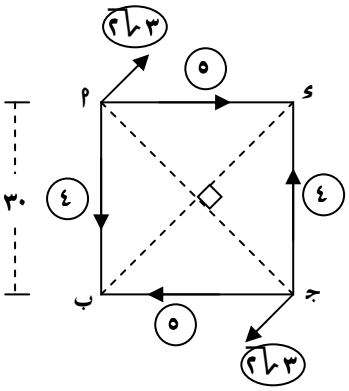
(٧) أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٣٠ سم . أثرت القوى التى مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٤ ، ٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب . كما أثرت قوتان مقدار كل منهما $٣\sqrt{٢}$ نيوتن عند أ ، جـ فى الاتجاهين $\overleftarrow{ب ء}$ ، $\overleftarrow{ء ب}$ على الترتيب . أوجد :

أولاً : الازدواج الذى يكافئ المجموعة .

ثانياً : مقدار واتجاه قوتين تعملان عند ب ، ء وتوازيان $\overline{أ جـ}$ وتجعلان المجموعة فى حالة توازن .

الحل

أولاً :



القوتان (٤ ، ٤) تكونان ازدواج عزمه ج١

∴ ج١ = ٤ × ٣٠ = ١٢٠ نيوتن . سم

، القوتان (٥ ، ٥) تكونان ازدواج عزمه ج٢

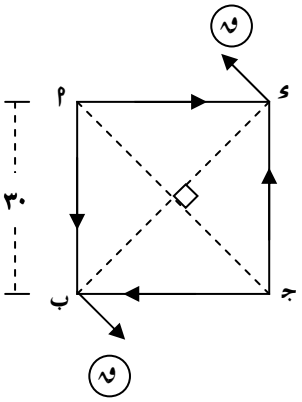
∴ ج٢ = - ٥ × ٣٠ = - ١٥٠ نيوتن . سم

، القوتان ($٣\sqrt{٢}$ ، $٣\sqrt{٢}$) تكونان ازدواج عزمه ج٣

∴ ج٣ = - $٣\sqrt{٢}$ × ٣٠ $\sqrt{٢}$ = - ١٨٠ نيوتن . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ج١ + ج٢ + ج٣ = - ٢١٠ نيوتن . سم

ثانياً :



∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

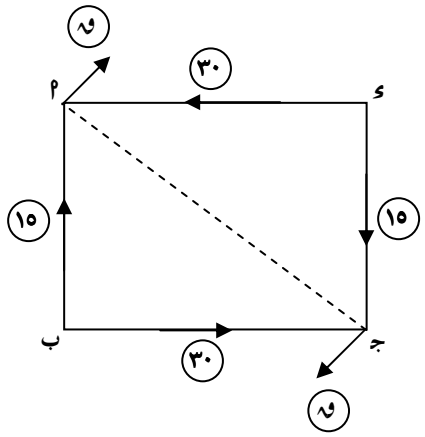
∴ القوتان (هـ ، هـ) تكونان ازدواج عزمه = ٢١٠ نيوتن . سم

∴ هـ × ٣٠ $\sqrt{٢}$ = ٢١٠

∴ هـ = $\frac{٧}{٢}$ $\sqrt{٢}$ نيوتن

(٨) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٣٠ سم ، ب جـ = ٤٠ سم . أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٣٠ ، ١٥ ، ٣٠ نيوتن فى $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب . أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه ثم أوجد قوتين تؤثران فى أ ، جـ عمودياً على $\overline{أ جـ}$ بحيث تتزن المجموعة

الحل



القوتان (١٥ ، ١٥) تكونان ازدواج عزمه ج ١

∴ ج ١ = - ١٥ × ٤٠ = - ٦٠٠ نيوتن . سم

، القوتان (٣٠ ، ٣٠) تكونان ازدواج عزمه ج ٢

∴ ج ٢ = ٣٠ × ٣٠ = ٩٠٠ نيوتن . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ج ١ + ج ٢

= ٣٠٠ نيوتن . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

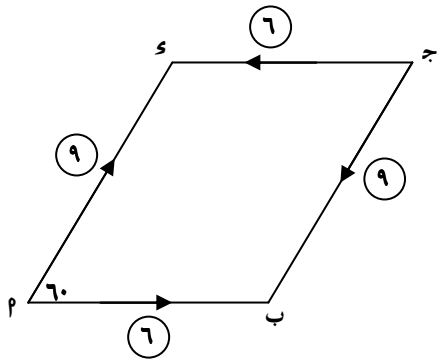
∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواج عزمه = - ٣٠٠ نيوتن . سم

∴ - ق × أ جـ = - ٣٠٠ ∴ - ق × ٥٠ = - ٣٠٠ ومنها ق = ٦ نيوتن

---

(٩) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، ق ($\widehat{أ}$) = ٦٠° . أثرت القوى التى مقاديرها ٦ ، ٩ ، ٦ ، ٩ ث جم فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه .

الحل



القوتان (٦ ، ٦) تكونان ازدواج عزمه ج ١

∴ ج ١ = ٦ × أ ء جا ٦٠

= ٦ × ٨ جا ٦٠ = ٢٤ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٢ $\sqrt{3}$ ث جم . سم

، القوتان (٩ ، ٩) تكونان ازدواج عزمه ج ٢

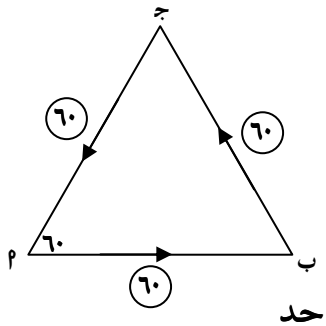
∴ ج ٢ = - ٩ × جـ ء جا ٦٠

= - ٩ × ٦ جا ٦٠ = - ٢٧ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = - ١٣.٥ $\sqrt{3}$ ث جم . سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج محصل عزمه = ج ١ + ج ٢ = - ١٣.٥ $\sqrt{3}$ ث جم . سم

(١٠) مُثلث ثلاث قوى تمثيلاً تاماً بأضلاع مثلث متساوى الأضلاع ﻫ ب جـ مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ، وبمقياس رسم ١ سم لكل ٢ ث جم فإذا كان طول ضلع المثلث يساوى ٣٠ سم . عيّن معيار عزم الازدواج الناتج .

الحل



∵ مقياس الرسم = ١ : ٢ ،

، ∵ طول ضلع المثلث = ٣٠ سم

∴ القوى المؤثرة فى الأضلاع كل منها = ٦٠ ث جم

، ∵ مقادير القوى تتناسب مع أطوال الأضلاع وفى ترتيب دورى واحد

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ك × ضعف مـ (Δ ﻫ ب جـ)

(حيث ك = $\frac{\text{القوة}}{\text{طول الضلع}}$)

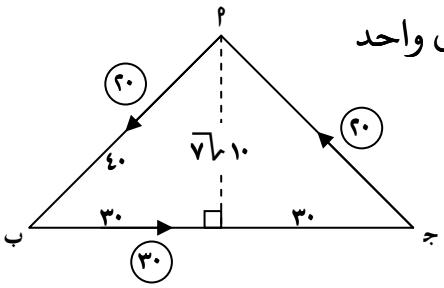
∴ معيار عزم الازدواج = ٢ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ﻫ ب × ﻫ جـ جا ٦٠

= ٢ × ٣٠ × ٣٠ جا ٦٠ = ٩٠٠ $\sqrt{٣}$ ث جم . سم

---

(١١) مُثلث ثلاث قوى مقاديرها ٢٠ ، ٣٠ ، ٢٠ نيوتن تمثيلاً تاماً بالقطع المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{ﻫ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ﻫ}$ على الترتيب ، حيث ﻫ ب = ٤٠ سم ، ب جـ = ٦٠ سم . عيّن معيار عزم الازدواج الناتج .

الحل



∵ القوى ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع المثلث وفى ترتيب دورى واحد

∴ ٢٠ : ٣٠ : ٢٠ = ﻫ ب : ب جـ : جـ ﻫ

= ٤٠ : ٦٠ : جـ ﻫ

∴ جـ ﻫ = ٤٠ سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواج معيار عزمه = ك × ٢ مـ (Δ ﻫ ب جـ)

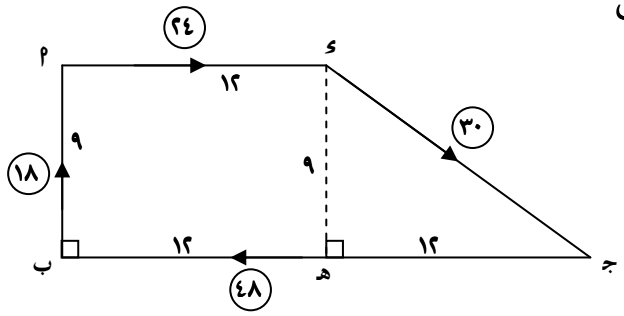
حيث ك = $\frac{٢٠}{٤٠}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ معيار عزم الازدواج = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ﻫ ب × ب جـ جا (∠ ﻫ ب جـ)

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ × ٦٠ × $\frac{١}{٤}$ $\sqrt{٧}$ = ٣٠٠ $\sqrt{٧}$ نيوتن . سم

(١٢) أ ب جـ ء شبة منحرف فيه $\overline{أ ء} \parallel \overline{ب جـ}$ ، ق($\angle$ أ ب جـ) = ٩٠° ، أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، أ ء = ١٢ سم . أثرت قوى مقاديرها ٤٨ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ نيوتن فى $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{ب أ}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ ، $\overleftarrow{ء جـ}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً وأوجد معيار عزمه .

الحل



ء جـ = ١٥ سم (من فيثاغورس)

$\frac{١٨}{٩} = \frac{٤٨}{٢٤} = \frac{٣٠}{١٥} = \frac{٢٤}{١٢}$ = ك

∴ مجموعة القوى مقاديرها متناسبة مع

اضلاع شبة المنحرف وفى ترتيب دورى واحد

∴ مجموعة القوى تكوّن ازدواج معيار عزمه = ك × ٢ مساحة سطح شبة المنحرف

= ٢ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ (أ ء + ب جـ) × أ ب

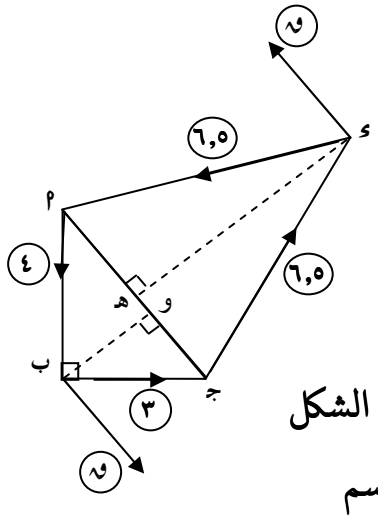
= ٢ (١٢ + ٢٤) × ٩ = ٦٤٨ نيوتن . سم

---

(١٣) أ ب جـ ء شكل رباعى فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ٦ سم ، جـ ء = ء أ = ١٣ سم ، ق($\angle$ أ ب جـ) = ٩٠° ، أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٣ ، ٦,٥ ، ٦,٥ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{ء أ}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً ، وأوجد معيار عزمه .

وإذا أثرت فى النقطتين ب ، ء قوتان مقدارهما ق ، ق فى اتجاهى $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$ على الترتيب . أوجد قيمة ق حتى تتزن المجموعة .

الحل



من فيثاغورس : أ جـ = ١٠ سم

Δ أ هـ ء : أ هـ = ٥ سم ⇐ ء هـ = ١٢ سم

Δ أ ب جـ : ب و = (٨ × ٦) ÷ ١٠ = ٤,٨ سم

القوى فى ترتيب دورى واحد ومتناسبة مع أطوال الأضلاع

حيث ك = $\frac{١}{٢}$

∴ مجموعة القوى تكوّن ازدواج معيار عزمه = ك × ٢ × مساحة الشكل

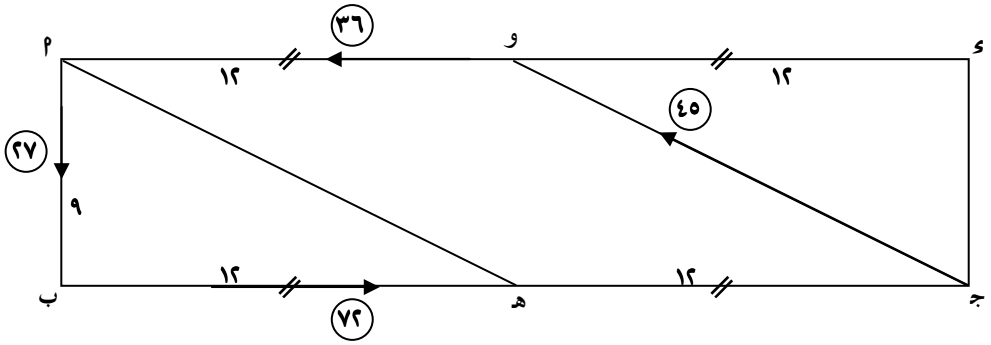
= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × [($\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨) + ($\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٢)] = ٨٤ نيوتن . سم

∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج ∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواج معيار عزمه ٨٤

∴ ق × (١٢ + ٤,٨) = ٨٤ ومنها ق = ٥ نيوتن .

(١٤) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٩ سم ، ب جـ = ٢٤ سم ، هـ ، و منتصفا $\overline{ب جـ}$ ، $\overline{أ ء}$ على الترتيب . أثرت قوى مقاديرها ٢٧ ، ٧٢ ، ٤٥ ، ٣٦ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ و}$ ، $\overleftarrow{و أ}$ على الترتيب . أثبت أن المجموعة تكافئ إزدواجاً . وأوجد معيار عزمه . ثم أوجد القوتين اللتين تؤثران فى $\overleftarrow{هـ أ}$ ، $\overleftarrow{و جـ}$ حتى يتزن المستطيل .

الحل



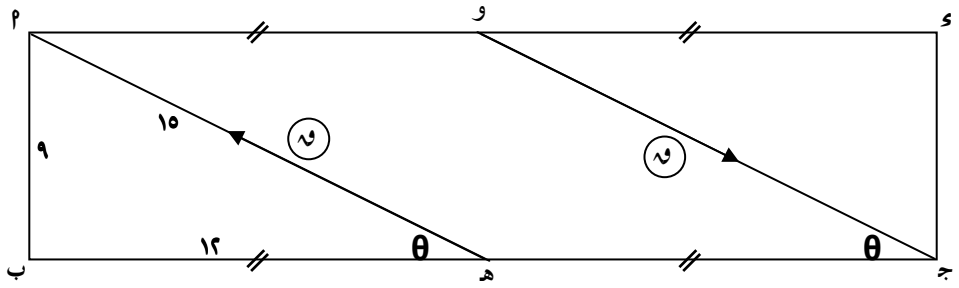
$\frac{٢٧}{٩} = \frac{٧٢}{٢٤} = \frac{٤٥}{١٥} = \frac{٣٦}{١٢} = ٣ =$ ك (لاحظ أن جـ و = ١٥ سم من فيثاغورس)

∵ القوى متناسبة مع أضلاع شبة المنحرف أ ب جـ و وفى ترتيب دورى واحد

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه = ك × ٢ × مساحة شبة المنحرف

= ٣ × ٢ × $\frac{١}{٢}$ (١٢ + ٢٤) × ٩

= ٩٧٢ نيوتن . سم



∵ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج

∴ القوتان (ق ، ق) تكونان ازدواج معيار عزمه = ٩٧٢ نيوتن . سم

∴ ق × جـ هـ جا θ = ٩٧٢

∴ ق × ١٢ × $\frac{٩}{١٥}$ = ٩٧٢ ومنها ق = ١٣٥ نيوتن .

الديناميكا

تمارين كتاب المدرسة

تمارين (١ – ١) صفحة ١٣٦

(١) قطع راكب دراجة ٤٠ كيلو مترا على طريق مستقيم بسرعة ٢٠ كم / س ثم عاد فقطع ١٥ كيلو مترا فى الاتجاه المعاكس **بسرعة ١٥ كم / س . أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية .**

الحل

زمن المسافة الأولى = $\frac{ف}{ع} = \frac{٤٠}{٢٠} = ٢$ **ساعة**

زمن المسافة الثانية = $\frac{١٥}{١٥} = ١$ **ساعة ∴ الزمن الكلى للرحلة = ٢ + ١ = ٣ ساعة**

الإزاحة الكلية = $٤٠\ \overrightarrow{ى} - ١٥\ \overrightarrow{ى} = ٢٥\ \overrightarrow{ى}$ **حيث أن الإزاحتين فى اتجاهين متضادين**

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{الإزاحة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٢٥}{٣}$ **كم / س**

---

(٢) قطع قطار المسافة بين القاهرة والإسكندرية على مرحلتين : المرحلة الأولى من القاهرة إلى طنطا ومسافتها ١٠٠ كم بسرعة ١٠٠ كم / س . المرحلة الثانية من طنطا إلى الإسكندرية ومسافتها ١١٠ كم بسرعة ٨٠ كم / س .
فإذا كان القطار قد توقف فى طنطا لمدة ١٠ دقائق ، أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة الكلية .
(اعتبر أن القطار يتحرك طوال الوقت على خط مستقيم) .

الحل

زمن المرحلة الأولى = $\frac{١٠٠}{١٠٠} = ١$ **ساعة**

زمن المرحلة الثانية = $\frac{١١٠}{٨٠} = \frac{١١}{٨}$ **ساعة**

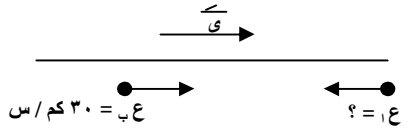
الزمن الكلى = $١ + \frac{١١}{٨} + \frac{١٠}{٦٠} = \frac{٦١}{٢٤}$

∴ السرعة المتوسطة = $(١٠٠ + ١١٠) \div \frac{٦١}{٢٤} = ٨٢,٦$ **كم / س**

---

(٣) تتحرك سيارة مخصصة لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوى" القاهرة - الإسكندرية" بسرعة ٣٠ كم / س .
راقبت هذه السيارة حركة شاحنة قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم / س .
فما هى السرعة الفعلية للشاحنة ؟

الحل



∵ $\overrightarrow{ع}_{أ ب} = \overrightarrow{ع}_{أ} - \overrightarrow{ع}_{ب}$

∴ $-١١٠\ \overrightarrow{ى} = \overrightarrow{ع}_{أ} - ٣٠\ \overrightarrow{ى}$

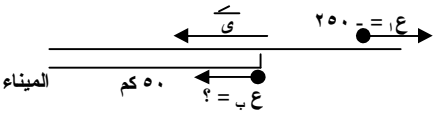
∴ $\overrightarrow{ع}_{أ} = -١١٠\ \overrightarrow{ى} + ٣٠\ \overrightarrow{ى} = -٨٠\ \overrightarrow{ى}$

∴ الشاحنة تتحرك بسرعة ٨٠ كم / س فى اتجاه مضاد لحركة سيارة المراقبة .

---

(٤) تتحرك باخرة فى مسار مستقيم نحو ميناء ولما صارت على مسافة ٥٠ كم منه مرت فوقها طائرة حراسة تطير فى الاتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم / س ورصدت حركة الباخرة فبدت لها متحركة بسرعة ٢٧٥ كم / س .
كم من الوقت ينقضى منذ لحظة الرصد وحتى وصول الباخرة إلى الميناء ؟

الحل



نفرض $\overrightarrow{ى}$ **متجه وحدة فى اتجاه حركة الباخرة ب**

∴ سرعة الطائرة أ = $\overrightarrow{ع}_{أ}$ = – ٢٥٠ $\overrightarrow{ى}$ ∵ $\overrightarrow{ع}_{أ ب}$ = $\overrightarrow{ع}_{أ}$ – $\overrightarrow{ع}_{ب}$

∴ – ٢٧٥ $\overrightarrow{ى}$ = – ٢٥٠ $\overrightarrow{ى}$ – $\overrightarrow{ع}_{ب}$ ∴ $\overrightarrow{ع}_{ب}$ = ٢٧٥ $\overrightarrow{ى}$ – ٢٥٠ $\overrightarrow{ى}$ = ٢٥ $\overrightarrow{ى}$

∴ زمن الوصول = $\frac{ف}{ع}$ = $\frac{٥٠}{٢٥}$ = ٢ ساعة .

---

(٥) قامت سيارة (أ) متحركة على خط مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٤٠ كم / س ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعادت القياس وجدت أن السرعة النسبية للسيارة(ب) أصبحت ١٢٠ كم / س . فما هى السرعة الفعلية لكل من السيارتين ؟

الحل

الحالة الأولى : $\overrightarrow{ع}_{ب أ}$ = – ١٤٠ $\overrightarrow{ى}$ ، ∵ $\overrightarrow{ع}_{ب أ}$ = $\overrightarrow{ع}_{ب}$ – $\overrightarrow{ع}_{أ}$ ∴ – ١٤٠ $\overrightarrow{ى}$ = $\overrightarrow{ع}_{ب}$ – $\overrightarrow{ع}_{أ}$ .....(١)

الحالة الثانية : $\overrightarrow{ع}_{ب أ}$ = – ١٢٠ $\overrightarrow{ى}$ ، سرعة السيارة أ = $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ع}_{أ}$ ∴ – ١٢٠ $\overrightarrow{ى}$ = $\overrightarrow{ع}_{ب}$ – $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ع}_{أ}$ .....(٢)

بالطرح (٢) – (١) ∴ سرعة السيارة أ = ٤٠ كم / س

بالتعويض فى (١) ∴ سرعة السيارة ب = ١٠٠ كم / س فى الاتجاه المضاد .

---

(٦) تتحرك طائرتان بنفس السرعة فى مسار مستقيم ، بحيث تتابع أحدهما الأخرى والمسافة بينهما ٥٠٠ متر . وفى لحظة ما ، أطلقت الطائرة الخلفية صاروخاً على الطائرة الأمامية فأصابها بعد مرور ثانيتين من أطلاقه . فما هى سرعة دفع الصاروخ ؟

الحل

∵ السرعة النسبية = ٠

∴ سرعة دفع الصاروخ = $\frac{ف}{ن}$ = $\frac{٥٠٠}{٢}$ = ٢٥٠ م / ث

---

(٧) يتحرك طراد وسفينة على مسار واحد . كل منهما متجهاً نحو الآخر . راقب الطراد حركة السفينة فبدت له متحركة بسرعة ٨٠ كم / س . ولما أصبحت المسافة بينهما ٦ كم أطلق الطراد طوربيداً نحو السفينة . فإذا علمت أن محرك الطوربيد يستطيع دفعه بسرعة ١٠٠ كم / س ، فما هو الزمن الذى ينقضى منذ لحظة الإطلاق وحتى لحظة إصابة الهدف ؟

الحل

سرعة السفينة بالنسبة للطراد = ٨٠ كم / س

∴ سرعة الطراد بالنسبة للسفينة = ٨٠ كم / س

∴ سرعة الطوربيد = ٨٠ + ١٠٠ = ١٨٠ كم / س

∴ الزمن = $\frac{ف}{ع}$ = $\frac{٦}{١٨٠}$ = $\frac{١}{٣٠}$ ساعة = ٢ دقيقة

تمارين (١ – ٢) صفحة ١٤٤

(١) تحرك جسيم فى اتجاه ثابت فقطع ١٨ متراً فى الثوانى الثلاثة الأولى من حركته ، ١٢ متراً فى الثانية الخامسة ، ٢٠ متراً فى الثانية التاسعة ، أثبت أن هذه المسافات تتفق والفرض بأن هذا الجسيم يتحرك بعجلة منتظمة واحسب سرعته عند بدء الحركة

الحل

∵ السرعة المتوسطة خلال فترة زمنية = السرعة عند منتصف هذه الفترة

∴ ع$_{١,٥}$ = ١٨ ÷ ٣ = ٦ ، ع$_{٤,٥}$ = ١٢ ÷ ١ = ١٢ ، ع$_{٨,٥}$ = ٢٠ ÷ ١ = ٢٠

<u>فى الفترة من ن = ١,٥ إلى ن = ٤,٥</u> :

معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن = (١٢ – ٦) ÷ ٣ = ٢

<u>فى الفترة من ن = ٤,٥ إلى ن = ٨,٥</u> :

معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن = (٢٠ – ١٢) ÷ ٤ = ٢

∵ السرعة تتغير بمعدل ثابت بالنسبة للزمن ∴ الجسم يتحرك بعجلة منتظمة جـ = ٢ م / ث^{٢}

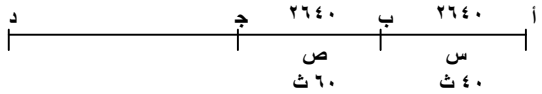
، ∵ ع = ع$_{.}$ + جـ ن ∴ ع$_{١,٥}$ = ع$_{.}$ + ٢ × ١,٥

∴ ٦ = ع$_{.}$ + ٣ ∴ ع$_{.}$ = ٦ – ٣ = ٣ م / ث

---

(٢) أ ، ب ، جـ ، د أربع نقط على خط مستقيم واحد بحيث كان أ ب = ب جـ = ٢٦٤٠ سم وهناك جسيم متحرك من نقطة أ بعجلة منتظمة فقطع المسافة أ ب فى ٤٠ ثانية والمسافة ب جـ فى ٦٠ ثانية – ففى كم ثانية يقطع المسافة جـ د ؟ وما طول جـ د إذا علم أن الجسيم سكن عند نقطة د ؟

الحل



السرعة عند زمن منتصف الفترة أ ب = ٢٦٤٠ ÷ ٤٠ = ٦٦ سم / ث

السرعة عند زمن منتصف الفترة ب جـ = ٢٦٤٠ ÷ ٦٠ = ٤٤ سم / ث

∵ ع$_{ص}$ = ع$_{س}$ + جـ × ٥٠ ∴ ٤٤ = ٦٦ + ٥٠ جـ ∴ جـ = – ٠,٤٤

∵ ع$_{س}$ = ع$_{أ}$ + جـ ن ∴ ٦٦ = ع$_{أ}$ – ٠,٤٤ × ٢٠ ∴ ع$_{أ}$ = ٧٤,٨

<u>المرحلة أ د</u> : ع$_{أ}$ = ٧٤,٨ ، جـ = – ٠,٤٤ ، ع$_{د}$ = ٠

∵ ع$_{د}$ = ع$_{أ}$ + جـ ن ∴ ٠ = ٧٤,٨ – ٠,٤٤ × ن ∴ ن = ١٧٠ ث

∴ زمن المسافة جـ د = ١٧٠ – ١٠٠ = ٧٠ ث

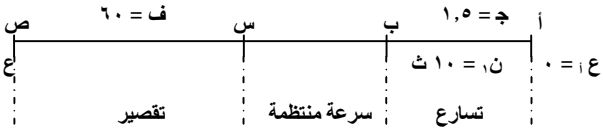
، أ د = ف = ع $_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} = ٧٤,٨ × ١٧٠ + $\frac{١}{٢}$ × – ٠,٤٤ × (١٧٠)^{٢}

∴ أ د = ٦٣٥٨ سم ∴ جـ د = ٦٣٥٨ – ٢ × ٢٦٤٠ = ١٠٧٨ سم

---

(٣) يتحرك ترام بين محطتين المسافة بينهما ٧٠٠ متراً فيبدأ من السكون من المحطة الأولى بعجلة $\frac{١}{٢}$ ١ متر / ث^{٢} لمدة عشر ثوان ، ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن ، ثم يقطع أخيراً مسافة ٦٠ متراً تكون حركته خلالها تقصيرية حتى يتوقف فى المحطة الثانية . أوجد الزمن الذى استغرقه فى قطع المسافة بين المحطتين .

الحل



السرعة عند ب : $ع_ب = ع_أ + جـ ن = ٠ + ١,٥ \times ١٠ = ١٥$ م / ث

$أ ب = ف = ع_أ ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢ = ٠ + \frac{١}{٢} \times ١,٥ \times (١٠)^٢ = ٧٥$ م

$ب س = ا ص - (أ ب + س ص) = ٧٠٠ - (٧٥ + ٦٠) = ٥٦٥$ م

زمن الفترة ب س $= ن_٢ = ٥٦٥ \div ١٥ = \frac{١١٣}{٣}$ ث

الفترة س ص :

$ع_ص^٢ = ع_س^٢ + ٢ جـ / ف$ $\quad \therefore ٠ = (١٥)^٢ + ٢ \times جـ / \times ٦٠ \quad \therefore جـ / = - \frac{١٥}{٨}$

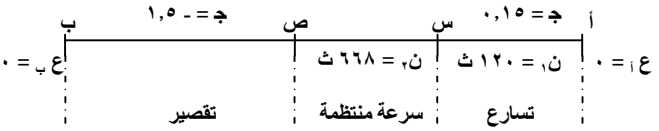
، $\because ع_ص = ع_س + جـ ن$ $\quad \therefore ٠ = ١٥ - \frac{١٥}{٨} ن_٣ \quad \therefore ن_٣ = ٨$ ث

زمن الرحلة الكلى $= ن_١ + ن_٢ + ن_٣ = ١٠ + \frac{١١٣}{٣} + ٨ = ٥٥ \frac{٢}{٣}$ ث

---

(٤) بدأ قطار حركته من محطة أ بعجلة منتظمة ١٥ سم / ث^٢ فبلغت سرعته أقصى قيمة بعد دقيقتين ، وسار بهذه السرعة مدة $١١ \frac{٢}{١٥}$ دقيقة ، بعدها استخدم الفرامل التى ولدت حركة تقصيرية بعجلة ١٥٠ سم / ث^٢ حتى توقف فى محطة ب .
أوجد طول المسافة أ ب وسرعته المتوسطة فى قطع هذه المسافة .

الحل



$ع_س = ع_أ + جـ ن = ٠ + ١,٥ \times ١٢٠ = ١٨$ م / ث

$أ س = ف_١ = ع_أ ن + \frac{١}{٢} جـ ن^٢ = ٠ + \frac{١}{٢} \times ٠,١٥ \times (١٢٠)^٢ = ١٠٨٠$ متر

$س ص = ف_٢ = ع_س \times ن = ١٨ \times ٦٦٨ = ١٢٠٢٤$ متر

ص ب $= ف_٣$: $\because ع_ب^٢ = ع_س^٢ + ٢ جـ ف \quad \therefore ٠ = (١٨)^٢ - ٢ \times ١,٥ ف_٣ \quad \therefore ف_٣ = ١٠٨$ متر

$\therefore$ المسافة الكلية $= أ ب = ف_١ + ف_٢ + ف_٣$

$= ١٠٨٠ + ١٢٠٢٤ + ١٠٨ = ١٣٢١٢$ متر

، زمن الفترة ص ب :

$\because ع_ب = ع_ص + جـ ن \quad \therefore ٠ = ١٨ - ١,٥ ن_٣ \quad \therefore ن_٣ = ١٢$ ث

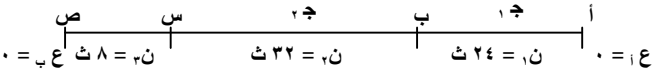
زمن الرحلة الكلى $= ن_١ + ن_٢ + ن_٣ = ١٢٠ + ٦٦٨ + ١٢ = ٨٠٠$ ث

$\therefore$ السرعة المتوسطة $= ١٣٢١٢ \div ٨٠٠ = ١٦,٥١٥$ م / ث

---

(٥) بدأت سيارة الحركة من سكون بعجلة منتظمة ١٨٠ كم / س لكل دقيقة وبعد ٢٤ ثانية أوقفت العجلة فتناقصت السرعة بانتظام بفعل الاحتكاك ومقاومة الهواء بمعدل ٤٥٠ متر / س / ث وبعد ٣٢ ثانية استخدمت فرامل السيارة فأوقفتها فى مدة ٨ ثوانى أوجد المسافة التى قطعتها السيارة .

الحل



$جـ_١ = (١٨٠ \times \frac{٥}{١٨}) \div ٦٠ = \frac{٥}{٦}$ م / ث^٢

$جـ_٢ = - ٤٥٠ \div (٦٠ \times ٦٠) = - \frac{١}{٨}$ م / ث^٢

الفترة أ ب : $ع_ب = ٠ + \frac{٥}{٦} \times ٢٤ = ٢٠$ م / ث

، أ ب = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٥}{٦}$ × (٢٤)^{٢} = ٢٤٠ متر

الفترة ب س : ع$_{س}$ = ٢٠ − $\frac{١}{٨}$ × ٣٢ = ١٦ م / ث

ب س = ٢٠ × ٣٢ − $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٨}$ × (٣٢)^{٢} = ٥٧٦ متر

الفترة س ص : ∵ ف = ع$_{م}$ × ن ∴ س ص = $\frac{١٦ + ٠}{٢}$ × ٨ = ٦٤ متر

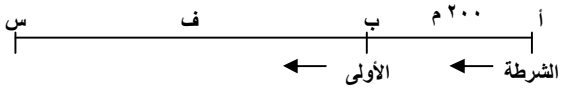
∴ المسافة الكلية = ٢٤٠ + ٥٧٦ + ٦٤ = ٨٨٠ متر

---

(٦) تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س – مرت بسيارة شرطة ساكنة ، فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها ، متحركة بعجلة منتظمة مسافة ١٠٠ متر حتى بلغت سرعتها ٩٠ كم / ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة

الأولى ، أوجد الزمن الذى استغرقته عملية المطاردة منذ لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التى قطعتها هذه السيارة .

الحل



سرعة السيارة الأولى = ٧٢ × ١٨/٥ = ٢٠ م / ث

نفرض أن سيارة الشرطة تلحق بالسيارة الأولى بعد زمن قدره ن ثانية . فتكون السيارة الأولى قطعت مسافة قدرها ف وسيارة الشرطة مسافة قدرها (ف + ٢٠٠)

بالنسبة للسيارة الأولى : ف = ٢٠ ن .....(١)

بالنسبة لسيارة الشرطة (الحركة بعجلة) ع$_{ب}$ = $\frac{٢٥ + ٠}{٢}$ × ٩٠ × ١٨/٥ = ٢٥ م / ث

، السرعة المتوسطة = $\frac{ع_{أ} + ع_{ب}}{٢}$ = = ١٢,٥ م / ث

∵ ف$'$ = ع$'$ × ن$'$ ∴ ١٠٠ = ١٢,٥ ن$'$ ∴ ن$'$ = ٨ ث

وعندما تتحرك سيارة الشرطة بسرعة منتظمة ∵ ف = ع × ن

∴ ف + ٢٠٠ − ١٠٠ = ٢٥ (ن − ٨) ∴ ف = ٢٥ ن − ٣٠٠.....(٢)

من (١) ، (٢) ∴ ٢٥ ن − ٣٠٠ = ٢٠ ن ∴ ن = ٦٠ ث

بالتعويض فى (٢) ∴ ف = ٢٥ × ٦٠ − ٣٠٠ = ١٢٠٠ متر

∴ المسافة التى قطعتها السيارة الأولى = ١٢٠٠ + ٢٠٠ = ١٤٠٠ متر

---

(٧) يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فقطع فى الثوانى الأربعة الأولى من حركته مسافة ٢٠٠ متراً ثم قطع ٥٠ متراً فى الثانيتين السابعة والثامنة – أوجد سرعته الابتدائية والمسافة التى يقطعها منذ بدء حركته حتى يتوقف .

الحل

ع$_{٢}$ = ٢٠٠ ÷ ٤ = ٥٠ م / ث ، ع$_{٧}$ = ٥٠ ÷ ٢ = ٢٥ م / ث

∴ جـ = $\frac{٢٥ - ٥٠}{٧ - ٢}$ = − ٥ م / ث^{٢}

∵ ع$_{٢}$ = ع$_{.}$ + جـ ن ∴ ٥٠ = ع$_{.}$ − ٥ × ٢ ∴ ع$_{.}$ = ٦٠ م / ث

، ∵ ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (٦٠)^{٢} − ٢ × ٥ ف ∴ ف = ٣٦٠ متر

---

(٨) أطلقت رصاصة أفقياً على كتلة خشبية بسرعة ٢٠٠ متر / ث فغاصت فيها مسافة ٤ سم . أوجد العجلة التى تحركت بها الرصاصة إذا علم أنها تتحرك بعجلة منتظمة ، وإذا فرض أن سمك الكتلة الخشبية ٣ سم ، فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية ؟

الحل

∵ $ع_{ب}^{2} = ع_{أ}^{2} + 2جف$ ∴ $0 = (200)^{2} + 2 \times جـ \times 0,04$

∴ $0,08 جـ = - 40000$ ∴ $جـ = - 5 \times (10)^{2}$ م / ث^{2} $= - 5 \times (10)^{2}$ سم / ث^{2}

، ∵ $ع_{ب}^{2} = ع_{أ}^{2} + 2جف$ ∴ $ع^{2} = (200)^{2} - 2 \times 500000 \times 0,03$

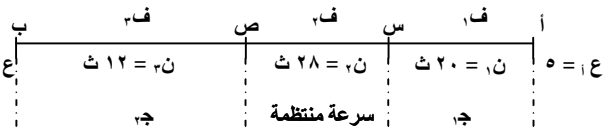
∴ $ع^{2} = 10000$ ∴ $ع = 100$ م / ث

---

(٩) بلغت سرعة سيارة فى لحظة ما ٥ متر / ث وكانت تسير بعجلة منتظمة إلى أن بلغت سرعتها أقصى قيمة لها بعد ٢٠ ثانية فسارت بهذه السرعة مدة ٢٨ ثانية ثم تحركت بعد ذلك حركة تقصيرية بعجلة منتظمة لمدة ١٢ ثانية إلى أن سكنت . فإذا كانت المسافة الكلية التى قطعتها ١١٥٠ متراً ، أوجد كلاً من العجلتين .

الحل

ف = ١١٥٠ م



الفترة أ س : $ع_{س} = ع_{أ} + جـ_{١} ن_{١} = 5 + 20 جـ_{١}$

، $ف_{١} = \frac{ن_{١} (ع_{أ} + ع_{س})}{2} = \frac{20 (5 + 5 + 20 جـ_{١})}{2}$ ∴ $ف_{١} = 100 + 200 جـ_{١}$ .....(١)

الفترة س ص : تتحرك السيارة بأقصى سرعة أى سرعة منتظمة

∵ $ف_{٢} = ع_{س} \times ن_{٢} = 28 \times (5 + 20 جـ_{١})$ ∴ $ف_{٢} = 140 + 560 جـ_{١}$ .....(٢)

الفترة ص ب : حيث $ع_{ص} = ع_{س}$

$ف_{٣} = \frac{ن_{٣} (ع_{ص} + ع_{ب})}{2} = \frac{12 (5 + 20 جـ_{١} + 0)}{2}$ ∴ $ف_{٣} = 30 + 120 جـ_{١}$ .....(٣)

بجمع (١) ، (٢) ، (٣) ∴ $ف_{١} + ف_{٢} + ف_{٣} = 270 + 880 جـ_{١}$

∴ $1150 = 270 + 880 جـ_{١}$ ∴ $جـ_{١} = 1$ م / ث^{2}

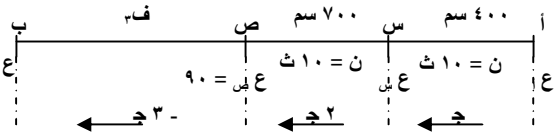
∴ $ع_{ص} = ع_{س} = 5 + 20 \times 1 = 25$ م / ث

∵ $ع_{ب} = ع_{ص} + جـ_{٣} ن_{٣}$ ∴ $0 = 25 + 12 جـ_{٣}$ ∴ $جـ_{٣} = - 12/25$ م / ث^{2}

---

(١٠) تحرك جسيم فى خط مستقيم حركة متسارعة بعجلة منتظمة مقدارها (جـ) فقطع مسافة ٤٠٠ سم فى ١٠ ثوان ثم زاد مقدار العجلة فأصبح (٢ جـ) فقطع الجسيم مسافة أخرى قدرها ٧٠٠ سم فى ١٠ ثوان حتى صارت سرعته ٩٠ سم / ث ، ثم تحرك الجسيم حركة تقصيرية بعجلة مقدارها (٣ جـ) حتى سكن . أحسب قيمة (جـ) والمسافة الكلية التى تحركها الجسيم .

الحل



الفترة س ص :

∵ $ف = \frac{ن (ع_{س} + ع_{ص})}{2}$ ∴ $700 = \frac{10 (ع_{س} + 90)}{2}$ ∴ $ع_{س} = 50$ سم / ث

الفترة أ س :

$\frac{10 (ع_{أ} + 50)}{2}$

٤٠٠ = ∴ ع$_{أ}$ = ٣٠ سم / ث

، ∵ ع$_{س}$ = ع$_{أ}$ + جـ ن ∴ ٥٠ = ٣٠ + ١٠ جـ ∴ جـ = ٢ سم / ث

الفترة ص ب :

ف = $\frac{ن (٠ + ٩٠)}{٢}$ ∴ ف = ٤٥ ن .....(١)

ع$_{ب}$ = ع$_{ص}$ + (– ٣ جـ) ن ∴ ٠ = ٩٠ – ٣ × ٢ ن ∴ ن = ١٥ ث

من (١) ∴ ف = ٤٥ × ١٥ = ٦٧٥ سم

∴ المسافة الكلية = ٤٠٠ + ٧٠٠ + ٦٧٥ = ١٧٧٥ سم

تمارين (١ – ٣) صفحة ١٥٥

(١) سقط جسيم رأسيا إلى أسفل . أوجد سرعته بعد ٤ ثوان والزمن الذى يستغرقه فى قطع مسافة ٦٨,٦ متر ؟

الحل

ع$_{.}$ = ٠ لأن الجسيم سقط ∴ ع = ع$_{.}$ + د ن = ٠ + ٩,٨ × ٤ = ٩,٢ م/ ث

، ف = ع$_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢} ∴ ٦٨,٦ = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ ن^{٢} ∴ ن = ٣,٧٤ ث

---

(٢) قذف حجر صغير فى بئر بسرعة ٤ متر / ث فوصل إلى قاعه بعد ٢ ث . أوجد عمق البئر وسرعة الحجر عند اصطدامه بقاع البئر .

الحل

ف = ع$_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢} = ٤ × ٢ + $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × ن^{٢} = ٢٧,٦ متر

ع = ع$_{.}$ + د ن = ٤ + ٩,٨ × ٢ = ٢٣,٦ م / ث .

---

(٣) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر / ث . أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التى وصل إليها .

الحل

عند الوصول لأقصى ارتفاع يكون ع = ٠ ، د = -- ٩,٨ م / ث^{٢} لأن الحركة لأعلى

ع = ع$_{.}$ + د ن ∴ ٠ = ١٩,٦ – ٩,٨ ن ∴ ن = ٢

، ف = ع$_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢} = ١٩,٦ × ٢ – $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × ٤ = ١٩,٦ متر .

---

(٤) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ٢٤,٥ متر / ث فبعد كم ثانية يعود إلى نقطة القذف ؟

الحل

ع$_{.}$ = ٠ ، د = -- ٩,٨ م / ث^{٢} ، عندما يعود الجسيم إلى نقطة القذف يكون ف = ٠

، ف = ع$_{.}$ ن + $\frac{١}{٢}$ د ن^{٢} ∴ ٠ = ٢٤,٥ ن – $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ ن^{٢}

∴ ن (٢٤,٥ – ٤,٩ ن) = ٠ ∴ ن = ٠ عند بدء الحركة أ، ن = ٥ ث

---

(٥) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٩,٦ متر / ث من نقطة عند سطح الأرض . متى يكون الجسيم على ارتفاع ١٤,٧ متر فوق سطح الأرض وما هى سرعته عندئذ ؟ فسر معنى الجوابين .

الحل

∵ **ف** = ع. ن + $\frac{1}{2}$ د ن^2 ∴ ١٤,٧ = ١٩,٦ ن – $\frac{1}{2}$ × ٩,٨ ن^2

∴ ن^2 – ٤ ن + ٣ = ٠ ∴ (ن – ١) (ن – ٣) = ٠ ∴ ن = ١ عندما يكون الجسيم صاعداً

أ، ن = ٣ يستمر الجسيم فى الصعود إلى أقصى ارتفاع ثم يعود بعد ٣ ث من بدء حركته .

، ع = ع. + د ن = ١٩,٦ – ٩,٨ × ١ = ٩,٨ م / ث .

---

(٦) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ١٤ متر / ث . أوجد الزمن الذى يأخذه حتى يصل إلى نقطة تبعد ٣٥٠ متراً أسفل نقطة القذف

الحل

ع. = ١٤ م / ث ، د = - ٩,٨ م / ث^2 ، **ف** = – ٣٥٠ م لأن الإزاحة عكس اتجاه الحركة

∵ **ف** = ع. ن + $\frac{1}{2}$ د ن^2 ∴ - ٣٥٠ = ١٤ ن – $\frac{1}{2}$ × ٩,٨ ن^2

∴ ٧ ن^2 – ٢٠ ن – ٥٠٠ = ٠ ∴ (ن – ١٠) (٧ ن + ٥٠) = ٠ ∴ ن = ١٠ ث

---

(٧) قذف حجر صغير بسرعة ١٩,٦ متر / ث رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه ١٥٦,٨ متر عن سطح الأرض .

متى يصل الحجر إلى سطح الأرض ؟ وما هى سرعته عندئذ ؟

الحل

ع. = ١٩,٦ م / ث ، د = -- ٩,٨ م / ث^2 ، **ف** = -- ١٥٦,٨ م لأن الإزاحة عكسية

∵ **ف** = ع. ن + $\frac{1}{2}$ د ن^2 ∴ - ١٥٦,٨ = ١٩,٦ ن – $\frac{1}{2}$ × ٩,٨ ن^2

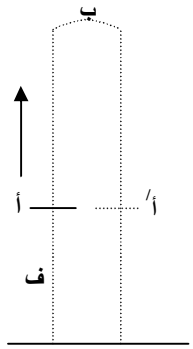
∴ ن^2 – ٤ ن – ٣٢ = ٠ ∴ (ن – ٨) (ن + ٤) = ٠ ∴ ن = ٨ ث

، ع = ع. + د ن = ١٩,٦ – ٩,٨ × ٨ = – ٥٨,٨ ∴ ع = ٥٨,٨ م / ث هابطاً .

---

(٨) قذفت كرة صغيرة رأسياً إلى أعلى من نافذة أحد المنازل . وشوهدت وهى هابطة أمام النافذة بعد ٤ ثوان من قذفها . ثم وصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان من لحظة القذف . أوجد ارتفاع النافذة عن سطح الأرض بالأمتار .

الحل



زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع = ٤ ÷ ٢ = ٢ ث

ع$_ب$ = ع$_أ$ + د ن ∴ ٠ = ع$_أ$ – ٩,٨ × ٢

∴ ع$_أ$ = ١٩,٦ م / ث

، ∵ **ف** = ع. ن + $\frac{1}{2}$ د ن^2

∴ **ف** = ١٩,٦ × ٥ – $\frac{1}{2}$ × ٩,٨ × ٢٥ = ٢٤,٥ متر

تمارين (٢ – ١) صفحة ١٦٧

فى التمارين الآتية $\vec{ى}$ هو متجه وحدة ثابت ، $\vec{ر}$ متجه موضع الجسيم ، $\vec{ف}$ متجه إزاحته بين اللحظة الابتدائية ن = ٠ واللحظة النهائية ن .

---

(١) إذا كان $\vec{ر} = (٥ ن^{٢} + ١) \vec{ى}$. عين المشتقة $\frac{و \vec{ر}}{و ن}$ وأوجد قياسها الجبرى ومعيارها .

الحل

$\frac{و \vec{ر}}{و ن} = (١٠ ن) \vec{ى}$ ، القياس الجبرى = ١٠ ن = المعيار (لأن ن موجبة)

---

(٢) إذا كان $\vec{ر} = (- ن^{٢} + ٣ ن + ١) \vec{ى}$. عين المشتقة $\frac{و \vec{ر}}{و ن}$ عند أى لحظة زمنية ثم عين قياسها الجبرى ومعيارها عند ن = ٣

الحل

$\frac{و \vec{ر}}{و ن} = (- ٢ ن + ٣) \vec{ى}$ ، القياس الجبرى = $- ٢ ن + ٣ = - ٢ \times ٣ + ٣ = - ٣$ ، المعيار = ٣

---

(٣) إذا كان $\vec{ر} = (- \frac{٣}{٢} ن^{٢} + ٢ ن) \vec{ى}$ عين متجه الإزاحة $\vec{ف}$. وأوجد متى ينعدم هذا المتجه . أثبت أن الحركة تقصيرية عندما ن < $\frac{٢}{٣}$ ومتسارعة عندما ن > $\frac{٢}{٣}$.

الحل

$\vec{ف} = \vec{ر} - \vec{ر}_{.} = (- \frac{٣}{٢} ن^{٢} + ٢ ن) \vec{ى}$

، عند ف = ٠ ∴ $- \frac{٣}{٢} ن^{٢} + ٢ ن = ٠$ ∴ ن = ٠ أ، $\frac{٤}{٣}$

$\vec{ع} = \frac{و \vec{ف}}{و ن} = (- ٣ ن + ٢) \vec{ى}$ ، جـ = $\frac{و \vec{ع}}{و ن} = - ٣ \vec{ى}$

ع × جـ = ٣ (– ٣ ن + ٢)

عندما ن < $\frac{٢}{٣}$ ∵ ع × جـ < ٠ ∴ الحركة متسارعة

عندما ن > $\frac{٢}{٣}$ ∵ ع × جـ > ٠ ∴ الحركة تقصيرية

---

(٤) إذا كانت $\vec{ر} = (ن^{٣} + ٢) \vec{ى}$. عين متجهات الإزاحة والسرعة والعجلة ، ومن ثم أثبت أن الحركة متسارعة .
متى يساوى معيار العجلة ١٢ وحدة ؟

الحل

$\vec{ف} = \vec{ر} - \vec{ر}_{.} = (ن^{٣}) \vec{ى}$ ، $\vec{ع} = \frac{و \vec{ف}}{و ن} = (٣ ن^{٢}) \vec{ى}$ ، $\vec{جـ} = \frac{و \vec{ع}}{و ن} = (٦ ن) \vec{ى}$

عندما جـ = ١٢ وحدة ∴ ٦ ن = ١٢ ∴ ن = ٢

---

(٥) عين متجه السرعة والعجلة فى كل من الحالات الآتية مبيناً تلك التى تكون فيها الحركة منتظمة أو منتظمة التغير أو متغيرة .

(أ) $\vec{ر} = ن \vec{ى}$ (ب) $\vec{ر} = (٢ ن + ٣) \vec{ى}$

(جـ) $\vec{ر} = (ن^{٢} + ن + ١) \vec{ى}$ (د) $\vec{ر} = ن^{٣} \vec{ى}$

الحل

(أ) $\vec{ع} = (١) \vec{ى}$ ، $\vec{جـ} = ٠$ الحركة منتظمة (ب) $\vec{ع} = (٢) \vec{ى}$ ، $\vec{جـ} = ٠$ الحركة منتظمة

(جـ) $\vec{ع} = (٢ ن + ١) \vec{ى}$ ، $\vec{جـ} = ٢ \vec{ى}$ الحركة منتظمة التغير

(د) $\vec{ع} = (٣ ن^{٢}) \vec{ى}$ ، $\vec{جـ} = (٦ ن) \vec{ى}$ الحركة متغيرة

(٦) إذا كان $\overrightarrow{ف} = (٢ن^{٣} - ن)\overrightarrow{ى}$ عين متجهى السرعة والعجلة . وأثبت أن معيار العجلة يتناسب طردياً مع الزمن .

بين كذلك : أن الحركة تكون تقصيرية عندما ن < $\frac{١}{\sqrt{٦}}$ ومتسارعة عندما ن > $\frac{١}{\sqrt{٦}}$.

الحل

$\overrightarrow{ع} = (٦ن^{٢} - ١)\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{جـ} = (١٢ن)\overrightarrow{ى}$

∵ $\|\overrightarrow{جـ}\| = ١٢ن$ ∴ $\|\overrightarrow{جـ}\|$ = ثابت × ن ∴ $\|\overrightarrow{جـ}\|$ يتناسب مع ن

ع × جـ = $(٦ن^{٢} - ١) \times ١٢ن$

١٢ ن كمية موجبة ، $٦ن^{٢} - ١ > ٠$ عندما ن > $\frac{١}{\sqrt{٦}}$ وتكون الحركة متسارعة

، $٦ن^{٢} - ١ < ٠$ عندما ن < $\frac{١}{\sqrt{٦}}$ وتكون الحركة تقصيرية

---

(٧) إذا كان $\overrightarrow{ر} = (ن^{٣} - ن^{٢} - ن - ١)\overrightarrow{ى}$. عين متجه الإزاحة . وأثبت أن سرعة الجسيم تنعدم عندما ن = ١ وأن الحركة كانت متسارعة عندما ن = ٠

الحل

$\overrightarrow{ف} = (ن^{٣} - ن^{٢} - ن)\overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع} = (٣ن^{٢} - ٢ن - ١)\overrightarrow{ى}$

$\overrightarrow{ع} = (٣ن + ١)(ن - ١)\overrightarrow{ى}$ ∴ السرعة تنعدم عندما ن = ٠ والآخر مرفوض

ع × جـ = $(٣ن + ١)(ن - ١)(٦ن - ٢)$

عندما ن = ٠ يكون ع × جـ = $١ \times (-١)(-٢) = ٢ > ٠$ ∴ الحركة متسارعة .

---

(٨) يتحرك جسيم فى خط مستقيم وكان القياس الجبرى لمتجه إزاحته كدالة فى الزمن هو ف = $٤,٩ن^{٢} + ٢ن$

عين المسافة المقطوعة حتى اللحظة ن = ٣ ومقدار السرعة عندئذ . أثبت أن الحركة متسارعة طوال الوقت .

الحل

ف = $٤,٩(٣)^{٢} + ٢(٣) = ٥٠,١$ ، ع = $\frac{ى ف}{ى ن} = ٤,٩ \times ٢ن + ٢$

، عند ن = ٣ ∴ ع = $٨,٩ \times ٣ + ٢ = ٣١,٤$ ، جـ = $\frac{ى ع}{ى ن} = ٩,٨$

ع × جـ = $٩,٨(٩,٨ن + ٢) > ٠$ دائماً ∴ الحركة متسارعة طوال الوقت .

---

(٩) يتحرك جسيم فى خط مستقيم وكان القياس الجبرى لمتجه إزاحته كدالة فى الزمن هو ف = $-٤,٩ن^{٢} + ٢٨ن$.

عين القياسين الجبريين لمتجهى السرعة والعجلة . وبين متى تكون الحركة تقصيرية ومتى تكون متسارعة ؟

الحل

ع = $-٩,٨ن + ٢٨$ ، جـ = $-٩,٨$ ، ع × جـ = $٩,٨(٩,٨ن - ٢٨)$

تكون الحركة متسارعة عندما $٩,٨ن - ٢٨ > ٠$ أى ن > $\frac{٢٠}{٧}$

وتكون الحركة تقصيرية عندما ن < $\frac{٢٠}{٧}$

---

(١٠) يتعين القياس الجبرى لمتجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من العلاقة : ر = $-٤,٩ن^{٢} + ١٩,٦ن + ١٥٦,٨$

أوجد القياس الجبرى لكل من متجهات الإزاحة والسرعة والعجلة . متى تنعدم السرعة ؟ أوجد متى تكون الحركة متسارعة ، ومتى تكون تقصيرية ؟

الحل

ف = $-٤,٩ن^{٢} + ١٩,٦ن$ ، ع = $-٩,٨ن + ١٩,٦$ ، جـ = $-٩,٨$

تنعدم السرعة عندما ع = ٠ ∴ $-٩,٨ن + ١٩,٦ = ٠$ ∴ ن = ٢

ع × جـ = ٩,٨ (٩,٨ ن – ١٩,٦)

تكون الحركة متسارعة عندما ٩,٨ ن – ١٩,٦ > ٠ أى ن > ٢

تكون الحركة تقصيرية عندما ن < ٢

---

(١١) يعطى متجه موضع جسيم $\overleftarrow{ر}$ كدالة فى الزمن ن من العلاقة : $\overleftarrow{ر}$ = (ن^{٣} - ٦ ن^{٢} + ١٢ ن + ٩) $\overleftarrow{ى}$

حيث $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة ثابت . أوجد متجهى الإزاحة والسرعة للجسيم عند أى لحظة زمنية ن . متى ينعدم متجه السرعة ؟

الحل

$\overleftarrow{ف}$ = $\overleftarrow{ر}$ – $\overleftarrow{ر_{.}}$ = (ن^{٣} - ٦ ن^{٢} + ١٢ ن) $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع}$ = (٣ ن^{٢} - ١٢ ن + ١٢) $\overleftarrow{ى}$

ينعدم متجه السرعة عندما ع = ٠ ∴ ٣ ن^{٢} - ١٢ ن + ١٢ = ٠

∴ ن^{٢} - ٤ ن + ٤ = ٠ ∴ (ن - ٢)^{٢} = ٠ ∴ ن = ٢

تمارين (٣ – ١) صفحة ١٨٢

(١) ينطلق صاروخ كتلته ٣ طن وكان ينفث الوقود بمعدل ثابت يساوى ١٠٠ كجم فى الثانية فإذا كانت كتلة الصاروخ الفارغ من الوقود هى ١ طن . متى يفرغ الوقود من الصاروخ ؟

الحل

لاحظ أن الكتلة المكتسبة أو المفقودة = المعدل × الزمن

كتلة الوقود = ٣ – ١ = ٢ طن = ٢٠٠٠ كجم

∴ الزمن اللازم حتى يفرغ الوقود = ٢٠٠٠ ÷ ١٠٠ = ٢٠ ث

---

(٢) تتحرك كرة كتلتها ١ كجم فى هواء محمل بالغبار وكان معدل تراكم الغبار على سطحها يساوى ٢٠ جم / دقيقة . بعد كم من الوقت تصبح كتلة الكرة المحملة بالغبار ١,٥ كجم ؟

الحل

كتلة الغبار المتراكم = ١,٥ – ١ = ٠,٥ كجم = ٥٠٠ جم

الزمن = ٥٠٠ ÷ ٢٠ = ٢٥ دقيقة .

---

(٣) أوجد كمية حركة سيارة كتلتها ١٨٠٠ كجم وتتحرك بسرعة ١٠٠ كم / س مقدراً إجابتك بوحدات جم . متر / ث

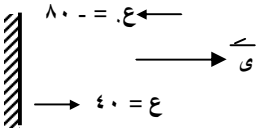
الحل

كمية حركة السيارة = ك × ع = $١٨٠٠ \times ١٠^{٣} \times ١٠٠ \times \frac{٥}{١٨} = ٥ \times ١٠^{٧}$ جم . م/ ث

---

(٤) قذفت كرة من المطاط كتلتها ٤٠ جم على أرض أفقية ملساء فاصطدمت بحاجز بسرعة ٨٠ سم / ث ثم ارتدت منه فى الاتجاه المضاد بسرعة ٤٠ سم / ث . أوجد مقدار التغير فى كمية حركتها نتيجة للتصادم ؟

الحل



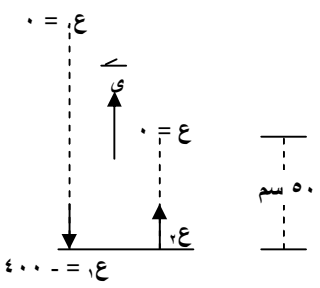
التغير فى كمية الحركة = ك (ع – ع.)

= ٤٠ (٤٠ + ٨٠) = ٤٠ × ١٢٠ = ٤٨٠٠ جم . سم / ث

---

(٥) تركت كرة من المطاط كتلتها ١٠٠ جم لتسقط على أرض أفقية فاصطدمت بها بسرعة ٤٠٠ سم / ث ثم ارتدت إلى ارتفاع ٥٠ سم قبل أن تسكن لحظياً . عين مقدار التغير فى كمية حركتها قبل وبعد التصادم مباشرة .

الحل



نوجد سرعة الارتداد : $ع^{٢} = ع_{٢}^{٢} + ٢ د ف$ (د = - ٩٨٠)

$٠ = ع_{٢}^{٢} - ٢ \times ٩٨٠ \times ٥٠$

∴ $ع_{٢} = ١٤٠ \sqrt{٥}$ سم

التغير فى كمية الحركة = ك ($ع_{٢} – ع_{١}$)

= ١٠٠ (١٤٠ √٥ + ٤٠٠)

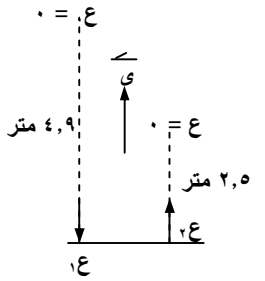
= ٧١٣٠٤ جم . سم / ث تقريباً

---

(٦) تركت كرة من المطاط كتلتها ٥٠ جم لتسقط من ارتفاع ٤,٩ متر على أرض أفقية فاصطدمت بها وارتدت إلى ارتفاع ٢,٥ متر

قبل أن تسكن لحظياً . عين مقدار التغير فى كمية حركتها قبل وبعد التصادم مباشرة .

الحل



نوجد السرعة قبل التصادم مباشرة :

$ع_1^{\ 2} = 0 + 2 \times 9,8 \times 4,9$ ∴ $ع_1 = 9,8$ م / ث

نوجد سرعة الارتداد :

$0 = ع_2^{\ 2} - 2 \times 9,8 \times 2,5$ ∴ $ع_2 = 7$ م / ث

التغير فى كمية الحركة = ك (ع٢ – ع١)

= ٥٠ (٧ + ٩,٨) = ٨٤٠ جم . م / ث

---

(٧) تركت كرة من المطاط كتلتها ١٠٠ جم لتسقط من ارتفاع ٤٠ سم على أرض أفقية . فإذا علم أ ن الكرة ترتد بعد كل صدمة إلى ربع الارتفاع الذى تسقط منه . أوجد مقدار التغير فى كمية حركتها قبل وبعد الصدمة الثانية مباشرة مقدراً بوحدات جم . سم / ث

الحل

الكرة تسقط من ارتفاع ١٠ سم قبل الصدمة الثانية

سرعة الكرة قبل الصدمة الثانية : $ع_1^{\ 2} = 0 + 2 \times 980 \times 10$ ∴ $ع_1 = 140$ سم / ث

الكرة ترتد مسافة ٢,٥ سم بعد الصدمة الثانية

سرعة الكرة بعد الصدمة الثانية : $0 = ع_2^{\ 2} - 2 \times 980 \times 2,5$ ∴ $ع_2 = 70$ سم / ث

∴ التغير فى كمية الحركة نتيجة للصدمة الثانية = ك (ع٢ – ع١) = ١٠٠ (٧٠ + ١٤٠) = ٢١٠٠٠ جم . سم / ث

---

(٨) أطلقت رصاصة كتلتها ٥٠ جم بسرعة ٨١٠ متر / ث نحو جسم خشبى ساكن كتلته ٤ كجم فاستقرت فيه وتحركت المجموعة بعد ذلك بسرعة ما . أوجد هذه السرعة . علماً بأن كمية حركة المجموعة لم تتغير نتيجة للتصادم .

الحل

∵ كمية الحركة لم تتغير

∴ مجموع كميتى حركة الرصاصة والجسم قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

∴ $0,05 \times 810 + 4 \times 0 = (0,05 + 4) \times ع$

∴ ع = ١٠ م / ث (وهى سرعة المجموعة بعد التصادم)

---

(٩) أطلق مدفع مضاد للدبابات قذيفة كتلتها ١ كجم بسرعة ٣٠٠ متر / ث فى اتجاه دبابة تتحرك نحو المدفع بسرعة ٦٠ كم / س فأصابتها . أوجد مقدار كمية الحركة المطلقة للقذيفة وكذلك مقدار كمية حركتها بالنسبة للدبابة وقارن بينهما .

الحل

كمية الحركة المطلقة للقذيفة = ١ × ٣٠٠ = ٣٠٠ كجم . متر / ث

سرعة القذيفة بالنسبة للدبابة = $300 + 60 \times \frac{5}{18} = \frac{950}{3}$ متر / ث

كمية حركة القذيفة بالنسبة للدبابة = $1 \times \frac{950}{3} = 316,67$ كجم . متر / ث

---

(١٠) قذف جسيم رأسياً إلى أعلى بسرعة ع. : أكتب القانون الذى يعطى سرعته بدلالة الزمن ثم استنتج منه أن معدل تغير كمية حركته بالنسبة للزمن هو متجه ثابت .

الحل

نتخذ ى متجه وحدة رأسى لأعلى

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع_.} + (د ن)\overrightarrow{ى}$ (حيث د سالبة) ∴ $\overrightarrow{ع} - \overrightarrow{ع_.} = (د ن)\overrightarrow{ى}$ وبالضرب × ك

∴ ك $(\overrightarrow{ع} - \overrightarrow{ع_.}) = (ك د ن)\overrightarrow{ى}$ (وهذا هو التغير فى كمية الحركة)

∴ معدل التغير فى كمية الحركة = $\frac{\text{تغير}}{\text{ز ن}}$ $(ك د ن)\overrightarrow{ى} = (ك د)\overrightarrow{ى}$ = متجه ثابت

تمارين (٣ – ٢) صفحة ١٩٠

(١) السؤال مرسوم بالكتاب والحل كالآتى :

الجسم يكون ساكن أو متحرك بسرعة منتظمة إذا كانت محصلة القوى المؤثرة عليه = ٠

لذلك فإن : أ ، ب ، جـ ، هـ ليست ساكنة أو متحركة بسرعة منتظمة .

أما : د ، و فهى ساكنة أو متحركة بسرعة منتظمة .

---

(٢) تهبط كرة معدنية صغيرة وزنها ١٥٠ ث . جم رأسياً فى سائل . وجد أنها تقطع مسافات متساوية فى فترات زمنية متساوية . فما هو مقدار قوة مقاومة السائل لحركة الكرة ؟

الحل

∵ الكرة تتحرك بسرعة منتظمة ∴ مقاومة السائل = وزن الكرة = ١٥٠ ثقل جرام

---

(٣) يهبط مظلى رأسياً بسرعة منتظمة ، فإذا كان الوزن الكلى له والمظلة ٩٥ ث . كجم ، أوجد مقدار قوة مقاومة الهواء للمظلة .

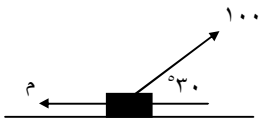
الحل

∵ الحركة بسرعة منتظمة ∴ مقاومة الهواء = الوزن = ٩٥ ث كجم .

---

(٤) يجذب حصان كتلة خشبية على أرض أفقية بقوة مقدارها ١٠٠ ث . كجم وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠°
فإذا تحركت الكتلة بسرعة منتظمة ، أوجد قوة مقاومة الأرض لحركتها .

الحل



∵ السرعة منتظمة

∴ المقاومة = ١٠٠ جتا ٣٠° = ٥٠ $\sqrt{٣}$ ث . كجم

---

(٥) تتحرك سيارة كتلتها ٤ طن على طريق أفقى مستقيم تحت تأثير مقاومة تتناسب طردياً مع مقدار سرعتها ، فإذا كانت المقاومة ٨ ث . كجم لكل طن من كتلة السيارة عندما كانت السرعة ٧٢ كم / س . أوجد أقصى سرعة لها علماً بأن أقصى قوة يولدها المحرك هى ٦٠ ث كجم .

الحل

∵ م α ع ∴ $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{ع_١}{ع_٢}$ ، م١ = ٨ × ٤ = ٣٢ ث . كجم عندما ع١ = ٧٢ كم / س

عند أقصى سرعة (السرعة منتظمة) : م٢ = أقصى قوة للمحرك = ٦٠ ث كجم

∴ $\frac{٣٢}{٦٠} = \frac{٧٢}{ع_٢}$ ∴ ع٢ = ١٣٥ كم / س

---

(٦) يتحرك جسم كتلته ك تحت تأثير القوتين : $\overrightarrow{ق_١} = ٣ ك \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = ٤ ك \overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين .
عين مقدار القوة الإضافية التى لو أثرت على الجسم لجعلته يحرك حركة منتظمة .

الحل

نفرض أن القوة المطلوبة هى $\overrightarrow{ق_3} = أ \overrightarrow{س} + ب \overrightarrow{ص}$

∴ الجسم يتحرك حركة منتظمة ∴ $\overrightarrow{ح} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} = \overrightarrow{0}$

∴ $(٣ ك + أ) \overrightarrow{س} + (٤ ك + ب) \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{0}$ ∴ أ = − ٣ ك ، ب = − ٤ ك ∴ $\overrightarrow{ق_3} = -٣ ك \overrightarrow{س} - ٤ ك \overrightarrow{ص}$

---

(٧) رجل مربوط إلى مظلة يهبط هو والمظلة فى اتجاه رأسى إلى أسفل . فإذا علم أن مقاومة الهواء تتناسب طردياً مع مربع مقدار السرعة وأن مقاومة الهواء تساوى ربع وزن الرجل والمظلة عندما تكون السرعة ١٥ كم / س .

فأوجد سرعة هبوط الرجل والمظلة عندما تصير هذه السرعة منتظمة .

الحل

∵ م α ع^2 ∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2}$ ، م$_1$ = $\frac{1}{4}$ و ، عندما ع$_1$ = ١٥ كم / س

، عندما تكون السرعة منتظمة ∴ م$_2$ = و

∴ $\frac{\frac{1}{4} و}{و} = \frac{٢٢٥}{ع_2^2}$ ∴ ع$_2^2$ = ٤ × ٢٢٥ = ٩٠٠ ∴ ع$_2$ = ٣٠ كم / س

---

(٨) قطار كتلته ١١٢ طن وقوة قاطرته ٥٦٠٠ ث . كجم . فإذا كانت المقاومة لحركة هذا القطار تتناسب طردياً مع مربع سرعته . وعلم أن المقاومة كانت ٣٢ ث . كجم لكل طن من الكتلة عندما كانت سرعته ٦٠ كم / س .

أحسب أقصى سرعة يمكن لهذا القطار أن يسير بها .

الحل

∵ م α ع^2 ∴ $\frac{م_1}{م_2} = \frac{ع_1^2}{ع_2^2}$ ، م$_1$ = ٣٢ × ١١٢ = ٣٥٨٤ ، ع$_1$ = ٦٠ كم / س

، عند أقصى سرعة تكون السرعة منتظمة ∴ م$_2$ = قوة القاطرة = ٥٦٠٠ ث . كجم

∴ $\frac{٣٥٨٤}{٥٦٠٠} = \frac{٣٦٠٠}{ع_2^2}$ ∴ ع$_2^2$ = ٥٦٢٥ ∴ ع$_2$ = ٧٥ كم / س

---

(٩) وضع جسم كتلته ١٠ كجم على مستوى أفقى وربط بحبلين أفقين قياس الزاوية بينهما ١٢٠° وعندما كانت قوة الشد فى كل من الحبلين ٤٠٠ ث . جم تحرك الجسم على المستوى حركة منتظمة . أوجد مقدار واتجاه قوة مقاومة المستوى لحركة الجسم

الحل

الجسم يتحرك تحت تأثير محصلة قوتى الشد فى الحبلين ق = ٢ ش جتا $\frac{ى}{2}$

ق = ٢ × ٤٠٠ × جتا ٦٠ = ٤٠٠ ث . جم

عند الحركة المنتظمة : م = ق ∴ مقاومة المستوى = ٤٠٠ ث . جم وفى اتجاه عكسى لاتجاه القوة ق

أى تصنع زاوية مقدارها ١٢٠° مع الحبلين .

تمارين (٣ – ٣) صفحة ٢٠٥

(١) يتحرك جسيم كتلته تحت تأثير القوتين : $\overrightarrow{ق_1} = ٣ ك \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = ٥ ك \overrightarrow{ص} - ٢ ك \overrightarrow{س}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجهها وحدة متعامدين . أوجد عجلة الجسيم وعين مقدارها .

الحل

محصلة القوى المؤثرة : $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} = ك \overrightarrow{س} + ٥ ك \overrightarrow{ص}$

$\because \overrightarrow{ق} = ك \overrightarrow{جـ}$ $\therefore ك \overrightarrow{س} + ٥ ك \overrightarrow{ص} = ك \overrightarrow{جـ}$ $\therefore \overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{س} + ٥ \overrightarrow{ص}$ $\therefore \|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{١ + ٢٥} = \sqrt{٢٦}$

---

(٢) يتحرك جسيم كتلته الوحدة . وكان متجه سرعته يعطى كدالة فى الزمن من العلاقة : $\overrightarrow{ع} = (أ ن^٢ + ب ن) \overrightarrow{س}$.
حيث $\overrightarrow{س}$ متجه وحدة ثابت . عين الثابتين أ ، ب إذا علمت أن القوة المؤثرة على هذا الجسيم ثابتة وتعطى من العلاقة : $\overrightarrow{ق} = ٥ \overrightarrow{س}$.

الحل

$\overrightarrow{جـ} = (٢ أ ن + ب) \overrightarrow{س}$ $\because \overrightarrow{ق} = ك \overrightarrow{جـ}$ $\therefore ٥ \overrightarrow{س} = ١ \times (٢ أ ن + ب) \overrightarrow{س}$

$\therefore ٢ أ ن + ب = ٥$ ، عند ن = ٠ $\therefore أ = ٠$ ، ب = ٥

لاحظ أنه يمكن الوصول لنفس النتيجة لو وضعنا ن = ١ ، ن = ٢ وحلينا المعادلتين .

---

(٣) يتحرك جسيم تساوى كتلته الوحدة تحت تأثير القوى الثلاث $\overrightarrow{ق_1} = \overrightarrow{س} + أ \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = - ٢ \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٢ \overrightarrow{ص} + ب \overrightarrow{س}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجهها وحدة متعامدان ، أ ، ب ثابتان فإذا علم أن متجه إزاحة الجسيم يعطى كدالة فى الزمن من العلاقة : $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{س} + (\frac{١}{٢} ن^٢ + ن) \overrightarrow{ص}$. عين الثابتين أ ، ب .

الحل

محصلة القوى المؤثرة : $\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3}$ $\therefore \overrightarrow{ق} = (- ١ + ب) \overrightarrow{س} + (أ + ٣) \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{٠} + (ن + ١) \overrightarrow{ص} = (ن + ١) \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ص}$

$\because \overrightarrow{ق} = ك \overrightarrow{جـ}$ $\therefore (- ١ + ب) \overrightarrow{س} + (أ + ٣) \overrightarrow{ص} = ١ \times \overrightarrow{ص}$

$\therefore ب - ١ = ٠$ ومنها ب = ١ ، $أ + ٣ = ١$ ومنها $أ = - ٢$

---

(٤) يتحرك جسيم بحيث كانت مركبتا سرعته فى الاتجاهين الأفقى والرأسى لأعلى هما على الترتيب
$ع_س = ٢$ ، $ع_ص = - ٩,٨ ن + ٢$ مقدرين بوحدة متر / ث . عين مقدار واتجاه السرعة الابتدائية لهذا الجسيم ، وكذلك متجه القوة المؤثرة عليه . علماً بأن كتلته تساوى ١ كجم .

الحل

$\overrightarrow{ع} = ٢ \overrightarrow{س} + (- ٩,٨ ن + ٢) \overrightarrow{ص}$

ولمعرفة السرعة الابتدائية نضع ن = ٠ $\therefore \overrightarrow{ع_.} = ٢ \overrightarrow{س} + (- ٩,٨ \times ٠ + ٢) \overrightarrow{ص} = ٢ \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$

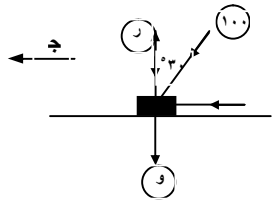
، $\overrightarrow{جـ} = ٠ - ٩,٨ \overrightarrow{ص} = - ٩,٨ \overrightarrow{ص}$

$\because \overrightarrow{ق} = ك \overrightarrow{جـ}$ $\therefore \overrightarrow{ق} = ١ \times (- ٩,٨) \overrightarrow{ص}$ $\therefore \overrightarrow{ق} = - ٩,٨ \overrightarrow{ص}$

---

(٥) أثرت قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن ويصنع اتجاهها زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى لأسفل على جسم كتلته ٢٠ كجم موضوع على أرض أفقية ملساء . أوجد العجلة الناشئة وكذلك مقدار قوة رد الفعل العمودى .

الحل



مركبة القوة فى اتجاه الحركة = ١٠٠ جا ٣٠° = ٥٠ نيوتن

معادلة الحركة : ق = ك جـ

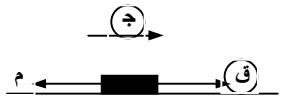
∴ ٥٠ = ٢٠ جـ ∴ جـ = ٢,٥ م / ث^{٢}

، ر = ١٠٠ جتا ٣٠° + ٢٠ × ٩,٨ = (٥٠ √٣ + ١٩٦) نيوتن .

---

(٦) بدأت دبابة كتلتها ٢٠ طناً وقوة آلتها $\frac{١}{٢}$ طن فى التحرك على أرض أفقية . وكانت قوة المقاومة لحركتها تساوى فى المقدار ٢٠ ث . كجم لكل طن من كتلتها . أوجد سرعة الدبابة بعد مضى ٢٥٠ ثانية من بدء الحركة .

الحل



معادلة الحركة : ق (محصلة القوى) = ك جـ

ق – م = ك جـ

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠٠ × ٩,٨ – ٢٠ × ٢٠ × ٩,٨ = ٢٠ × ١٠٠٠ جـ ∴ جـ = ٠,٠٤٩ م / ث^{٢}

، ع = ع. + جـ ن ∴ ع = ٠ + ٠,٠٤٩ × ٢٥٠ = ١٢,٢٥ م / ث

---

(٧) يتحرك جسم على هيئة أسطوانية دائرية قائمة ارتفاعها ٥٠ سم ، ونصف قطر قاعدتها ١٠ سم كتلته ١٠ كجم حركة منتظمة بسرعة ٥ متر / ث دخل هذا الجسم فى سحابة تحمل غباراً فأثرت عليه بقوة مقاومة مقدارها ٠,٠١ ث جم لكل سنتيمتر مربع من مساحته الجانبية .

أوجد سرعة الجسم بعد خروجه من السحابة علماً بأنه ظل يتحرك داخلها لمدة ٣٠ ثانية .

الحل

المساحة الجانبية للأسطوانة = ٢ ط نق ع = ٢ ط × ١٠ × ٥٠ = ١٠٠٠ ط سم^{٢}

∴ المقاومة = ٠,٠١ × ١٠٠٠ = ١٠ ط ث . جم

معادلة الحركة : – م = ك جـ ∴ – ١٠ ط × ٩٨٠ = ١٠ × ١٠٠٠ جـ ∴ جـ = – ٠,٩٨ ط سم / ث^{٢}

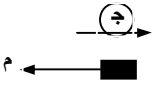
، ع = ع. + جـ ن = ٥٠٠ – ٠,٩٨ ط × ٣٠ = ٤٠٧,٦ سم / ث = ٤,٠٨ م / ث

---

(٨) أطلقت رصاصة كتلتها ٢٥ جم بسرعة ٢٠٠ متر / ث على حاجز ثابت فغاصت فيه مسافة ٥ سم حتى سكنت .

عين مقدار قوة مقاومة الحاجز لحركة الرصاصة . علماً بأنه ظل ثابتاً طوال الوقت .

الحل



ع = ٠ ، ع. = ٢٠٠ م / ث

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (٢٠٠)^{٢} + ٢ جـ × ٠,٠٥

∴ جـ = – ٤٠٠٠٠٠ م / ث^{٢}

معادلة الحركة : – م = ك جـ

∴ – م = ٠,٠٢٥ × (– ٤٠٠٠٠٠) ∴ م = ١٠٠٠٠ نيوتن

---

(٩) تتحرك كرة معدنية كتلتها ١٠٠ جرام فى خط مستقيم بسرعة ثابتة مقدارها ١٠ متر / ث فى وسط يحمل غباراً ، فإذا كان الغبار يلتصق بسطحها بمعدل ثابت يساوى ٠,٠٦ جم فى الثانية . أوجد كتلة الكرة والقوة المؤثرة عليها عند أى لحظة زمنية ن . علماً بأنه عند بدء الحركة كانت الكرة خالية تماماً من الغبار .

الحل

معدل تغير الكتلة ($\frac{\text{ى ك}}{\text{ى ن}}$) = ٠,٠٦ جم / ث

∴ الكتلة عند أى لحظة : ك$_{ن}$ = ك$_{.}$ + ن × $\frac{\text{ى ك}}{\text{ى ن}}$ ∴ ك$_{ن}$ = ١٠٠ + ٠,٠٦ ن

، ∵ الكتلة متغيرة

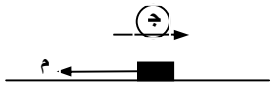
∴ معادلة الحركة : ق = $\frac{\text{ى}}{\text{ى ن}}$ (ك$_{ن}$ × ع) ولكن السرعة ثابتة = ١٠٠٠ سم / ث

∴ ق = ١٠٠٠ × $\frac{\text{ى}}{\text{ى ن}}$ (١٠٠ + ٠,٠٦ ن) = ١٠٠٠ × ٠,٠٦ = ٦٠ داين

---

(١٠) تتحرك سيارة كتلتها ١٩٦٠ كجم بسرعة ٦٣ كم / س . أثرت عليها قوة فرامل ومقدارها ١٢٥٠ ث كجم .
أوجد المسافة التى تقطعها العربة حتى تقف .

الحل



ع = ٠ ، ع$_{.}$ = ٦٣ × $\frac{٥}{١٨}$ = ١٧,٥ م / ث

معادلة الحركة : – م = ك جـ

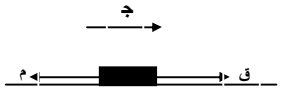
– ١٢٥٠ × ٩,٨ = ١٩٦٠ جـ ∴ جـ = – ٦,٢٥ م / ث^{٢}

، ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (١٧,٥)^{٢} – ٢ × ٦,٢٥ ف ∴ ف = ٢٤,٥ متر

---

(١١) أثرت قوة أفقية مقدارها ١٠٠٠ ث كجم على سيارة كتلتها ٤ طن تسير على طريق أفقية . فإذا بدأت السيارة من السكون وبلغت سرعتها ٤,٩ متر / ث فى ١٠ ثوان . أوجد المقاومات .

الحل



ع = ٤,٩ م / ث ، ع$_{.}$ = ٠ ، ن = ١٠ ث

∵ ع = ع$_{.}$ + جـ ن ∴ ٤,٩ = ٠ + ١٠ جـ

∴ جـ = ٠,٤٩ م / ث^{٢} ∴ معادلة الحركة : ق – م = ك جـ

١٠٠٠ × ٩,٨ – م = ٤٠٠٠ × ٠,٤٩ ∴ م = ٧٨٤٠ نيوتن ∴ م = ٧٨٤٠ ÷ ٩,٨ = ٨٠٠ ث كجم

---

(١٢) سقط جسم كتلته ٢ كجم من ارتفاع ١٠ أمتار نحو أرض رملية فغاص فيها مسافة ٥ سم .
أحسب بثقل الكيلو جرام مقاومة الرمل بفرض ثبوتها .

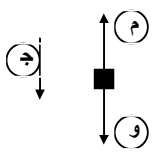
الحل

ع$_{.}$ = ٠ ، د = ٩,٨ م / ث^{٢} ، ف = ١٠ م ∵ ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف

∴ ع^{٢} = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠ ∴ ع (سرعة اصطدام الجسم بالأرض) = ١٤ م / ث

الحركة داخل الرمل :

ع = ٠ ، ع$_{.}$ = ١٤ م / ث ، ف = ٠,٠٥ م



∴ ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = ١٩٦ + ٢ × جـ × ٠,٠٥

∴ جـ = – ١٩٦٠ م / ث^{٢}

معادلة الحركة : ك د – م = ك جـ

∴ ٢ × ٩,٨ – م = ٢ × – ١٩٦٠ ∴ م = ٣٩٣٩,٦ نيوتن = ٤٠٢ ث كجم

(١٣) أثرت قوة أفقية $\overleftarrow{ق}$ فى جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستوى أفقى فحركته من السكون ٢٤٥ سم فى ١٠ ثوان ضد مقاومات ثابتة تعادل $\frac{١}{١٠}$ وزن الجسم أوجد مقدار ق . وإذا أنقطع تأثير القوة فى نهاية هذه المدة وبقيت المقاومة بدون تغيير . أوجد متى يصل الجسم لحالة السكون .

الحل

الحركة تحت تأثير القوة : ع. = ٠ ، ف = ٢٤٥ سم ، ن = ١٠ ث

∵ ف = ع. ن + ٠,٥ جـ ن^{٢} ∴ ٢,٤٥ = ٠ + ٠,٥ × جـ × ١٠ ∴ جـ = ٠,٠٤٩ م / ث^{٢}

، معادلة الحركة : ق – م = ك جـ

∴ ق – ٠,١ × ٢ × ٩,٨ = ٢ × ٠,٠٤٩ ∴ ق = ٠,٠٩٨ + ١,٩٦ = ٢,٠٥٨ نيوتن = $\frac{٢,٠٥٨}{٩,٨}$ = ٠,٢١ ث كجم

، ∴ ع = ع. + جـ ن = ٠ + ٠,٠٤٩ × ١٠ = ٠,٤٩ م / ث

الحركة عند انقطاع القوة : – م = ك جـ ∴ – ٠,١ × ٢ × ٩,٨ = ٢ جـ$'$ ∴ جـ$'$ = – ٠,٩٨ م / ث^{٢}

، ع = ع. + جـ$'$ ن ∴ ٠ = ٠,٤٩ – ٠,٩٨ ن ∴ ن = ٠,٥ ث

---

(١٤) قطار كتلته ٢٤٥ طناً (بما فى ذلك القاطرة) يتحرك بعجلة منتظمة مقدارها ١٥ سم / ث فإذا كانت مقاومة الهواء والاحتكاك تعادل ٤ ثقل كجم لكل طن من كتلة القطار . فأوجد قوة آلات القاطرة . وإذا انفصلت عن القطار العربة الأخيرة وكتلتها ٤٩ طناً بعد أن تحرك القطار من السكون ٤,٩ دقيقة . فأوجد العجلة التى يتحرك بها القطار وكذا الزمن الذى تأخذه العربة المنفصلة حتى تقف .

الحل

معادلة الحركة : ق – م = ك جـ

∴ ق – ٤ × ٢٤٥ × ٩,٨ = ٢٤٥ × ١٠٠٠ × ٠,١٥ ∴ ق = ٤٦٣٥٤ نيوتن = ٤٧٣٠ ث كجم

السرعة المشتركة للقطار والعربة لحظة الانفصال : ع = ع. + جـ ن = ٠ + ٠,١٥ × ٤,٩ × ٦٠ = ٤٤,١ م / ث

حركة باقى القطار بعد الانفصال : ق – م$'$ = ك$'$ جـ$'$

∴ ٤٦٣٥٤ – ٤ (٢٤٥ – ٤٩) × ٩,٨ = (٢٤٥ – ٤٩) × ١٠٠٠ جـ$'$

∴ جـ$'$ = ٠,١٩٧٣ م / ث^{٢} وهى العجلة التى يتحرك بها القطار

حركة العربة بعد الانفصال : – م$''$ = ك$''$ جـ$''$

∴ – ٤ × ٤٩ × ٩,٨ = ٤٩ × ١٠٠٠ جـ$''$ ∴ جـ$''$ = – ٠,٠٣٩٢ م / ث^{٢}

، ∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٠ = ٤٤,١ – ٠,٠٣٩٢ ن ∴ ن = ١١٢٥ ث = ١٨,٧٥ دقيقة

---

(١٥) بالون كتلته ١٠٥٠ كجم يتحرك بسرعة منتظمة رأسياً إلى أعلى سقط منه جسم كتلته ٧٠ كجم . أوجد العجلة التى يصعد بها البالون بعد ذلك . وإذا كانت سرعة البالون قبل سقوط الجسم ٥٠ سم / ث . أوجد :

أولاً : المسافة التى يقطعها البالون بعد ذلك فى ١٠ ثوان .

ثانياً : المسافة بين البالون والجسم بعد هذه المدة .

الحل

∵ البالون يتحرك بسرعة منتظمة ∴ قوة دفع الهواء ق = ك د = ١٠٥٠ ث . كجم

بعد سقوط الجسم : ق – ك/ د = ك/ جـ ∴ ١٠٥٠ × ٩,٨ – (١٠٥٠ – ٧٠) × ٩,٨ = (١٠٥٠ – ٧٠) جـ

∴ جـ = ٠,٧ م / ث٢

المسافة التى تحركها البالون بعد ذلك فى ١٠ ثوان = ف١

ف١ = ٠,٥ × ١٠ + ٠,٥ × ٠,٧ × ١٠٠ = ٤٠ متر

المسافة التى تحركها الجسم فى ١٠ ثوان = ف٢

ف٢ = ٠,٥ × ١٠ – ٠,٥ × ٩,٨ × ١٠٠ = - ٤٨٥ أى تحرك مسافة ٤٨٥ م لأسفل

∴ المسافة بينهما = ف١ + ف٢ = ٤٠ + ٤٨٥ = ٥٢٥ متراً .

---

(١٦) يتحرك جسيم كتلته الوحدة بتأثير قوة قـ = أ سـ + ب صـ حيث سـ ، صـ متجها وحدة متعامدين وكان متجه إزاحته يعطى كدالة فى الزمن من العلاقة : فـ = (٢ ن٢ + ١) سـ + (٣ ن٢ + ١) صـ . أوجد الثابتين أ ، ب .

الحل

عـ = (٤ ن) سـ + (٦ ن) صـ ، جـ = ٤ سـ + ٦ صـ

معادلة الحركة : قـ = ك جـ

∴ أ سـ + ب صـ = ١ × (٤ سـ + ٦ صـ) ∴ أ سـ + ب صـ = ٤ سـ + ٦ صـ

∴ أ = ٤ ، ب = ٦

تمارين (٣ – ٤) صفحة ٢١٩

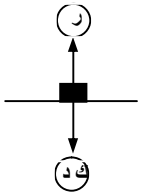
(١) شخص كتلته ٦٠ كجم موجود داخل مصعد ، عين رد فعل المصعد على هذا الشخص بوحدة النيوتن فى كل من الحالات الآتية :

أولاً : إذا كان المصعد ساكناً

ثانياً : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ١,٧ م / ث٢ موجهة رأسياً إلى أعلى .

ثالثاً : إذا تحرك المصعد بعجلة منتظمة مقدارها ٢,٨ م / ث٢ موجهة رأسياً إلى أسفل .

الحل



أولاً : ر = ك د = ٦٠ × ٩,٨ = ٥٨٨ نيوتن

ثانياً : ر – ك د = ك جـ

∴ ر = ٦٠ × ٩,٨ + ٦٠ × ١,٧ = ٦٩٠ نيوتن

ثالثاً : ك د – ر = ك جـ

∴ ر = ٦٠ × ٩,٨ – ٦٠ × ٢,٨ = ٤٢٠ نيوتن

---

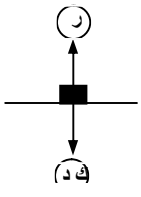
(٢) وضع جسم كتلته ٢ كجم على أرض مصعد . أوجد مقدار قوة ضغط هذا الجسم على أرض المصعد عندما يكون الأخير :

(أ) متحركاً بسرعة منتظمة .

(ب) متحركاً لأعلى بعجلة مقدارها ٩٨ سم / ث٢

(جـ) متحركاً لأسفل بعجلة مقدارها ٩٨ سم / ث٢

الحل



ملاحظة : ضغط الرجل على أرض المصعد = مقدار رد فعل المصعد عليه

أولاً : ر = ك د = ٢ × ٩,٨ = ١٩,٦ نيوتن = ٢ ث كجم

ثانياً : ر - ك د = ك جـ ∴ ر = ٢ × ٩,٨ + ٢ × ٠,٩٨ = ٢١,٥٨ نيوتن = ٢,٢ ث كجم .

ثالثاً : ك د – ر = ك جـ ∴ ر = ٢ × ٩,٨ – ٢ × ٠,٩٨ = ١٧,٦٤ نيوتن = ١,٨ ث كجم .

---

(٣) مصعد كهربائى يصعد بعجلة مقدارها ٧٠ سم / ث^{٢} به رجل ضغط رجله على أرض المصعد يساوى ٦٧,٥ ثقل كجم . أحسب كتلة الرجل .

الحل

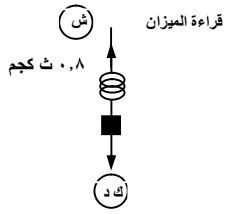
ر = ض = ٦٧,٥ × ٩,٨ = ٦٦,١٥ نيوتن ، ر – ك د = ك جـ

٦٦,١٥ – ك × ٩,٨ = ك × ٠,٧ ∴ ك = ٦٣ كجم .

---

(٤) علق جسم كتلته ١ كجم من نهاية ميزان زمبركى مثبت فى سقف مصعد . تحرك المصعد بعجلة منتظمة فأعطى الميزان قراءة ٨٠٠ ث جم . أوجد اتجاه عجلة المصعد ومقدارها .

الحل



ك د = ١ ث كجم ، ش = ٠,٨ ث كجم

∵ ك د > ش ∴ المصعد هابط لأسفل ∴ ك د – ش = ك جـ

∴ ١ × ٩,٨ – ٠,٨ × ٩,٨ = ١ × جـ ∴ جـ = ١,٩٦ م / ث^{٢} لأسفل .

---

(٥) يتحرك مصعد رأسياً وبه ميزان زمبركى معلق فيه جسم كتلته ٤٩٠ جم . وجد أن قراءة الميزان ٤٥٠ ث جم . فهل كان المصعد صاعداً أم هابطاً ؟ وما مقدار عجلة حركته ؟

الحل

ك د = ٤٩٠ ث جم ، ش = ٤٥٠ ث . جم

∵ ك د > ش ∴ عجلة الحركة لأسفل ∴ ك د – ش = ك جـ

∴ ٤٩٠ × ٩٨٠ - ٤٥٠ × ٩٨٠ = ٤٩٠ جـ ∴ جـ = ٨٠ سم / ث^{٢} لأسفل

---

(٦) علق جسم فى ميزان زمبركى فى سقف مصعد فسجل الميزان القراءة ١٦ ث . كجم عندما كان المصعد صاعداً بعجلة مقدارها جـ سم / ث^{٢} وسجل القراءة ١٧ ث . كجم عندما كان المصعد صاعداً بالعجلة $\frac{٣}{٢}$ جـ . أوجد كتلة الجسم ومقدار جـ .
أحسب أيضاً قراءة الميزان عندما يكون المصعد هابطاً بتقصير منتظم قدره $\frac{٣}{٢}$ جـ .

الحل

نفرض أن كتلة الجسم = ك كجم

الحالة الأولى : المصعد صاعد بعجلة جـ م / ث^{٢}

ش – ك د = ك جـ ∴ ١٦ × ٩,٨ – ك × ٩,٨ = ك جـ ∴ ك (جـ + ٩,٨) = ١٦ × ٩,٨ ..... (١)

الحالة الثانية : المصعد صاعد بعجلة $\frac{٣}{٢}$ جـ

ش – ك د = ك جـ / ∴ ١٧ × ٩,٨ – ك × ٩,٨ = ك × $\frac{٣}{٢}$ جـ

∴ ك (١,٥ جـ + ٩,٨) = ١٧ × ٩,٨ ..... (٢) بقسمة (٢) ÷ (١)

∴ $\frac{١,٥ \text{ جـ} + ٩,٨}{\text{جـ} + ٩,٨} = \frac{١٧}{١٦}$ ∴ ٢٤ جـ + ١٦ × ٩,٨ = ١٧ جـ + ١٧ × ٩,٨

∴ جـ = ١,٤ م / ث^{٢} وبالتعويض فى (١) ∴ ك = ١٤ كجم

عندما يكون المصعد هابط بعجلة – $\frac{٣}{٢}$ جـ تكون قراءة الميزان كما لو كان المصعد صاعد بعجلة $\frac{٣}{٢}$ جـ .

أى أن القراءة فى هذه الحالة = ١٧ ث كجم .

---

(٧) علق جسم فى نهاية ميزان زمبركى مثبت فى سقف مصعد ثم أخذت قراءة الميزان فى حالتى أن يكون المصعد متحركاً لأعلى بعجلة ما ثم لأسفل بنفس العجلة السابقة فكانت القراءتان كالآتى : ١,٢٢ ث كجم ، ٠,٧٨ ث كجم على الترتيب . عين كتلة الجسم وكذلك مقدار عجلة المصعد .

الحل

∵ ش – ك د = ك جـ ∴ ١,٢٢ × ٩,٨ – ك × ٩,٨ = ك جـ

∴ ك (جـ + ٩,٨) = ١,٢٢ × ٩,٨ ..... (١)

، ∵ ك د – ش/ = ك جـ ∴ ك × ٩,٨ – ٠,٧٨ × ٩,٨ = ك جـ

∴ ك (٩,٨ - جـ) = ٠,٧٨ × ٩,٨ ..... (٢) بقسمة (١) ÷ (٢)

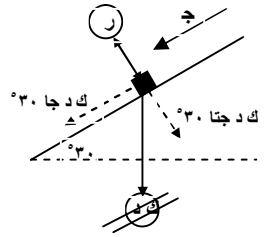
∴ $\frac{جـ + ٩,٨}{٩,٨ - جـ} = \frac{٦١}{٣٩}$ ∴ ٣٩ جـ + ٣٨٢,٢ = ٥٩٧,٨ – ٦١ جـ

∴ جـ = ٢,١٥٦ م / ث^{٢} وبالتعويض فى (١) ∴ ك = ١ كجم .

---

(٨) وضع جسم كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم ترك ليتحرك . أوجد مقدار قوة رد فعل المستوى عليه . وكذلك مقدار عجلته على المستوى

الحل



ر = ك د جتا ٣٠° = ٠,٥ × ٩,٨ جتا ٣٠°

= ٢,٤٥ $\sqrt{٣}$ نيوتن = ٢٥٠ $\sqrt{٣}$ ث . جم

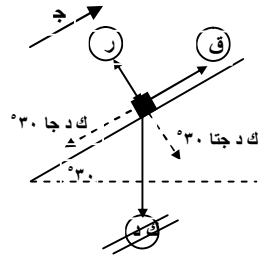
، ∵ الجسم ينزلق على المستوى الأملس تحت تأثير وزنه فقط

∴ جـ = د جا هـ = ٩,٨ × ٠,٥ = ٤٩٠ سم / ث^{٢}

---

(٩) وضع جسم كتلته ١ كجم على مستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ثم أثر عليه بقوة مقدارها ١٠ نيوتن تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى . أوجد مقدار قوة رد فعل المستوى على الجسم وعجلته .

الحل



ر = ك د جتا ٣٠° = ١ × ٩,٨ جتا ٣٠°

= ٤,٩ $\sqrt{٣}$ نيوتن = ٥٠٠ $\sqrt{٣}$ ث . جم

، ك د جا ٣٠° = ١ × ٩,٨ × ٠,٥ = ٤,٩ نيوتن

∵ ق > ك د جا ٣٠° ∴ الجسم يتحرك لأعلى

معادلة حركة الجسم : ق – ك د جا ٣٠° = ك جـ

∴ ١٠ – ٤,٩ = ١ × جـ ∴ جـ = ٥,١ م / ث^{٢} = ٥١٠ سم / ث^{٢}

---

(١٠) يتحرك جسم كتلته ٢ كجم على خط أكبر ميل لمستو أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° تحت تأثير قوة مقدارها ١ ث . كجم موجهة نحو المستوى وتصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٣٠° لأعلى . أوجد مقدار قوة رد فعل المستوى على الجسم وكذلك عجلته .

الحل

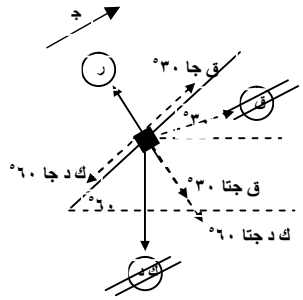
ر = ك د جتا ٦٠° + ق جا ٣٠° = ٢ × ٩,٨ × ٠,٥ + ١ × ٩,٨ × ٠,٥

= ٩,٨ + ٤,٩ = ١٤,٧ نيوتن = ١٤,٧ ÷ ٩,٨ = ١,٥ ث . كجم

ق جتا ٣٠° = ١ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، ك د جا ٦٠° = ٢ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$

∴ ك د جا ٦٠° > ق جتا ٣٠°

∴ عجلة الحركة لأسفل



معادلة الحركة :

ك د جا ٦٠° – ق جتا ٣٠° = ك جـ

٢ × ٩,٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ – ١ × ٩,٨ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ جـ

∴ جـ = ٢,٤٥ $\sqrt{٣}$ م / ث^{٢} = ٢٤٥ $\sqrt{٣}$ سم / ث^{٢}

---

(١١) قذف جسم إلى أعلى مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها ٠,١ وفى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وبسرعة مقدارها ٤٩ سم / ث . أوجد الزمن الذى يمضى حتى يعود الجسم إلى النقطة التى قذف منها .

الحل

∵ الجسم يتحرك تحت تأثير وزنه فقط لأعلى

∴ جـ = – د جا هـ = – ٠,١ × ٩٨٠ = – ٩٨ سم / ث^{٢}

عندما يعود الجسم إلى نقطة القذف فإن ف = ٠

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} ∴ ٠ = ٤٩ ن – ٤٩ ن^{٢} ∴ ٤٩ ن (١ – ن) = ٠

∴ ن = ٠ فى بداية الحركة أ، ن = ١ عندما يعود الجسم إلى نقطة القذف

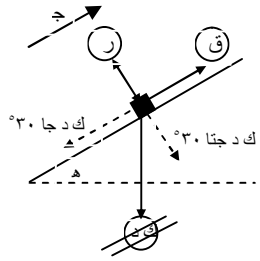
---

(١٢) جسم كتلته ٥٠٠ جم موضوع على مستوى أملس مائل يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{٣}{٥}$ أثرت عليه قوة تعادل ٥٠٠ ث جم إلى أعلى المستوى وفى اتجاه خط أكبر ميل . أوجد عجلة الحركة ، وإذا أنعدم تأثير القوة بعد مضى ثانيتين . أوجد المسافة التى يصعدها الجسم بعد ذلك حتى يسكن لحظياً .

الحل

ق = ٥٠٠ × ٩٨٠ ، ك د جا هـ = ٥٠٠ × ٩٨٠ × ٠,٦

∴ ق > ك د جا هـ ∴ الجسم يتحرك لأعلى المستوى



معادلة الحركة : ق – ك د جا هـ = ك جـ

٥٠٠ × ٩٨٠ – ٥٠٠ × ٩٨٠ × ٠,٦ = ٥٠٠ جـ

∴ جـ = ٣٩٢ سم / ث^{٢} لأعلى

، بعد مرور ٢ ثانية : ع = ع. + جـ ن = ٠ + ٣٩٢ × ٢ = ٧٨٤ سم / ث

<u>بعد انقطاع القوة</u> :

الجسم يتحرك تحت تأثير وزنه فقط لأعلى ∴ جـ = – د جا هـ = – ٥٨٨ سم / ث^{٢}

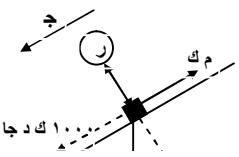
∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (٧٨٤)^{٢} – ٢ × ٥٨٨ ف ∴ ف = ٥٢٢ $\frac{٢}{٣}$ سم

---

(١٣) تحركت سيارة معطلة مبتدئة من السكون أسفل مستوى يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ فصارت سرعتها ٤٤,١ كم / س بعد ٢٥٠ ثانية . أحسب المقاومة عن كل طن من كتلة السيارة .

الحل

السيارة تتحرك أسفل المستوى أى تتحرك لأسفل



نفرض أن كتلة السيارة = ك طن = ١٠٠٠ ك كجم

، نفرض أن المقاومة لكل طن من كتلة السيارة = م نيوتن

∴ المقاومة الكلية = م ك نيوتن

ع. = ٠ ، ع = ٤٤,١ × = ١٢,٢٥ م / ث

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ١٢,٢٥ = ٠ + ٢٥٠ جـ ∴ جـ = ٠,٠٤٩ م / ث^{٢}

معادلة الحركة : ١٠٠٠ ك د جا هـ – م ك = ١٠٠٠ ك جـ وبالقسمة على ك

∴ ١٠٠٠ × ٩,٨ × ٠,٠١ – م = ١٠٠٠ × ٠,٠٤٩ ∴ م = ٤٩ نيوتن = ٥ ث كجم

---

(١٤) قطار كتلته ٢٤٠ طناً يسير فى طريق أفقى بعجلة منتظمة ٢,٤٥ سم / ث^{٢} فإذا كانت قوة آلاته تعادل ٢٠٠٠ ث كجم فما مقدار المقاومة لكل طن من كتلة القطار . وإذا صعد هذا القطار أعلى منحدر يميل على الأفقى بزاوية هـ حيث جا هـ = $\frac{١}{٥٠٠}$ فما العجلة التى يتحرك بها القطار أعلى المنحدر علماً بأن المقاومة لم تتغير ؟

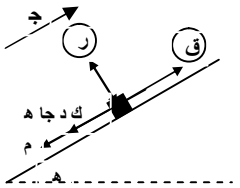
الحل

الحركة الأفقية : نفرض أن المقاومة لكل طن = م ث كجم

معادلة الحركة : ق – م = ك جـ

∴ ٢٠٠٠ × ٩,٨ – م × ٢٤٠ × ٩,٨ = ٢٤٠ × ١٠٠٠ × ٩,٨ × ٠,٢٤٥ ∴ م = $\frac{٣٥}{٦}$ ث كجم لكل طن

الحركة لأعلى المستوى المائل :



معادلة الحركة : ق – م – ك د جا هـ = ك جـ

∴ ٩,٨ (٢٠٠٠ – $\frac{٣٥}{٦}$ × ٢٤٠ – ٢٤٠٠٠٠ × $\frac{١}{٥٠٠}$) = ٢٤٠٠٠٠ × جـ

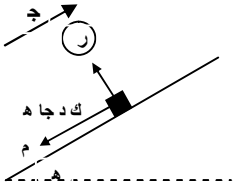
∴ جـ = ٠,٠٠٤٩ م / ث^{٢} = ٠,٤٩ سم / ث^{٢}

---

(١٥) مستوى مائل خشن طوله ٤٠ متراً وارتفاعه ١٠ أمتار . أوجد أصغر سرعة يقذف بها جسم من أسفل نقطة فى المستوى المائل وفى اتجاه خط أكبر ميل فيه لكى يصل بالكاد إلى أعلى نقطة فيه ، علماً بأن الجسم يلاقى مقاومات تعادل $\frac{١}{٤}$ وزنه .

الحل

ملاحظة : عندما يصل الجسم بالكاد إلى أعلى نقطة تكون ع = ٠



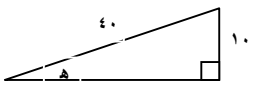
نفرض كتلة الجسم = ك كجم

معادلة الحركة :

– م – ك د جا هـ = ك جـ

– $\frac{١}{٤}$ ك × ٩,٨ – ك × ٩,٨ × $\frac{١}{٤}$ = ك جـ

∴ جـ = – ٠,٥ × ٩,٨



∴ جـ = – ٤,٩ م / ث^{٢}

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف ،

∴ ٠ = ع.^{٢} – ٢ × ٤,٩ × ٤٠ ∴ ع = ١٤ $\sqrt{٢}$ م / ث

تمارين (٣ – ٥) صفحة ٢٣٢

(١) عربة سكة حديد كتلتها ٢١ طن تسير بسرعة ١٤ متر / ث . أوقفها حاجز للتصادم فى زمن قدره ٠,٣ ثانية . أوجد مقدار الدفع ، ومقدار متوسط القوة بثقل الطن .

الحل

الدفع = د = ك (ع – ع.) = ٢١٠٠٠ × ١٤ كجم . م / ث = ٢٩٤ × ١٠ ^٨ داين . ث

∵ الدفع = ق × ن ∴ ق × ٠,٣ = ٢١٠٠٠ × ١٤

∴ القوة = ٩٨٠٠٠٠ نيوتن = ١٠٠٠٠٠ ث كجم = ١٠٠ ث طن

---

(٢) كرة كتلتها ٥٠ جم سقطت من ارتفاع ٢,٥ متر على أرض أفقية فارتدت إلى ارتفاع ٠,٩ متر . أوجد متوسط القوة بين الكرة والأرض إذا كان زمن التلامس ٠,١ ثانية .

الحل

∵ الكرة سقطت ∴ ع. = ٠ ، ف = ٢,٥ م ، د = ٩,٨ م / ث^٢

∵ ع^٢ = ع.^٢ + ٢ د ف ∴ ع^٢ = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ٢,٥ = ٤٩ ∴ ع = ٧ م / ث

، عند الارتداد : ع^٢ = ع.^٢ + ٢ د ف ∴ ٠ = ع.^/٢ – ٢ × ٩,٨ × ٠,٩

∴ ع.^/٢ = ١٧,٦٤ ∴ ع.^/ = ٤,٢ م / ث ∴ سرعة التصادم = ٧ م / ث ، سرعة الارتداد = ٤,٢ م / ث

∴ الدفع : ق × ٠,١ = ٠,٠٥٠ (٤,٢ + ٧) ∴ ق = ٥,٦ نيوتن (يصحح الجواب بالكتاب)

---

(٣) كرة كتلتها ٥٠٠ جم سقطت من ارتفاع ٢,٥ متر على سطح سائل لزج فغاصت فيه بسرعة منتظمة وقطعت مسافة ٣,٥ متر فى ٢ ثانية . أحسب دفع السائل للكرة .

الحل

ع^٢ = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ٢,٥ = ٤٩ ∴ سرعة التصادم : ع = ٧ م / ث

، السرعة داخل السائل (منتظمة) : ع^/ = ٣,٥ ÷ ٢ = ١,٧٥ م / ث

∴ دفع السائل على الكرة : د = ك (ع^/ - ع) = ٠,٥ (١,٧٥ – ٧) = – ٢١/٨

أى أن الدفع = ٢١/٨ كجم . متر / ث لأعلى .

---

(٤) تتحرك كرة ملساء كتلتها ١٥٠ جم على أرض أفقية فى خط مستقيم بسرعة ٠,٦ متر / ث اصطدمت هذه الكرة بحائط رأسى وعمودى على اتجاه حركتها فارتدت منه بسرعة ٢٠ سم / ث . عين مقدار دفع الحائط على الكرة .

الحل

دفع الحائط على الكرة = ٠,١٥ (٠,٢ + ٠,٦) = ٠,١٢ نيوتن . ث

---

(٥) اصطدمت كرة ملساء كتلتها ٤٠٠ جم ومتحركة على أرض أفقية بسرعة ١٠٠ سم / ث تصادماً مباشراً بحائط رأسى فأثر عليها بدفع مقداره ٠,٤٨ نيوتن . ث عين سرعة ارتداد الكرة من الحائط .

الحل

نتخذ ى متجه وحدة فى اتجاه ع النهائية (سرعة الارتداد)

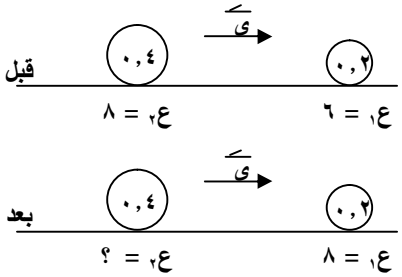
∵ د = ك (ع – ع.) ∴ ٠,٤٨ × ١٠° ى = ٤٠٠ (ع + ١٠٠ ى)

∴ سرعة الارتداد : ع = ٢٠ سم / ث

---

(٦) تتحرك كرتان ملساوان كتلتاهما ٠,٢ كجم ، ٠,٤ كجم فى خط مستقيم واحد على أرض أفقية وكانت سرعة الأولى ٦ متر / ث وسرعة الثانية ٨ متر / ث فى نفس اتجاه حركة الأولى . تصادمت الكرتان فزادت سرعة الكرة الأولى نتيجة للتصادم بمقدار ٢ متر / ث . عين سرعة الكرة الثانية بعد التصادم مباشرة ومقدار دفع أى من الكرتين على الأخرى .

الحل



∵ ك١ ع١ + ك٢ ع٢ = ك١ ع١/ + ك٢ ع٢/

∴ ٠,٢ × ٦ ى + ٠,٤ × ٨ ى = ٠,٢ × ٨ ى + ٠,٤ × ع٢/

∴ ع٢/ = ٧ ى

أى أن سرعة الكرة الثانية = ٧ م / ث فى نفس اتجاه حركتها

∵ الدفع = التغير فى كمية حركة أحدى الكرتين

∴ د = ٠,٢ × (٨ – ٦) = ٠,٤ نيوتن . ث

---

(٧) تتحرك كرتان ملساوان كتلتاهما ١٠٠ جم ، ٢٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على أرض أفقية وكانت سرعة الأولى ١ متر / ث وسرعة الثانية ٢ متر / ث فى الاتجاه المضاد ، فإذا تصادمت الكرتان واستمرت الكرة الثانية فى نفس اتجاه حركتها بسرعة ٠,٧٥ متر / ث بعد التصادم ، عين سرعة الكرة الأولى ودفع الثانية عليها .

الحل

∵ ك١ ع١ + ك٢ ع٢ = ك١ ع١/ + ك٢ ع٢/

∴ ٠,١ × ١ ى + ٠,٢ × (– ٢) ى = ٠,١ × ع١/ + ٠,٢ × (– ٠,٧٥) ى ∴ ع١/ = – ١,٥ ى

أى أن الكرة الأولى ارتدت بسرعة ١,٥ م / ث

∵ دفع الكرة الثانية على الأولى = التغير فى كمية حركة الكرة الثانية

∴ د = ٠,٢ × (- ٠,٧٥ + ٢) = – ٠,٢٥ نيوتن . ث ∴ مقداره = ٠,٢٥ نيوتن . ث

---

(٨) تتحرك كرة ملساء كتلتها ٢٠٠ جم على نضد أفقى فى خط مستقيم بسرعة ٦٠ سم / ث صدمت هذه الكرة كرة ثانية ملساء ساكنة على النضد كتلتها ٤٠٠ جم . فإذا سكنت الكرة الأولى نتيجة للتصادم . أثبت أن الثانية تتحرك بسرعة ٣٠ سم / ث بعد التصادم ، ثم أوجد مقدار الدفع المتبادل بين الكرتين .

الحل

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

∴ ٢٠٠ × ٦٠ + ٤٠٠ × ٠ = ٢٠٠ × ٠ + ٤٠٠ ع ∴ ع = ٣٠ سم / ث

∵ الدفع المتبادل = التغير فى كمية حركة إحدى الكرتين

∴ د = ٢٠٠ (٦٠ – ٠) = ١٢٠٠٠ داين . ث (يصحح الجواب بالكتاب)

---

(٩) يتحرك جسمان كتلتاهما ٢٠٠ جم ، ٨٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى بسرعة ٤ متر/ ث فى اتجاهين متضادين فإذا تحرك الجسمان بعد التصادم كجسم واحد ، أوجد السرعة بعد التصادم .

الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسم الثانى

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

∴ ٠,٢ × (– ٤) + ٠,٨ × ٤ = (٠,٢ + ٠,٨) × ع ∴ ع = ٢,٤ م / ث فى اتجاه الجسم الثانى

---

(١٠) تتحرك كرتان ملساوان كتلتاهما ك ، ٢ ك على نضد أفقى أملس فى خط مستقيم واحد وفى نفس الاتجاه . بحيث كانت الكرة الصغرى فى الأمام وسرعتها ١٠ متر / ث . والكرة الكبرى فى الخلف وسرعتها ١٢ متر / ث . وبعد التصادم تحركت الكرة الصغرى فى نفس اتجاه حركتها السابقة بسرعة ١٢ متر / ث . فما هى سرعة الكرة الكبرى بعد التصادم .

الحل

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

∴ ك × ١٠ + ٢ ك × ١٢ = ك × ١٢ + ٢ ك × ع بالقسمة ÷ ك

∴ ١٠ + ٢٤ = ١٢ + ٢ ع ∴ ع = ١١ م / ث فى نفس الاتجاه

---

(١١) قذفت كرتان ملساوان متساويتا الكتلة على نضد أفقى أملس . بحيث تحركتا على خط مستقيم واحد ، الأولى بسرعة ٣٠ سم/ ث ، والثانية بسرعة ٢٠ سم / ث فى اتجاه مضاد للأولى ، فإذا ارتدت الكرة الثانية بعد التصادم بسرعة ١٠ سم / ث ، أوجد سرعة الكرة الأولى بعد التصادم .

الحل

ع١ = ٣٠ سم / ث ، ع٢ = – ٢٠ سم / ث ، ع٢/ = ١٠ سم / ث

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

∴ ك × ٣٠ + ك × (– ٢٠) = ك × ع١/ + ك × ١٠

∴ ١٠ = ع١/ + ١٠ ∴ ع١/ = ٠ أى أن الكرة الأولى تسكن بعد التصادم

---

(١٢) قذفت كرتان ملساوان على نضد أفقى أملس بحيث تحركتا على خط مستقيم واحد وفى نفس الاتجاه . فإذا كانت كتلة الكرة الأمامية تساوى ٥٠٠ جم ، ومقدار سرعتها ٢٠ سم / ث ، وكتلة الكرة الخلفية ٢٠٠ جم ومقدار سرعتها ٥٠ سم / ث . أوجد سرعة الكرتين بعد التصادم علماً بأنهما التحمتا فى جسم واحد .

الحل

٥٠٠ × ٢٠ + ٢٠٠ × ٥٠ = (٥٠٠ + ٢٠٠) × ع ∴ ع = ٧/٢٠٠ سم / ث

---

(١٣) تتحرك كرتان ملساوان كتلة كل منهما ٤٠٠ جم فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى أملس بسرعة ٤ متر / ث فى نفس الاتجاه وبينهما مسافة ما . وضع حاجز على النضد بحيث يقطع مسار الكرتين على التعامد فاصطدمت به الكرة الأمامية وارتدت لتصطدم الكرة الخلفية ثم ارتدت مرة ثانية بسرعة ٢ متر / ث . عين سرعة الكرة الخلفية بعد التصادم علماً بأن الحاجز قد أثر على الكرة الأولى بدفع مقداره ٢,٨ نيوتن . ث .

الحل

نتخذ $\overleftarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه مضاد لحركة الكرتين فى البداية

تصادم الكرة الأمامية بالحاجز :

د = ك (ع – ع.) ∴ ٢,٨ = ٠,٤ (ع – (– ٤ $\overleftarrow{ى}$)) ∴ ع = ٣ $\overleftarrow{ى}$

أى أن الكرة الأمامية ترتد بعد التصادم بالحاجز بسرعة ٣ متر / ث فى الاتجاه المضاد

تصادم الكرتين :

٠,٤ × ٣ $\vec{ى}$ + ٠,٤ × ع = ٠,٤ × (– ٢ $\vec{ى}$) + ٠,٤ × ع ∴ $\vec{ع}$ = ١ $\vec{ى}$

أى أن الكرة الخلفية ترتد بسرعة ١ م / ث

---

(١٤) كرة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم سقطت من ارتفاع ٣,٦ متر على أرض أفقية فارتدت وبلغت ارتفاعاً مقداره ١,٦ متر .
أوجد متوسط القوة بين الكرة والأرض إذا تلامستا مدة ٠,٠١ ثانية .

الحل

نتخذ $\vec{ى}$ متجه وحدة رأسى لأعلى

سرعة الكرة ع١ قبل التصادم : ع١ = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ٣,٦ ∴ ع١ = ٨,٤ م / ث

سرعة الكرة ع٢ بعد التصادم : ٠ = ع٢ ٢ – ٢ × ٩,٨ × ١,٦ ∴ ع٢ = ٥,٦ م / ث

∵ ق × ن = ك (ع٢ – ع١) ∴ ق × ٠,٠١ = $\frac{٣}{٧}$ [٥,٦ – (– ٨,٤)]

∴ ق = ٧٠٠ نيوتن = ٧١ $\frac{١}{٢}$ ث كجم

---

(١٥) أطلقت رصاصة كتلتها ١٥ جم بسرعة مقدارها ١٤٥٠,٨ متر / دقيقة على هدف ساكن كتلته ٢ كجم فالتصقت به وتحرك الجسمان بعد التصادم كجسم واحد . برهن على أن سرعة هذا الجسم عقب الإصابة مقدارها ١٨ سم / ث . وإذا لاقى هذا الجسم مقاومة ثابتة أثناء حركته وسكن بعد أن قطع مسافة ٨١ سم ، أوجد هذه المقاومة .

الحل

سرعة الرصاصة قبل التصادم = ١٤٥٠,٨ × ١٠٠ ÷ ٦٠ = ٢٤١٨ سم / ث

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

١٥ × ٢٤١٨ + ٢٠٠٠ × صفر = ٢٠١٥ × ع ∴ ع = ١٨ سم / ث

معادلة الحركة : -- م = ك جـ ..... (١)

∵ ع٢ = ع. ٢ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (١٨)٢ + ٢ × ٨١ جـ ∴ جـ = -- ٢ سم / ث٢

---

(١٦) كرة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم تتحرك فى خط مستقيم بسرعة مقدارها ٤٤ سم / ث فإذا اصطدمت بكرة أخرى ساكنة على النضد وكتلتها ١ $\frac{١}{٢}$ كجم وتحركتا معاً كجسم واحد أوجد السرعة المشتركة لهما بعد التصادم مباشرةً .
وإذا فرض أن الجسم يتحرك بعد التصادم ضد مقاومة ثابتة فوقف بعد قطع مسافة قدرها ١١ سم . أوجد المقاومة .

الحل

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم

∴ ٥٠٠ × ٤٤ + ٠ = (٥٠٠ + ١٥٠٠) × ع ∴ ع = ١١ سم / ث

معادلة حركة الجسم بعد التصادم : – م = ك جـ .....(١)

∵ ع٢ = ع.٢ + ٢ جـ ف ∴ ٠ = (١١)٢ + ٢ × ١١ جـ ∴ جـ = – ٥,٥ سم / ث٢

ومن (١) : ∴ –م = ٢٠٠٠ × (- ٥,٥) ∴ م = ١١٠٠٠ داين

---

(١٧) تتحرك كرة كتلتها ١٢٠ جم بسرعة منتظمة ٤٠ سم / ث وبعد مرورها بموضع معين وبزمن قدره دقيقة واحدة تحركت من نفض الموضع كرة أخرى كتلتها ٨٠ جم بسرعة ابتدائية ٦٠ سم / ث وبعجلة تزايدية ٤ سم / ث٢ فى نفس اتجاه حركة

الكرة الأولى فإذا تصادمت الكرتان وتحركتا معاً كجسم واحد ، أحسب السرعة المشتركة لهما بعد التصادم مباشرةً .
وإذا تحرك الجسم بعد التصادم تحت تأثير مقاومة ثابتة تساوى ٣٨٤٠ داين . أحسب متى يسكن الجسم .

الحل

الكرة ١٢٠ جم تتحرك فى مدة دقيقة مسافة ف = ٤٠ × ٦٠ = ٢٤٠٠ سم (منتظمة)
نفرض أن الزمن الذى بعده تصطدم الكرتان من لحظة تحرك الكرة الثانية هو ن ثانية
وتكون الكرة ١٢٠ جم قطعت مسافة ف سم
∴ المسافة التى قطعتها الكرة ٨٠ جم = (ف + ٢٤٠٠) سم
حركة الكرة الأولى : ف = ٤٠ ن .....(١)
حركة الكرة الثانية : ∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} ∴ (ف + ٢٤٠٠) = ٦٠ ن + $\frac{١}{٢}$ × ٤ ن^{٢}
∴ ف + ٢٤٠٠ = ٦٠ ن + ٢ ن^{٢} .....(٢)
من (١) ، (٢) بالطرح ∴ ٢٤٠٠ = ٢٠ ن + ٢ ن^{٢} ∴ ن = ٣٠ ث أ، ـ ٤٠ مرفوض
سرعة الكرة الثانية قبل التصادم : ع = ٦٠ + ٤ × ٣٠ = ١٨٠ سم / ث
∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم
∴ ١٢٠ × ٤٠ + ٨٠ × ١٨٠ = (١٢٠ + ٨٠) × ع ∴ ع = ٩٦ سم / ث
معادلة حركة الجسم بعد التصادم : ـ م = ك جـ
∴ - ٣٨٤٠ = ٢٠٠ جـ ∴ جـ = ـ ١٩,٢ سم / ث^{٢}
، ∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٠ = ٩٦ ـ ١٩,٢ ن ∴ ن = ٥ ث

---

(١٨) أ ب جـ هو خط أكبر ميل فى مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° حيث أ جـ = ١٩,٦ متر وكانت أ هى النقطة العليا ، ب هى منتصف أ جـ . وضعت كرة كتلتها ٣ جم عند أ فتحركت على أ جـ واصطدمت عند ب بكرة أخرى ساكنة كتلتها ١ جم فإذا كونت الكرتان بعد التصادم جسماً واحداً . أوجد الزمن الذى يمضى بعد التصادم حتى يصل الجسم إلى جـ .

الحل

∵ المستوى أملس ∴ الكرة عند أ تتحرك لأسفل بعجلة = د جا هـ ∴ جـ = ٩٨٠ × $\frac{١}{٢}$ = ٤٩٠ سم / ث^{٢}
<u>الفترة أ ب</u> : ع^{٢} = ٠ + ٢ × ٤٩٠ × ٩٨٠ ∴ ع = ٩٨٠ سم / ث
∴ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموعهما بعد التصادم
∴ ٣ × ٩٨٠ + ١ × ٠ = ٤ ع ∴ ع = ٧٣٥ سم / ث
<u>حركة الجسم بعد التصادم</u> : (ب جـ = $\frac{١٩٢٠}{٢}$ = ٩٨٠ سم)
∴ ٩٨٠ = ٧٣٥ ن + $\frac{١}{٢}$ × ٤٩٠ × ن^{٢} ∴ ن^{٢} + ٣ ن ـ ٤ = ٠ ∴ ن = ١ ث أ، ن = ـ ٤ مرفوض

---

(١٩) سقطت كرة من المطاط كتلتها كيلو جرام واحد من ارتفاع ٤,٩ متر على سطح أرض أفقية صلبة فارتدت إلى أقصى ارتفاع لها وهو ٢,٥ متر ، أحسب مقدار التغير فى كمية حركة الكرة نتيجة اصطدامها بالأرض ، ثم أوجد مقدار رد فعل الأرض على الكرة بالنيوتن إذا كان زمن تلامس الكرة بالأرض ٠,١ ثانية .

الحل

نتخذ $\vec{ى}$ متجه وحدة لأعلى

سرعة الكرة قبل التصادم : $ع^{٢} = ٠ + ٢ \times ٩,٨ \times ٤,٩$ **∴** $ع = ٩,٨$ **م / ث** **∴** $\vec{ع} = - ٩,٨ \vec{ى}$

سرعة الكرة بعد التصادم : $٠ = ع_{/}^{٢} - ٢ \times ٩,٨ \times ٢,٥$ **∴** $ع_{/} = ٧$ **م / ث** **∴** $\vec{ع_{/}} = ٧ \vec{ى}$

مقدار التغير فى كمية الحركة = ك ($ع_{/} - ع$ **) =** $١ \times (٧ \vec{ى} + ٩,٨ \vec{ى}) = ١٦,٨$ **كجم . م / ث**

∵ $ق \times ن = ١٦,٨$ **∴** $ق \times ٠,١ = ١٦,٨$ **∴ ق = ١٦٨ نيوتن** **(يصحح الجواب بالكتاب)**

تمارين (٤ – ١) صفحة ٢٤٧

(١) يتحرك جسيم فى خط مستقيم من النقطة أ = (– ١ ، – ٢) إلى النقطة ب = (١ ، – ٣) تحت تأثير قوة $\overleftarrow{ق}$ حيث $\overleftarrow{ق} = – \overleftarrow{س} – \frac{١}{٢} \overleftarrow{ص}$ ، والتحليل منسوب إلى اتجاهين متعامدين و $\overleftarrow{س}$ ، و $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة فى هذين الاتجاهين، أحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة .

الحل

$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} – \overleftarrow{أ} = (١ ، – ٣) – (– ١ ، – ٢) = ٢ \overleftarrow{س} – \overleftarrow{ص}$

$ش = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف} = (– \overleftarrow{س} – \frac{١}{٢} \overleftarrow{ص}) \odot (٢ \overleftarrow{س} – \overleftarrow{ص})$

$= – ١ \times ٢ + (– \frac{١}{٢}) \times (– ١) = – \frac{٣}{٢} = – ١,٥$

---

(٢) أثرت القوة $\overleftarrow{ق} = - ٤ \overleftarrow{س}$ على جسيم فحركته من نقطة الأصل و = (٠ ، ٠) إلى النقطة أ = (٢ ، ٠) على خط مستقيم ، ثم إلى النقطة ب = (٧ ، ٢) على خط مستقيم أيضاً ، أحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال كل من الإزاحتين ، ثم أثبت أن مجموع الشغلين يساوى الشغل المبذول على الإزاحة المحصلة .

الحل

$ش_١ = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف}_١ = (– ٤ \overleftarrow{س} + ٠ \overleftarrow{ص}) \odot (٢ \overleftarrow{س} + ٠ \overleftarrow{ص})$

$= – ٤ \times ٢ + ٠ \times ٠ = – ٨$

$، \overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} – \overleftarrow{أ} = (٧ ، ٢) – (٢ ، ٠) = ٥ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$

$\therefore ش_٢ = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف}_٢ = (– ٤ \overleftarrow{س} + ٠ \overleftarrow{ص}) \odot (٥ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص})$

$= – ٤ \times ٥ + ٠ \times ٢ = - ٢٠$ **(يصحح الجواب بالكتاب)**

$، ش_١ + ش_٢ = – ٨ – ٢٠ = – ٢٨$ .....(١)

الإزاحة المحصلة = $\overleftarrow{ف} = \overleftarrow{و ب} = ٧ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص}$

$ش = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف} = (– ٤ \overleftarrow{س} + ٠ \overleftarrow{ص}) \odot (٧ \overleftarrow{س} + ٢ \overleftarrow{ص})$

$= – ٤ \times ٧ + ٠ \times ٢ = – ٢٨$ .....(٢)

من (١) ، (٢) $\therefore ش = ش_١ + ش_٢$

---

(٣) شدت عربة ترام بحبل أفقى يميل على خط الترام بزاوية قياسها ٦٠° فتحركت مسافة ١٥ متراً ، إذا كان الشد فى الحبل يساوى ١٥٠ ث . كجم ، أوجد الشغل الذى بذلته قوة الشد بالإرج .

الحل

$ش = \overleftarrow{ق} \odot \overleftarrow{ف} = \| \overleftarrow{ق} \| \| \overleftarrow{ف} \| جتا هـ = ١٥٠ \times ١٠ \times ٩٨٠ \times ١٥٠٠ \times \frac{١}{٢}$

$\therefore ش = ١١ \times (١٠)^{١٠}$ إرج

---

(٤) تحرك رجل صاعداً طريقاً مستقيماً يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° لمسافة ٣٠٠ متر ثم عاد أدراجه إلى نقطة البداية . أحسب الشغل المبذول الذى بذلته قوة الوزن خلال الرحلة الكلية ، وإذا كانت قوة المقاومة لحركة الرجل تساوى ٢ ث كجم طوال حركته ، عين الشغل الذى بذلته هذه القوة خلال الرحلة الكلية .

الحل

$\because$ **الرجل عاد أدراجه** $\therefore \overleftarrow{ف} = \overleftarrow{٠}$

$\therefore$ **الشغل المبذول الذى بذلته قوة الوزن خلال الرحلة الكلية =** $ش = \overleftarrow{و} \odot \overleftarrow{٠} = ٠$

، شغل المقاومة أثناء الصعود = ـ ٣٠٠ × ٢ = ـ ٦٠٠ ث كجم . متر

، شغل المقاومة أثناء الهبوط = ـ ٦٠٠ ث كجم . متر

∴ شغل المقاومة أثناء الرحلة = ـ ١٢٠٠ ث كجم . متر

(تصحح إشارة الجواب بالكتاب لأن شغل المقاومة دائماً سالب)

---

(٥) أثرت قوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ على جسيم فكان متجه موضع الجسيم عند لحظة زمنية تتعين من العلاقة :
$\overrightarrow{ر} = (ن + ٥)\overrightarrow{س} + (ن^{٢} + ٤)\overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها الوحدة الأساسيين ، معيار $\overrightarrow{ق}$ بالنيوتن ووحدة المسافة بالمتر، أحسب الشغل المبذول من القوة من ن = ١ إلى ن = ٥ .

الحل

∵ $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر}_{ن} - \overrightarrow{ر}_{ن-١} = (ن + ٥)\overrightarrow{س} + (ن^{٢} + ٤)\overrightarrow{ص} - (٥\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص})$

∴ $\overrightarrow{ف} = ن\overrightarrow{س} + ن^{٢}\overrightarrow{ص}$

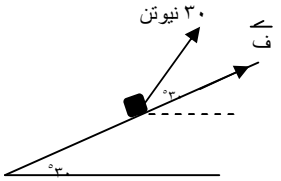
، $\overrightarrow{ف}_{ن} - \overrightarrow{ف}_{ن-١} = (٥\overrightarrow{س} + ٢٥\overrightarrow{ص}) - (\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}) = ٤\overrightarrow{س} + ٢٤\overrightarrow{ص}$

∵ ش = $\overrightarrow{ق} \odot \overrightarrow{ف}$ ∴ ش = $(٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}) \odot (٤\overrightarrow{س} + ٢٤\overrightarrow{ص})$ = ٨٠ جول

---

(٦) تحرك جسيم صاعداً على خط أكبر ميل لمستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° لمسافة ٤٠٠ سم تحت تأثير قوة مقدارها ٤٠ نيوتن تقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وتميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° . أحسب الشغل المبذول .

الحل



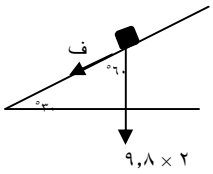
∵ القوة تصنع زاوية ٦٠° مع الأفقى

∴ تصنع مع المستوى (اتجاه الإزاحة) ٣٠°

∴ ش = $\|\overrightarrow{ق}\| \|\overrightarrow{ف}\|$ جتا ٣٠° = $٤٠ \times ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = $٨٠\sqrt{٣}$ جول

---

(٧) جسم كتلته ٢ كجم موضوع على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ، أوجد مقدراً بالجول الشغل الذى تبذله قوة الوزن عندما يتحرك الجسم مسافة ٥ أمتار على خط أكبر ميل لأسفل .



الحل

ش = $\|\overrightarrow{و}\| \|\overrightarrow{ف}\|$ جتا ٦٠°

= $٢ \times ٩,٨ \times ٥ \times \frac{١}{٢}$ = ٤٩ جول

- **استخدم القياسات الجبرية فى حل التمارين الآتية :**

(٨) يتحرك جسيم فى خط مستقيم تحت تأثير قوة مقدارها ٤٠٠ داين وتعمل فى اتجاه الحركة ، أحسب الشغل المبذول بواسطة هذه القوة خلال إزاحة مقدارها ٣٠٠ سم .

الحل

∵ القوة تعمل فى اتجاه الإزاحة ∴ ش = ق × ف = ٤٠٠ × ٣٠٠ = ١٢٠٠٠٠ إرج

---

(٩) أوجد الشغل الذى تبذله قوة الوزن عند رفع جسم كتلته ٤ طن رأسياً لمسافة ١٢ متراً .

الحل

اتجاه قوة الوزن لأسفل ، اتجاه الإزاحة لأعلى

ش = ـ و × ف = ـ ٤٠٠ × ٩,٨ × ١٢ = ـ ٤٧٠٤٠٠ جول = ـ ٤٨٠٠٠ ث كجم . متر

(١٠) أوجد الشغل المبذول فى تحريك كتلة مقدارها ١٠٠ جرام مسافة ١٥٠ سم بعجلة مقدارها ٥ سم / ث^{٢}

الحل

∵ ق = ك جـ ∴ ق = ١٠٠ × ٥ = ٥٠٠ داين ∴ ش = ق × ف = ٥٠٠ × ١٥٠ = ٧٥٠٠٠ إرج

---

(١١) سيارة كتلتها ٦ طن تصعد منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ ضد مقاومات تعادل ١٠ ث كجم لكل طن من كتلة السيارة فاكتسبت سرعة مقدارها ٦٣ كم / ساعة فى $١٢\frac{١}{٢}$ ثانية ، أحسب الشغل المبذول من هذه القوة .

أولاً : من قوة محرك السيارة . ثانياً : من قوى المقاومات .

ثالثاً : من وزن السيارة . رابعاً : ضد وزن السيارة .

الحل

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٦٣ × $\frac{٥}{١٨}$ = ٠ + جـ × ١٢,٥ ∴ جـ = ١,٤ م / ث^{٢}

، ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ١,٤ × (١٢,٥)^{٢} = ١٠٩,٣٧٥ متراً

معادلة الحركة : ق – م – ك د جا هـ = ك جـ

∵ م = ١٠ × ٦ × ٩,٨ × ٠,٠١ = ٥٨٨ نيوتن

، ك د جا هـ = ٦ × ١٠٠٠ × ٩,٨ × ٠,٠١ = ٥٨٨ نيوتن

ومن معادلة الحركة :

∴ ق – ٥٨٨ – ٥٨٨ = ٦ × ١٠٠٠ × ١,٤ ∴ ق = ٩٥٧٦ نيوتن

أولاً : ش$_{١}$ = ق × ف = ٩٥٧٦ × ١٠٩,٣٧٥ = ١٠٦٨٧٥ ث كجم . متر

ثانياً : ش$_{٢}$ = – م × ف = - ٥٨٨ × ١٠٩,٣٧٥ = – ٦٥٦٢,٥ ث كجم . متر

ثالثاً : ش$_{٣}$ = – ك د جا هـ × ف = - ٥٨٨ × ١٠٩,٣٧٥ = – ٦٥٦٢,٥ ث كجم . متر

رابعاً : ش$_{٤}$ = – ش$_{٣}$ = ٦٥٦٢,٥ ث كجم . متر

---

(١٢) وضع جسم عند قمة مستوى مائل خشن ارتفاعه متر فانزلق ووصل إلى قاعدة المستوى بسرعة ١٨٠ متر / دقيقة فإذا كانت كتلته ١٠٠ جم فأحسب الشغل المبذول ضد الاحتكاك .

الحل

نفرض طول المستوى المائل = ف متر

نفرض مقاومة الاحتكاك = م نيوتن

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف

∴ ($\frac{١٨٠}{٦٠}$)^{٢} = ٠ + ٢ × جـ × ف ∴ جـ = $\frac{٩}{٢ ف}$ م / ث^{٢}

معادلة الحركة : ك د جا هـ – م = ك جـ

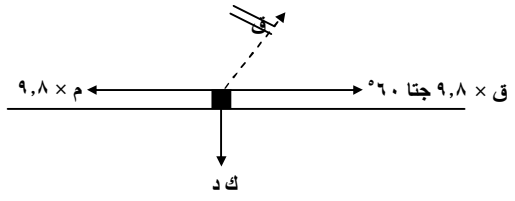
∴ ٠,١ × ٩,٨ × $\frac{١}{ل}$ – م = ٠,١ × $\frac{٩}{٢ ف}$ ∴ م = ٠,٥٣/ ف نيوتن

∵ ش = م × ف ∴ ش = $\frac{٠,٥٣}{ف}$ × ف = ٠,٥٣ جول

---

(١٣) تحرك جسم كتلته ١٤ كيلو جرام من حالة السكون على طريق أفقى تحت تأثير قوة ق مقدارها ٢ ث . كجم وتميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° لأعلى ضد مقاومات مقدارها ٠,٩٥ ث كجم . أوجد بالجول الشغل المبذول خلال الدقيقة الأولى بواسطة كل من : أولاً : وزن الجسم ثانياً : القوة ق ثالثاً : المقاومة

الحل



معادلة الحركة : ق – م = ك جـ

∴ ٢ × ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$ – ٠,٩٥ × ٩,٨ = ١٤ جـ

∴ جـ = ٠,٠٣٥ م / ث^{٢}

∵ ، ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}

∴ ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٠,٠٣٥ × (٦٠)^{٢} = ٦٣ متر

أولاً : ش$_{١}$ = ٠ لأن الوزن عمودى على اتجاه الحركة فلا تأثير له على الحركة

ثانياً : ش$_{٢}$ = ق × ف = ٢ × ٩,٨ × ٢/١ × ٦٣ = ٦١٧,٤ جول

ثالثاً : ش$_{٣}$ = – م × ف = – ٠,٩٥ × ٩,٨ × ٦٣ = – ٥٨٦,٥٣ جول

انتهى التمرين

تمارين (٤ – ٢) صفحة ٢٥٨

(١) يتحرك جسم كتلته الوحدة وكان متجه إزاحته $\overrightarrow{ف}$ كدالة فى الزمن هو $\overrightarrow{ف}$ = ن $\overrightarrow{س}$ + ($\frac{٥}{٢}$ ن^{٢} – ٣ ن) $\overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان وكان الجسم يتحرك تحت تأثير قوة $\overrightarrow{ق}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ أوجد $\frac{د}{د ن}$ ($\overrightarrow{ق}$ ⊙ $\overrightarrow{ف}$) عندما ن = ٣ ثوان

الحل

$\overrightarrow{ق}$ ⊙ $\overrightarrow{ف}$ = (٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$) ⊙ [ن $\overrightarrow{س}$ + ($\frac{٥}{٢}$ ن^{٢} – ٣ ن) $\overrightarrow{ص}$] = ٣ ن + ١٠ ن^{٢} – ١٢ ن = ١٠ ن^{٢} – ٩ ن

∵ $\frac{د}{د ن}$ ($\overrightarrow{ق}$ ⊙ $\overrightarrow{ف}$) = القدرة = ٢٠ ن – ٩ وعندما ن = ٣ ∴ القدرة = ٢٠ × ٣ – ٩ = ٥١

---

(٢) أوجد بالكيلو وات وبالحصان قدرة سيارة كتلتها ٢ طن حينما تتحرك بسرعة ٥٠ كم / س على طريق أفقى ، علماً بان قوة المقاومة تعادل ٠,٠٥ من وزن السيارة .

الحل

∵ السرعة منتظمة ∴ ق = م = ٠,٠٥ × ٢ × ١٠٠٠ × ٩,٨ = ٩٨٠ نيوتن

∴ قدرة السيارة = ق × ع = ٩٨٠ × ٥٠ × ١٨/٥ = ١٣,٦١ كيلو وات

القدرة بالحصان = ١٣,٦١ × ١٠٠٠ ÷ (٩,٨ × ٧٥) = ١٨,٥٢ حصان

---

(٣) يتحرك قطار كتلته ٢٥٠ طناً على شريط أفقى بسرعة منتظمة ٣٠ كم / س أوجد قدرة آلة القطار علماً بأن مقاومة الطريق تساوى ٩ ث . كجم لكل طن من كتلته .

الحل

∵ السرعة منتظمة ∴ ق = م = ٩ × ٢٥٠ = ٢٢٥٠ ث كجم

القدرة = ق × ع = ٢٢٥٠ × ٣٠ × ١٨/٥ = ١٨٧٥٠ ث كجم . متر / ث = ١٨٧٥٠ ÷ ٧٥ = ٢٥٠ حصان

---

(٤) يتحرك قطار كتلته ٢٠٠ طن وقدرة آلته ٣٠٠ حصان على شريط أفقى . أوجد أقصى سرعة للقطار علماً بأن مقدار المقاومة يساوى ٠,٠١٥ من وزنه .

الحل

عند أقصى سرعة تكون السرعة منتظمة ∴ ق = م = ٠,٠١٥ × ٢٠٠ × ١٠٠٠ ث كجم

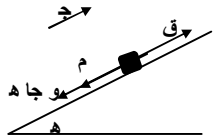
∵ القدرة = ق × ع ∴ ٣٠٠ × ٧٥ = ٠,٠١٥ × ٢٠٠ × ١٠٠٠ × ع

∴ ع = ٧,٥ م / ث = ٥/١٨ × ٧,٥ = ٢٧ كم / س

---

(٥) تتحرك شاحنة كتلتها ٤ طن وقدرة محركها ٢٠ حصاناً أعلى طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠}$. ما هى أقصى سرعة لها على هذا الطريق علماً بأن مقدار مقاومة الطريق للحركة هو ٢٥ ث . كجم عن كل طن من وزن الشاحنة .

الحل



عند أقصى سرعة تكون السرعة منتظمة

∴ ق = م + و جا هـ = ٢٥ × ٤ + ٤٠٠٠ × ٢٠/١ = ٣٠٠ ث كجم

∵ القدرة = ق × ع ∴ ٢٠ × ٧٥ = ٣٠٠ ع ∴ ع = ٥ م / ث = ١٨ كم / س

---

(٦) يتحرك قطار كتلته ٢٠٠ طن على طريق أفقى بأقصى سرعة ومقدارها ٩٠ كم / س وكانت قوة المقاومة لحركته ١٠ ث كجم لكل طن من كتلته . بدأ هذا القطار فى صعود طريق يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$.
أوجد أقصى سرعة للقطار على الطريق المائل – علماً بأن قوة المقاومة لم تتغير .

الحل

<u>الحركة على الطريق الأفقى</u> :

∵ السرعة منتظمة (أقصى سرعة) ∴ ق = م

∴ القدرة = ق × ع = ١٠ × ٢٠٠ × ٩٠ × ١٨/٥ = ٥٠٠٠٠ ث كجم . متر / ث

<u>الحركة على المستوى المائل</u> :

عند أقصى سرعة يكون ق/ = م + و جا هـ

∴ ق/ = ١٠ × ٢٠٠ + ٢٠٠ × ١٠٠٠ × ١٠/١ = ٢٢٠٠٠ ث كجم

∵ القدرة = ق × ع ∴ ٥٠٠٠٠ = ٢٢٠٠٠ × ع/ ∴ ع/ = $\frac{٥٠}{٢٢}$ م / ث = ٨,١٨ كم / س

---

(٧) إذا كانت السرعة القصوى لدراجة على طريق أفقى هى ٢٤ كم / س ، فما هى المقاومة التى تلاقيها ، علماً بأن قدرة راكب الدراجة هى $\frac{١}{٥}$ حصان . وإذا كانت كتلة الرجل ودراجته ٧٢ كجم ، فما هى أقصى سرعة يمكن أن تصعد بها الدراجة طريقاً منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٦}$ إذا لم تتغير مقاومة الطريق للحركة .

الحل

<u>الحركة على الطريق الأفقى</u> :

∵ الدراجة تسير بأقصى سرعة (سرعة منتظمة) ∴ ق = م

∵ القدرة = ق × ع ∴ $\frac{١}{٥}$ × ٧٥ = ق × ٢٤ × $\frac{٥}{١٨}$ ∴ ق = م = ٢,٢٥ ث كجم

<u>الحركة على المستوى المائل</u> :

عند أقصى سرعة يكون ق/ = م + و جا هـ = ٢,٢٥ + ٧٢ × $\frac{١}{١٦}$ = ٦,٧٥ ث كجم

∵ القدرة = ق/ × ع ∴ ٥/١ × ٧٥ = ٦,٧٥ع ∴ ع = $\frac{٢٠}{٩}$ م / ث = $\frac{٢٠}{٩}$ × $\frac{١٨}{٥}$ = ٨ كم / س

---

(٨) تجر قاطرة قدرة آلاتها ٤٠٠ حصان قطاراً بسرعة ٧٢ كم / س على أرض أفقية . أحسب المقاومة لحركة القطار إذا كانت كتلة القطار والقاطرة معاً ٢٠٠ طن ، أوجد أقصى سرعة يصعد بها القطار طريقاً منحدراً يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{٢٠٠}$ على فرض أن مقاومة الطريق للحركة لم تتغير .

الحل

الحركة على الطريق الأفقى :

∵ السرعة منتظمة ∴ ق = م ∵ القدرة = ق × ع ∴ ٤٠٠ × ٧٥ = ق × ٧٢ × ١٨/٥ ∴ ق = م = ١٥٠٠ ث كجم

الحركة على المستوى المائل :

عند أقصى سرعة يكون ق/ = م + و جا هـ

∴ ق/ = ١٥٠٠ + ٢٠٠ × ١٠٠٠ × ٢٠٠/١ = ٢٥٠٠ ث كجم

∵ القدرة = ق × ع ∴ ٤٠٠ × ٧٥ = ٢٥٠٠ ع ∴ ع = ١٢ م / ث = ١٢ × $\frac{١٨}{٥}$ = ٤٣,٢ كم / س

---

(٩) تطير طائرة قدرة محركها ٦٠٠ حصان تحت تأثير مقاومة تتناسب مع مربع سرعتها ، فإذا كانت أقصى سرعة للطائرة هى ٣٠٠ كم / س ، فما هو مقدار المقاومة عند سرعة ٢٠٠ كم / س ؟

الحل

عند أقصى سرعة : ق = م ، ∵ القدرة = ق × ع ∴ ٦٠٠ × ٧٥ = ق × ٣٠٠ × ١٨/٥ ∴ ق = م = ٥٤٠ ث كجم

∵ م ∝ ع^{٢} ∴ $\frac{م_{١}}{م_{٢}} = \frac{ع_{١}^{٢}}{ع_{٢}^{٢}}$ ∴ $\frac{٥٤٠}{م_{٢}} = \frac{(٣٠٠)^{٢}}{(٢٠٠)^{٢}}$ ∴ م$_{٢}$ = ٢٤٠ ث كجم

---

(١٠) هبطت شاحنة كتلتها ٢ طن على طريق منحدر يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ من موقع أ إلى موقع ب بأقصى سرعة وقدرها ٤٥ كم / س . أحسب قدرة محرك السيارة إذا علمت أن مقاومة الطريق لحركتها تقدر بنسبة ١٣ % من وزن السيارة ، حملت السيارة عند وصولها إلى الموقع ب بشحنة كتلتها $\frac{١}{٢}$ طن ثم تحركت صاعدة الطريق إلى الموقع أ بأقصى سرعة ، أوجد هذه السرعة إذا ظلت المقاومة على نفس نسبتها من الوزن .

الحل

ق = م – و جا هـ = ٠,١٣ و – ٠,١ و = ٠,٣ و = ٠,٣ × ٢٠٠٠ = ٦٠ ث كجم

∴ القدرة = ٦٠ × ٤٥ × ١٨/٥ = ٧٥٠ ث كجم . متر / ث = ١٠ حصان

الحركة أثناء الصعود : ق/ = م + و جا هـ

= ٠,١٣ × ٢٥٠٠ + ٠,١ × ٢٥٠٠ = ٥٧٥ ث كجم

∵ القدرة = ق/ × ع ∴ ٧٥٠ = ٥٧٥ × ع/

∴ ع/ = ٧٥٠ ÷ ٥٧٥ م / ث × ٥/١٨ = ٤,٧ كم / س

---

(١١) محرك طائرة صغيرة يشتغل بمعدل ٢٥٠٠٠ ث . كجم . متر / ث حينما تسير الطائرة بسرعة ٩٠ كم / ساعة فإذا كانت مقاومات الحركة للطائرة تتناسب مع مربع سرعتها ، فأوجد القدرة المبذولة عندما تسير الطائرة بسرعة ١٣٥ كم / ساعة فى نفس الظروف .

الحل

(لاحظ أن معدل الشغل = القدرة = ٢٥٠٠٠)

∵ السرعة منتظمة ∴ ق = م ، ∴ القدرة = ق × ع

∴ ٢٥٠٠٠ = ق × ٩٠ × ١٨/٥ ∴ ق = م = ١٠٠٠ ث كجم

∵ م ∝ ع^{٢} ∴ $\frac{م_{١}}{م_{٢}} = \frac{ع_{١}^{٢}}{ع_{٢}^{٢}}$ ∴ $\frac{١٠٠٠}{م_{٢}} = \frac{(٩٠)^{٢}}{(١٣٥)^{٢}}$

∴ م$_{٢}$ = ٢٢٥٠ ث كجم ∴ ق/ = ٢٢٥٠ ث كجم

القدرة = ق/ × ع/ = ٢٢٥٠ × ١٣٥ × ١٨/٥ = ٨٤٣٧٥ ث كجم . متر = ٨٤٣٧٥ ÷ ٧٥ = ١١٢٥ حصان

(١٢) سيارة كتلتها ٦ أطنان تصعد على مستوى يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠٠}$ فإذا كانت مقاومة الهواء والاحتكاك تعادل ١٥ ث . كجم لكل طن من الكتلة وكانت أقصى سرعة تتحرك بها السيارة عندئذ هى ٢٧ كم / ساعة . أحسب قدرة السيارة بالحصان – أحسب أيضاً أقصى سرعة تتحرك بها السيارة وهى هابطة على المستوى بفرض أن كل من قدرة السيارة وكذا مقاومة الهواء والاحتكاك لم تتغير .

الحل

فى حالة الصعود : ق = م + و جا هـ = ١٥ × ٦ + ٦٠٠٠ × $\frac{١}{١٠٠}$ = ١٥٠ ث كجم

∴ القدرة = ١٥٠ × ٢٧ × ١٨/٥ = ١١٢٥ ث كجم . متر = ١١٢٥ ÷ ٧٥ = ١٥ حصان

فى حالة الهبوط : ق/ = و جا هـ - م = ٦٠٠٠ × $\frac{١}{١٠٠}$ – ١٥ × ٦ = - ٣٠ ث كجم

أى أن ق/ = ٣٠ ث كجم لأعلى

∵ القدرة = ق/ × ع/ ∴ ١١٢٥ = ٣٠ × ع/ ∴ ع/ = ١١٢٥ ÷ ٣٠ = ٣٧,٥ م / ث = ١٣٥ كم / س

---

(١٣) تسير سيارة كتلتها ٢,٧ طن على طريق أفقى بأقصى سرعة لها ١٠٠ كم / ساعة وعندما وصلت إلى طريق يميل على الأفقى بزاوية جيب قياسها $\frac{١}{٢٠}$ أوقف السائق المحرك فتحركت إلى أسفل المنحدر بنفس السرعة ، فإذا كانت المقاومة ثابتة ، فأوجد قدرة المحرك بالحصان .

الحل

عند أقصى سرعة : ق = م ∴ القدرة = ق × ع = م × ١٠٠ × $\frac{٥}{١٨}$ .....(١)

الحركة على المستوى المائل :

ق/ = و جا هـ – م = ٢,٧ × ١٠٠٠ × ٢٠/١ – م = (١٣٥ – م) ث كجم

∴ القدرة = ق/ × ع = (١٣٥ – م) × ١٠٠ × $\frac{٥}{١٨}$ .....(٢)

∵ القدرة ثابتة ∴ (١) = (٢)

∴ م × ١٠٠ × ١٨/٥ = (١٣٥ – م) × ١٠٠ × $\frac{٥}{١٨}$

∴ م = ١٣٥ – م ∴ ٢ م = ١٣٥ ∴ م = ٦٧,٥ ث كجم

بالتعويض فى (١)

∴ القدرة = ٦٧,٥ × ١٠٠ × $\frac{٥}{١٨}$ = ١٨٧٥ ث كجم . متر / ث

= ١٨٧٥ ÷ ٧٥ = ٢٥ حصان

(يصحح الجواب بالكتاب)

تمارين (٤ – ٣) صفحة ٢٦٦

(١) عين طاقة حركة قذيفة كتلتها $\frac{١}{٤}$ كجم وتتحرك بسرعة ٣٠٠ متر / ث .

الحل

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} = ٢/١ × $\frac{١}{٤}$ × (٣٠٠)^{٢} = ١١٢٥٠ جول

(٢) أوجد طاقة حركة جسم كتلته ٥٠ جم ويتحرك بسرعة ٢٠ متر / ث .

الحل

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٥٠× (٢٠٠)^{٢} = (١٠)^{٦} إرج

(٣) أوجد طاقة حركة جسم كتلته ٢ كجم ويتحرك بسرعة ٢٥ سم / ث .

الحل

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠٠ × (٢٥)^{٢} = ٦٢٥٠٠٠ إرج

(٤) أوجد سرعة سيارة كتلتها ١,٥ طن إذا كانت طاقة حركتها تساوى ١٦٨٧٥٠ جول .

الحل

∵ ط = $\frac{١}{٢}$ ك ع^{٢} ∴ ١٦٨٧٥٠ = $\frac{١}{٢}$ × ١,٥ × ١٠٠٠ × ع^{٢}

∴ ع^{٢} = ٢٢٥ ∴ ع = ١٥ م / ث = ١٥ × $\frac{١٨}{٥}$ = ٥٤ كم / س

(٥) قارن بين طاقتى حركة رصاصة كتلتها ٥٠ جم وتتحرك بسرعة ٣٠٠ متر / ث وقاطرة كتلتها ٤٨,٦ طن وسرعتها ١ كم / س

الحل

طاقة حركة الرصاصة = $\frac{١}{٢}$× ٠,٠٥ × (٣٠٠)^{٢} = ٢٢٥٠ جول

طاقة حركة القاطرة = $\frac{١}{٢}$× ٤٨,٦ × ١٠٠٠ × (١ × $\frac{٥}{١٨}$)^{٢} = ١٨٧٥ جول

∴ طاقة حركة الرصاصة أكبر من طاقة حركة القاطرة بمقدار ٣٧٥ جول

(٦) يتحرك جسم كتلته ٢٠٠ جرام بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٣٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة سم / ث . عين طاقة حركة هذا الجسم .

الحل

ع = $\|\overleftarrow{ع}\|$ = $\sqrt{(٣٠)^{٢} + (٤٠)^{٢}}$ ∴ ع = ٥٠ سم / ث

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠ × (٥٠)^{٢} = ٢٥٠٠٠٠ إرج

حل آخر : طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك × $\overleftarrow{ع}$ ⊙ $\overleftarrow{ع}$

= $\frac{١}{٢}$× ٢٠٠ × (٣٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠ $\overleftarrow{ص}$) ⊙ (٣٠ $\overleftarrow{س}$ + ٤٠ $\overleftarrow{ص}$)

= ١٠٠ × (٩٠٠ + ١٦٠٠) = ٢٥٠٠٠٠ إرج = ٢,٥ × (١٠)^{٥} إرج

(٧) انطلقت قذيفة مقدارها ٣ كجم من مدفع بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = - ٢٠٠٠ $\overleftarrow{س}$ + ٢٠٠٠ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة سم / ث . عين طاقة حركة القذيفة لحظة انطلاقها .

الحل

ع = – ٢٠ س + ٢٠ ص متر / ث ∴ طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × (– ٢٠ س + ٢٠ ص) ⊙ (– ٢٠ س + ٢٠ ص)

∴ ط = $\frac{١}{٢}$ × (٤٠٠ + ٤٠٠) = ١٢٠٠ جول

(٨) يتحرك جسم بسرعة $\overleftarrow{ع}$ = ٥٠٠ $\overleftarrow{س}$ + ١٠٠ $\overleftarrow{ص}$ حيث $\overleftarrow{س}$ ، $\overleftarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدان ومقدار السرعة مقاس بوحدة سم / ث . عين كتلة هذا الجسم علماً بأن طاقة حركته تساوى ٣,٩ جول .

الحل

ع = ٥ س + ص بالمتر / ث

∵ طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك × ع ⊙ ع ∴ ٣,٩ = $\frac{١}{٢}$ ك × (٥ س + ص) ⊙ (٥ س + ص)

∴ ٣,٩ = $\frac{١}{٢}$ ك × (٢٥ + ١) ∴ ك = ٠,٣ كجم = ٣٠٠ جم

---

(٩) ترك جسيم كتلته ٥٠ جم ليسقط من ارتفاع ١٠ أمتار من سطح الأرض . أحسب طاقة حركة هذا الجسيم عندما يكون على وشك الارتطام بالأرض .

الحل

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ د ف ∴ ع^{٢} = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ١٠ = ١٩٦

∴ طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٠,٠٥ × ١٩٦ = ٤,٩ جول

---

(١٠) قذف جسيم كتلته $\frac{١}{٢}$ كجم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض بسرعة ١٤,٧ متر/ ث .
أحسب طاقة حركة هذا الجسيم بعد مرور ثانية واحدة ثم بعد مرور ١,٥ ثانية من لحظة القذف .

الحل

<u>بعد ١ ث</u> :

ع = ع. + د ن = ١٤,٧ ـ ٩,٨ × ١ = ٤,٩ م / ث

∴ طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × (٤,٩)^{٢} = ٦,٠٠٢٥ جول

<u>بعد ١,٥ ث</u> :

ع = ع. + د ن = ١٤,٧ ـ ٩,٨ × ١,٥ = ٠ ∴ طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك × ٠ = ٠

---

(١١) ترك جسيم كتلته ٢٠٠ جم ليتحرك من سكون من قمة مستوى أملس طوله ٢٥ متراً ويميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$.
أوجد طاقة حركة هذا الجسيم عندما يصل إلى قاعدة المستوى .

الحل

∵ الجسم يتحرك على مستوى أملس لأسفل تحت تأثير وزنه فقط

∴ عجلة الحركة = د جا هـ = ٢ × ٩,٨ × ٠,١ = ١,٩٦ م / ث^{٢}

∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ ف ∴ ع^{٢} = ٠ + ٢ × ١,٩٦ × ٢٥ = ٤٩

∴ طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × ٤٩ = ٤,٩ جول

---

(١٢) قذف جسيم كتلته ٥ كجم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{١}{١٠}$ ولأعلى بسرعة ٤ متر / ث .
أحسب التغير الذى يطرأ على طاقة حركة هذا الجسيم بعد انقضاء ثانية واحدة على لحظة قذفه ثم عندما يعود إلى موضع القذف

الحل

∵ الجسم يتحرك على مستوى أملس لأعلى تحت تأثير وزنه فقط

∴ عجلة الحركة = ـ د جا هـ = ـ ٩,٨ × ٠,١ = ـ ٠,٩٨ م / ث^{٢}

<u>بعد ١ ث</u> :

∵ ع = ع. + د ن ∴ ع١ = ٤ – ٠,٩٨ × ١ = ٣,٠٢ م / ث

∴ التغير فى طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك × (ع.^{٢} – ع.^{٢}) = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × [(٣,٠٢)^{٢} – (٤)^{٢}] = – ١٧,١٩٩ جول

عندما يعود الجسم إلى موضع القذف تكون سرعته = سرعة القذف = ٤ م / ث

∴ ع٢ = ٤ م / ث ∴ التغير فى طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ك × (ع٢^{٢} – ع.^{٢}) = $\frac{١}{٢}$ × ك × ٠ = ٠

ملاحظة : عندما يعود الجسم إلى نقطة قذفه فكأنه لم يتحرك فعلاً وبالتالى تكون طاقة حركته = ٠

تمارين (٤ – ٤) صفحة ٢٧٤

(١) يتحرك جسيم كتلته ك فى خط مستقيم بحيث يعطى القياس الجبرى لمتجه سرعته بدلالة الزمن كالآتى :

$\overleftarrow{ع}$ = أ + ب ن + جـ ن^{٢} عين طاقة حركة هذا الجسيم وأثبت أن قدرة القوة المسببة للحركة عند اللحظة ن = صفر كانت تساوى ك أ ب .

الحل

ط = $\frac{١}{٢}$ ك (أ + ب ن + جـ ن^{٢})^{٢}

∵ ش = ط – ط . حيث ط . = ثابت

∴ $\frac{د ش}{د ن}$ = $\frac{د ط}{د ن}$ – صفر ∴ القدرة = د ط / د ن

∴ القدرة = ك (أ + ب ن + جـ ن^{٢}) (ب + ٢ جـ ن) وعند ن = ٠ ∴ القدرة = ك أ ب

- **استخدم مبدأ الشغل والطاقة لحل التمارين الآتية :**

(٢) ترك جسم كتلته ١ كجم ليسقط من ارتفاع ١٠ أمتار عن سطح الأرض . عين طاقة حركته عندما يكون على وشك الاصطدام بالأرض .

الحل

∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول من الوزن ∴ ط – ٠ = ك د ل ∴ ط = ١ × ٩,٨ × ١٠ = ٩٨ جول

---

(٣) قذف جسيم كتلته ٢٠٠ جم رأسياً لأعلى من موضع على سطح الأرض بسرعة ١٥ متر/ ث فما هى طاقة حركته عندما يكون على ارتفاع ١٠,٤ أمتار من نقطة القذف ؟

الحل

∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول من الوزن

∴ ط – $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × (١٥)^{٢} = ك د ل

∴ ط = ٠,٢ × (– ٩,٨) × ١٠,٤ + $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × (١٥)^{٢} = ٢,١١٦ جول = ٢ جول تقريباً

---

(٤) قذف جسم كتلته ٤٠٠ جم رأسياً إلى أسفل من موضع يرتفع ٣ أمتار عن سطح الأرض بسرعة ٥ متر / ث .

عين طاقة حركته الابتدائية وكذلك طاقة حركته عندما يكون على وشك الاصطدام بالأرض .

الحل

طاقة الحركة الابتدائية = ط. = ٢/١ × ٠,٤ × ٥^{٢} = ٥ جول

∵ ط – ط . = ك د ل ∴ ط – ٥ = ٠,٤ × ٩,٨ × ٣ ∴ ط = ١٦,٧٦ جول

---

(٥) أطلقت رصاصة كتلتها ٢٠٠ جم بسرعة ٢٩٤ متر / ث على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٢٠ سم ، أوجد قوة مقاومة الخشب لحركة الرصاصة مقدرة بوحدة ث كجم بفرض أنها ثابتة .

الحل

∵ التغير فى طاقة الحركة = الشغل المبذول من المقاومة

∴ ط ـ ط . = ـ م × ف

∴ ٠ ـ $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × (٢٩٤)^{٢} = ـ م × ٠,٢

∴ م = ٤٣٢١٨ نيوتن = $\frac{٤٣٢١٨}{٩,٨}$ = ٤٤١٠ ث كجم

---

(٦) أطلقت رصاصة أفقياً بسرعة ٧٠٠ متر / ث على قطعة من الخشب فاستقرت فيها على عمق ٨ سم . إذا أطلقت رصاصة مشابهه بنفس السرعة على هدف ثابت من نفس الخشب سمكه ٦ سم . فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الهدف بفرض أن المقاومة ثابتة .

الحل

<u>الحالة الأولى</u> :

ط ـ ط . = ـ م × ف ∴ ٠ ـ $\frac{١}{٢}$ × ك × (٧٠٠)^{٢} = ـ م × ٠,٠٨ .....(١)

<u>الحالة الثانية</u> :

∵ ط ـ ط . = ـ م × ف ∴ $\frac{١}{٢}$ ك [ع^{٢} ـ (٧٠٠)^{٢}] = ـ م × ٠,٠٦ .....(٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) :

∴ $\frac{-(٧٠٠)^{٢}}{ع^{٢}-(٧٠٠)^{٢}}$ = $\frac{٨}{٦}$ ومنها ع = ٣٥٠ م / ث

---

(٧) أطلقت رصاصة بسرعة ٣٠٠ متر / ث على هدف من الخشب فاستقرت فيه على عمق ٢٧ سم ، فما هى السرعة التى يجب أن تطلق بها رصاصة مشابهه على هدف من نفس الخشب سمكه ٣ سم حتى تستقر فيه وهى على وشك اختراقه بفرض أن المقاومة ثابتة ؟

الحل

<u>الحالة الأولى</u> :

ط ـ ط . = ـ م × ف ∴ ٠ ـ $\frac{١}{٢}$ × ك × (٣٠٠)^{٢} = ـ م × ٠,٢٧ .....(١)

<u>الحالة الثانية</u> :

الرصاصة على وشك اختراق الحاجز تعنى أن سرعة الرصاصة النهائية = ٠

∵ ط ـ ط . = ـ م × ف ∴ $\frac{١}{٢}$ ك [٠ ـ ع.^{٢}] = ـ م × ٠,٠٣ .....(٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) :

∴ $\frac{-(٣٠٠)^{٢}}{ع.^{٢}}$ = ٠,٢٧ / ٠,٠٣ ومنها ع = ١٠٠ م / ث

---

(٨) يتحرك جسم كتلته ٥٠٠ جم بسرعة $\overrightarrow{ع}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$ حيث $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين ومقدار السرعة مقاس بوحدة متر / ث ، عين طاقة حركة هذا الجسيم بالإرج .

الحل

ع = $\|\overrightarrow{ع}\|$ = $\sqrt{(٣)^{٢}+(٤)^{٢}}$ = ٥ متر / ث = ٥٠٠ سم / ث

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ × ٥٠٠ × (٥٠٠)^{٢} = ٦٢٥ × (١٠)^{٧} إرج (يصحح الجواب بالكتاب)

---

(٩) أطلقت رصاصة من بندقية بسرعة ٨٠٠ متر / ث على حاجز خشبى سميك فاستقرت داخله على عمق ٨ سم من السطح .
فإذا أطلقت رصاصة أخرى من البندقية نفسها على حاجز مصنوع من نفس مادة الحاجز الأول وسمكه ٦ سم فاخترقته .
أوجد سرعة الرصاصة لحظة خروجها من الحاجز ، علماً بأن مقاومة الخشب لحركة الرصاصة واحدة فى الحالتين .

الحل

الحالة الأولى :

ط – ط . = – م × ف ∴ ٠ – $\frac{١}{٢}$ × ك × (٨٠٠)^{٢} = - م × ٠,٠٨ .....(١)

الحالة الثانية :

∵ ط – ط . = – م × ف ∴ $\frac{١}{٢}$ ك [ع^{٢} – (٨٠٠)^{٢}] = – م × ٠,٠٦ .....(٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) :

∴ $\frac{-(٨٠٠)^{٢}}{ع^{٢}-(٨٠٠)^{٢}}$ = ٠,٠٨ / ٠,٠٦ ومنها ع = ٤٠٠ م / ث

---

(١٠) يهبط جسم من السكون على خط أكبر ميل لمستو أملس يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{٣}{٥}$ ولمسافة ١٠٠ متر .
أوجد سرعة الجسم عند نهاية مساره .

الحل

الجسم يهبط على مستوى أملس تحت تأثير مركبة الوزن = ك د جا هـ

ط – ط . = الشغل المبذول من مركبة الوزن ∴ ط – ٠ = ك د جا هـ × ف

∴ ٢/١ × ك × ع^{٢} = ك × ٩,٨ × ٥/٣ × ١٠٠ بالقسمة ÷ ك ∴ ع^{٢} = ٩,٨ × ٥/٣ × ١٠٠ × ٢

∴ ع^{٢} = ١١٧٦ ∴ ع = ٣٤,٣ متر / ث تقريباً

---

(١١) دفع جسم كتلته ٥ كجم بسرعة ٢٠ سم / ث لأسفل على خط أكبر ميل لمستو أملس طوله ٤٠٠ سم وارتفاعه ١٥٠ سم .
أوجد طاقة حركة هذا الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى .

الحل

جا هـ = $\frac{١٥٠}{٤٠٠}$ = $\frac{٣}{٨}$

الجسم يهبط على مستوى أملس تحت تأثير مركبة الوزن = ك د جا هـ

ط – ط . = الشغل المبذول من مركبة الوزن = ك د جا هـ × ف

∴ ط – $\frac{١}{٢}$ × ٥ × (٠,٢)^{٢} = ٥ × ٩,٨ × $\frac{٣}{٨}$ × ٤

∴ ط = ٥ × ٩,٨ × $\frac{٣}{٨}$ × ٤ + $\frac{١}{٢}$ × ٥ × (٠,٢)^{٢} = ٧٣,٦ جول

---

(١٢) وضع جسم كتلته ٢٠٠ جم عند قمة مستو مائل ارتفاعه ١ متر فهبط حتى وصل إلى قاعدة المستوى بسرعة ٢ متر / ث .
فما هو الشغل الذى بذلته قوة المقاومة علماً بأنها ثابتة ؟

الحل

∵ ط – ط . = الشغل الكلى (المبذول من مركبة الوزن والمقاومة)

∴ ط – ط . = ك د جا هـ × ف – م × ف

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × (٢)^{٢} – ٠ = ٠,٢ × ٩,٨ × $\frac{١}{ف}$ × ف – م × ف

∴ – م × ف = ٩,٨ × ٠,٢ – $\frac{١}{٢}$ × ٠,٢ × ٤ = ١,٥٦ جول

---

(١٣) يهبط جسم كتلته ٢٠٠ كجم من سكون على خط أكبر ميل لمستو مائل طوله ١٦ متراً وارتفاعه ٥ أمتار .
فإذا كانت المقاومة لحركة الجسم تعادل $\frac{١}{٤}$ وزنه . أوجد طاقة حركة الجسم عندما يصل إلى قاعدة المستوى .

الحل

المقاومة = $\frac{١}{٤} \times ٢٠٠ = ٥٠$ ث كجم

∵ ط ـ ط . = الشغل الكلى (المبذول من مركبة الوزن والمقاومة)

∴ ط ـ ط . = ك د جا هـ × ف ـ م × ف

∴ ط ـ ٠ = ٢٠٠ × ٩,٨ × $\frac{٥}{١٦}$ × ١٦ ـ ٥٠ × ٩,٨ × ١٦ ∴ ط = ١٩٦٠ جول

---

(١٤) أثرت قوة أفقية مقدارها ١٠ ث . كجم لمدة ٥ ثوان على جسم كتلته ٢٠ كجم فحركته من السكون على مستوى أفقى أملس .
أوجد سرعة الجسم فى نهاية الفترة . وإذا أصطدم الجسم جسماً ساكناً كتلته ٢٠ كجم وكونا معاً جسماً واحداً .
فما هى السرعة المشتركة لهما ؟ وأحسب ما فقد من طاقة الحركة وبين ما حدث للطاقة المفقودة .

الحل

∵ ق × ن = ك (ع ـ ع.) الدفع = التغير فى كمية الحركة

∴ ١٠ × ٩,٨ × ٥ = ٢٠ (ع ـ ٠) ∴ ع = ٢٤,٥ م / ث

∴ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموع طاقتى الحركة بعد التصادم

∴ ٢٠ × ٢٤,٥ + ٢٠ × ٠ = (٢٠ + ٢٠) × ع/ ∴ ع/ = ١٢,٢٥ م / ث

الطاقة المفقودة = مجموع طاقتى الحركة قبل التصادم - مجموع طاقتى الحركة بعد التصادم

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٠ × (٢٤,٥)^{٢} ـ $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ × (١٢,٢٥)^{٢} = ٣٠٠١,٢٥ جول

طاقة الحركة المفقودة (الميكانيكية) تحولت إلى طاقة حرارية

---

(١٥) أثرت قوة مقدارها ٥ ث . كجم فى كتلة مقدارها ١٩٦ كجم متحركة فى خط مستقيم فى اتجاه القوة فقطعت مسافة ٢٨٠ سم
ـ أحسب مقدار الزيادة فى طاقة الحركة بالإرج ـ وإذا كانت طاقة حركة الكتلة فى نهاية المسافة ١٤١١,٢ مليون إرج .
أحسب سرعة الكتلة عند بدء تأثير القوة .

الحل

∵ ط ـ ط . = الشغل المبذول من القوة = ق × ف

∵ الزيادة فى طاقة الحركة = ٥ × ٩,٨ × ٢,٨ = ١٣٧,٢ جول = ١٣٧,٢ × (١٠)^{٧} = ١٣٧٢ × (١٠)^{٦} إرج

∴ ط ـ ط . = ١٣٧٢ × (١٠)^{٦}

∴ ١٤١١,٢ × (١٠)^{٦} ـ $\frac{١}{٢}$ × ١٩٦ × ١٠٠٠ × ع.^{٢} = ١٣٧٢ (١٠)^{٦} ∴ ع.^{٢} = ٤٠٠ ∴ ع. = ٢٠ سم / ث

---

(١٦) تتحرك كرتان كتلتاهما ٣٠ جم ، ٩٠ جم فى خط مستقيم واحد على نضد أفقى أملس وفى اتجاهين متضادين بسرعتين
مقدارهما ٥٠ سم / ث ، ٣٠ سم / ث على الترتيب ، فإذا كونت الكرتان جسماً واحداً بعد التصادم .
فأحسب سرعة هذا الجسم وطاقة الحركة المفقودة بالتصادم .

الحل

نتخذ $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه الكرة ٩٠ جم $\frac{١}{٢}$

∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموع كميتى الحركة بعد التصادم

∴ ٣٠ × (ـ ٥٠) + ٩٠ × ٣٠ = (٣٠ + ٩٠) × ع ∴ ع = ١٠ سم / ث

∴ طاقة الحركة المفقودة = طاقة الحركة قبل التصادم – طاقة الحركة بعد التصادم = ط . – ط

= [$\frac{1}{2}$ × ٣٠ × (٥٠)^{2} + $\frac{1}{2}$ × ٩٠ × (٣٠)^{2}] – $\frac{1}{2}$ × ١٢٠ × (١٠)^{2}

= ٦٠٠٠ – ٧٨٠٠٠ = ٧٢٠٠٠ إرج

---

(١٧) سقطت كرة كتلتها ١٠٠ جم من ارتفاع ٣,٦ متراً على أرض أفقية ، فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسياً إلى أعلى . فإذا بلغ النقص فى طاقة حركتها نتيجة للاصطدام بالأرض ١,٩٦ جول . أوجد المسافة التى ارتدتها الكرة عقب تصادمها بالأرض .

الحل

سرعة الكرة قبل التصادم :

∵ ع^{2} = ع.^{2} + ٢ د ف ∴ ع^{2} = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ٣,٦ ∴ ع = ٨,٤ م / ث

∵ طاقة الحركة المفقودة = ط . – ط = ١,٩٦ جول

∴ ط = ط . – ١,٩٦

∴ $\frac{1}{2}$ × ٠,١ × ع^{2} = $\frac{1}{2}$ × ٠,١ × (٨,٤)^{2} – ١,٩٦ ∴ ع = ٥,٦ م / ث

، ∵ ع^{2} = ع.^{2} + ٢ د ف ∴ ٠ = (٥,٦)^{2} – ٢ × ٩,٨ × ف ∴ ف = ١,٦ متر

---

(١٨) أسقطت مطرقة كتلتها طن واحد من ارتفاع ٤,٩ متراً رأسياً على عمود من أعمدة الأساس كتلته ٤٠٠ كجم فتدكه رأسياً فى الأرض لمسافة ١٠ سم . عين السرعة المشتركة للمطرقة والجسم بعد الاصطدام مباشرةً .

عين أيضاً طاقة الحركة المفقودة بالتصادم وكذا مقاومة الأرض .

الحل

سرعة الكرة قبل التصادم :

∵ ع^{2} = ع.^{2} + ٢ د ف ∴ ع^{2} = ٠ + ٢ × ٩,٨ × ٤,٩ ∴ ع = ٩,٨ م / ث

، ∵ مجموع كميتى الحركة قبل التصادم = مجموع كميتى الحركة بعد التصادم

∴ ١٠٠٠ × ٩,٨ + صفر = (١٠٠٠ + ٤٠٠) × ع ∴ ع = ٧ م / ث

، طاقة الحركة المفقودة = ط . – ط

= $\frac{1}{2}$ × ١٠٠٠ × (٩,٨)^{2} – $\frac{1}{2}$ × ١٤٠٠ × (٧)^{2} = ١٣٧٢٠ جول

، التغير فى طاقة الحركة = الشغل الكلى (من الوزن والمقاومة)

∵ ط – ط . = ك د ف – م × ف

∴ صفر – $\frac{1}{2}$ × ١٤٠٠ × (٧)^{2} = ١٤٠٠ × ٩,٨ × ٠,١ – م × ٠,١

∴ م = ٣٥٦٧٢٠ نيوتن ∴ م = $\frac{٣٥٦٧٢٠}{٩,٨}$ = ٣٦٤٠٠ ث كجم

ملاحظة : يمكن حساب م من معادلة الحركة داخل الأرض : ك د – م = ك جـ

تمارين (٤ – ٥) صفحة ٢٨٢

(١) أحسب طاقة وضع جسم كتلته ٤٥٠ جم موجود على ارتفاع ٣٠ متراً من سطح الأرض مقدراً إجابتك بالجول .

الحل

طاقة الوضع = ض = ك د ل = ٠,٤٥ × ٩,٨ × ٣٠ = ١٣٢,٣ جول

---

(٢) أحسب طاقة وضع جسم كتلته ٣ كجم وموجود على ارتفاع ٢٠ سم من سطح الأرض مقدراً إجابتك بالإرج .

الحل

طاقة الوضع = ض = ك د ل = ٣٠٠٠ × ٩٨٠ × ٢٠ = ٥٨٨ × (١٠)^٥ إرج

---

(٣) هبطت طائرة عمودية وزنها ٣٥٠٠ ث . كجم رأسياً من ارتفاع ١٥٠ متراً إلى ارتفاع ٥٠ متراً من سطح الأرض .
ما هو مقدار الفقد فى طاقة وضعها ؟

الحل

طاقة الوضع المفقودة = طاقة الوضع الابتدائية – طاقة الوضع النهائية = ض. – ض

= ٣٥٠٠ × ٩,٨ (١٥٠ – ٥٠) = ٣٤٣ × (١٠)^٤ جول = ٣٤٣ × (١٠)^٤ ÷ ٩,٨ = ٣٥ × (١٠)^٤ ث كجم . متر

---

(٤) رفع ونش جسماً وزنه ١٥٠ ث كجم رأسياً من موضعه على الأرض إلى موضع جديد على ارتفاع ٦ أمتار من سطح الأرض .
ما هى الزيادة فى طاقة وضع الجسم ؟

الحل

طاقة الحركة المكتسبة = ض – ض. = ١٥٠ × ٩,٨ × (٦ – ٠) = ٨٨٢٠ جول = ٨٨٢٠ ÷ ٩,٨ = ٩٠٠ ث كجم . متر

---

(٥) هبط جسم كتلته ٢٥٠ جم مسافة ٨٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° .
ما هو التغير فى طاقة وضعه ؟

الحل

المسافة الرأسية = ٨٠ جا ٦٠° = ٤٠ √٣ سم

التغير فى طاقة الوضع = ٠ – ٢٥٠ × ٩٨٠ × ٤٠ √٣ = – ١٦٩٧٤٠٩٧,٩١ إرج = – ١٧٠ × (١٠)^٥ إرج تقريباً

---

(٦) صعد جسم وزنه ٢ ث كجم مسافة ١٢٠ سم على خط أكبر ميل لمستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° .
أحسب الزيادة فى طاقة حركته .

الحل

المسافة الرأسية = ١٢٠ جا ٣٠° = ٦٠ سم

الزيادة فى طاقة الوضع = ض – ض. = ٢٠٠٠ × ٩٨٠ × ٦٠ – ٠ = ١١٧٦ × (١٠)^٥ إرج

= ١١,٧٦ جول = $\frac{١١,٧٦}{٩,٨}$ = ١,٢ ث كجم . متر

---

(٧) جسم كتلته ٥ كجم موضوع على ارتفاع ١٥ متراً عن سطح الأرض . أوجد طاقة وضعه
، وإذا سقط الجسم رأسياً فأوجد طاقة وضعه وطاقة حركته عندما يكون على ارتفاع ٥ أمتار عن سطح الأرض .

الحل

طاقة الوضع الأولى = ك د ل = ٥ × ٩,٨ × ١٥ = ٧٣٥ جول ∴ ض١ = $\frac{٧٣٥}{٩,٨}$ = ٧٥ ث كجم . متر

طاقة الوضع الثانية = ك د ل/ = ٥ × ٩,٨ × ٥ = ٢٤٥ جول = $\frac{٢٤٥}{٩,٨}$ = ٢٥ ث كجم . متر

∵ ض$_{1}$ + ط$_{1}$ = ض$_{2}$ + ط$_{2}$ ∴ ٧٣٥ + ٠ = ٢٤٥ + ط$_{2}$

∴ ط$_{2}$ = ٤٩٠ جول = $\frac{٤٩٠}{٩,٨}$ = ٥٠ ث كجم . متر

---

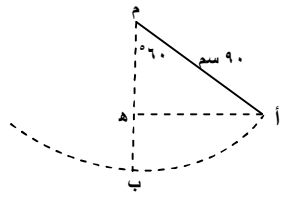
(٨) بندول بسيط يتكون من خيط طوله ٩٠ سم ويحمل فى طرفه كتلة مقدارها ٧٥ جم ويتذبذب فى زاوية قياسها ١٢٠° . أوجد :

أولاً : زيادة طاقة الوضع فى نهاية المسار عنها فى منتصفه .

ثانياً : سرعة الكتلة عند منتصف المسار .

الحل

نفرض أن أ هى نهاية المسار ، ب هى منتصف المسار = مستوى الصفر



∴ ض$_{ب}$ = صفر ، ط$_{أ}$ = ٠

م هـ = ٩٠ جتا ٦٠° = ٤٥ سم ∴ ب هـ = ٤٥ سم

ض$_{أ}$ = ك د × ب هـ = ٧٥ × ٩٨٠ × ٤٥

∴ ض$_{أ}$ = ٣٣٠٧٥٠٠ إرج = ٣٣٧٥ ث جم . سم

أولاً : الزيادة فى طاقة الوضع = ض$_{أ}$ – ض$_{ب}$ = ٣٣٧٥ ث جم . سم

ثانياً : ط$_{ب}$ + ض$_{ب}$ = ط$_{أ}$ + ض$_{أ}$

∴ ط$_{ب}$ = ض$_{أ}$ = ٣٣٠٧٥٠٠ إرج

∴ $\frac{١}{٢}$ × ٧٥ × ع^{٢} = ٣٣٠٧٥٠٠ ∴ ع^{٢} = ٨٨٢٠٠ ∴ ع = ٢٩٦,٩٨ سم / ث = ٢١٠ $\sqrt{٢}$ سم / ث

---

(٩) أثرت القوة ق = ٦ س + ٢ ص على جسم فحركته من الموضع أ إلى الموضع ب فى زمن ٢ ثانية ،

وكان متجه الموضع للجسم يعطى بالعلاقة : ر = (٣ ن^{٢} + ٢) س + (٢ ن^{٢} + ١) ص .

أحسب التغير فى طاقة الوضع للجسم . حيث معيار ق مقيساً بالنيوتن ، معيار ر بالمتر ، ن بالثانية .

الحل

ر$_{١}$ = ٢ س + ص ∴ ض$_{١}$ = – (٢ ، ١) ⊙ (٢ ، ٦) = – ١٤

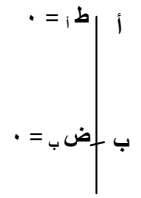
ر$_{٢}$ = ١٤ س + ٩ ص ∴ ض$_{٢}$ = – (١٤ ، ٩) ⊙ (٢ ، ٦) = – ١٠٢

∴ التغير فى طاقة الوضع = ض$_{٢}$ – ض$_{١}$ = – ١٠٢ – (– ١٤) = – ٨٨ جول (يصحح الجواب بالكتاب)

---

(١٠) حلقة كتلتها $\frac{١}{٢}$ كجم تنزلق على عمود أسطوانى رأسى خشن فإذا كانت سرعتها ٦,٣ متر / ث بعد أن قطعت مسافة ٤,٨ متر من بدء حركتها . أحسب باستخدام مبدأ الشغل والطاقة الشغل المبذول من المقاومة أثناء الحركة .

الحل



نفرض أن صفر طاقة الوضع عند ب

الشغل المبذول من المقاومة = (ض$_{أ}$ + ٠) – (٠ + ط$_{ب}$)

∴ ش = $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × ٤,٨ – $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × (٦,٣)^{٢} = ١٣,٥٩٧٥ جول