

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

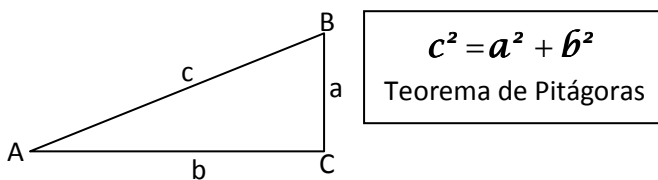
A manera de enfoque es necesario precisar el lenguaje que emplearemos en este tema.

Una *identidad* es una igualdad que se cumple para todos los valores de la incógnita o variable. Por ejemplo, la igualdad $a + b = b + a$ se satisface para todo par a, b de números reales.

Para el caso de las *identidades trigonométricas*, son igualdades que contienen razones trigonométricas y que son verdaderas, cualesquiera sean los valores que se asignen a los ángulos para los cuales están definidas estas razones.

La igualdad $\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$ se satisface para todo valor de θ , lo cual significa que es una identidad. ¿Por qué?

Ahora, para un triángulo rectángulo cualquiera tenemos



Además de ello se han definido en una unidad anterior las relaciones trigonométricas para un ángulo dado así:

$$\text{Sen } \mathcal{A} = \frac{a}{c}$$

$$\text{Cos } \mathcal{A} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan } \mathcal{A} = \frac{a}{b}$$

Con lo anterior podemos definir las primeras identidades.

1. RECÍPROCAS

A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas directas (seno, coseno y tangente) se deducen tres identidades trigonométricas *inversas*, que son:

$$\csc \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

Sin perder de vista que los denominadores de cada una de estas, deben ser distintos de cero.

2. POR COCIENTE:

Igualmente, teniendo en cuenta las definiciones dadas:

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

Todas las anteriores son conocidas como IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Veamos ahora otra serie de identidades que se derivan del teorema de Pitágoras:

$$\text{Sen } \mathcal{A} = \frac{a}{c} \rightarrow \text{Sen}^2 \mathcal{A} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\text{Cos } \mathcal{A} = \frac{b}{c} \rightarrow \text{Cos}^2 \mathcal{A} = \frac{b^2}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego : } \text{Sen}^2 \mathcal{A} + \text{Cos}^2 \mathcal{A} &= \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{c^2} \\ &= \frac{c^2}{c^2} = 1 \end{aligned}$$

Por tanto: $\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$ que se conoce como IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA FUNDAMENTAL.

Ahora bien si dividimos esta identidad por $\text{Sen}^2 \theta$ y luego por $\text{Cos}^2 \theta$ obtenemos:

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$$

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$$

DEMOSTRACION DE IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Para la comprobación o verificación de las Identidades Trigonómicas no existe un método único, pero se pueden recomendar algunos pasos que puedes seguir según el caso:

- Dominar con precisión las 8 identidades fundamentales y algunos procedimientos algebraicos necesarios.
- Escoger el lado de la identidad expresada de forma más complicada y transformarla en una forma más sencilla, a través de las identidades fundamentales.
- Reescribir sumas o diferencias de cocientes como un solo cociente.
- Para algunos ejercicios es conveniente reescribir un miembro de la identidad en términos de sólo senos y/o cosenos.
- No olvidar el objetivo, es decir, la expresión a la que se quiere llegar.
- Es importante recordar no tratar las identidades como si fueran ecuaciones, pues no se puede aplicar propiedad uniforme, es decir, sumar a ambos lados de la igualdad y obtener un enunciado verdadero pues el enunciado original es el que se está tratando de verificar.
- En algunos casos, resulta conveniente trabajar simultáneamente con los dos términos para llegar a una expresión común.

EJEMPLO Nº 1:

Demostrar que $\frac{\cot \theta \cdot \text{sen } \theta + \cos \theta}{\text{sen } \theta} = 2 \text{ctg } \theta$.

Solución: Debemos desarrollar el primer miembro, pues es evidente que el segundo no es susceptible de modificaciones claras.

Reemplazamos $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$:

$$\frac{\frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \cdot \text{sen } \theta + \cos \theta}{\text{sen } \theta} = 2 \text{ctg } \theta$$

$$\frac{\cos \theta + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{ctg} \theta$$

Luego

$$\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{ctg} \theta$$

$$2 \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{ctg} \theta$$

y como $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$, entonces concluimos que

$$2 \operatorname{ctg} \theta = 2 \operatorname{ctg} \theta. \text{ L.Q.Q.D.}$$

EJEMPLO Nº 2:

Verificar la siguiente identidad: $\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin^2 \theta$.

Solución:

$$\frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta$$

Por la identidad

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta$$

Suma de fracciones con diferente denominador.

$$\frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \sin^2 \theta$$

Por la identidad pitagórica fundamental

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \sin^2 \theta$$

Producto de extremos sobre producto de medios (Ley de la Oreja)

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \theta$$

L.Q.Q.D.

EJEMPLO Nº 3: Verificar la siguiente identidad:

$$(1 + \csc x)(1 - \sin x) = \cot x \cos x$$

Solución:

De acuerdo a la función recíproca $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)(1 - \sin x) = \cot x \cos x$$

Por suma de fracciones, se obtiene

$$\left(\frac{\sin x + 1}{\sin x}\right)(1 - \sin x) = \cot x \cos x$$

Multiplicando los términos

$$\frac{(\sin x + 1)(1 - \sin x)}{\sin x} = \cot x \cos x$$

Al realizar el producto de la suma por la diferencia:

$$\frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin x} = \cot x \cos x$$

Por identidad pitagórica:

$$\frac{\cos^2 x}{\sin x} = \cot x \cos x$$

Descomponiendo el término $\cos^2 \theta$ en dos factores:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \cos x = \cot x \cos x$$

Por identidad trigonométrica para $\cot x$:

$$\cot x \cos x = \cot x \cos x. \text{ L.Q.Q.D.}$$

Por consiguiente $(1 + \csc x)(1 - \sin x)$ es equivalente a $\cot x \cos x$.

IDENTIDADES PARA LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS

Veamos ahora otra serie de identidades referentes a la suma y diferencia de ángulos:

Para cualquier par de ángulos α y β se tiene

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

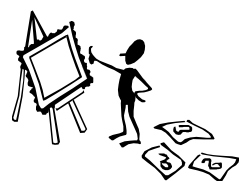
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$



Por ejemplo:

$$\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = \sqrt{2} \sin \theta$$

$$= \sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta -$$

$$(\sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta)$$

$$= 2 \cos 45^\circ \sin \theta$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta$$

$$= \sqrt{2} \sin \theta$$

EJEMPLO 2:

$$\sin(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$= \sin 30^\circ \cos \theta + \cos 30^\circ \sin \theta +$$

$$(\cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$= \cos \theta$$

Veamos ahora el último grupo de identidades trigonométricas para así realizar una serie de ejercicios en donde se aplican todas ellas.

IDENTIDADES PARA ÁNGULOS DOBLES

Si α es un ángulo cualquiera:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$



IDENTIDADES PARA ÁNGULOS MEDIOS

Si α es un ángulo cualquiera:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$



POR EJEMPLO: $\tan \theta \times \sin 2\theta = 2 \sin^2 \theta$

$$\tan \theta \times \sin 2\theta = 2 \sin^2 \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta \sin \theta$$
$$= 2 \sin^2 \theta$$

ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Una ecuación trigonométrica es una relación de igualdad que contiene expresiones trigonométricas y que solo es válida para ciertos valores de los ángulos.

Resolver una ecuación trigonométrica es hallar el valor o los valores de θ (si existen) para los cuales se satisface la ecuación.

Las siguientes son recomendaciones para resolver ecuaciones trigonométricas:

1. Expresa todas las funciones en términos de una sola función.
2. Utiliza identidades trigonométricas para lograr lo anterior.
3. Factorizar siempre que sea posible
4. Si obtienes una ecuación de segundo grado que no es posible factorizar con enteros, entonces utiliza la fórmula cuadrática.
5. Recuerda que si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$, o , $B = 0$.
6. Resuelve la parte trigonométrica, que consiste en hallar los valores del ángulo que satisface la ecuación en el intervalo dado, esto se logra usando las funciones trigonométricas inversas.

Por ejemplo:

$$\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\rightarrow \theta = \begin{cases} 30^\circ \\ 150^\circ \end{cases}$$

EJEMPLO 2

$$\cos^2 \theta - \frac{1}{4} = 0$$

Veamos:

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4} \rightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \theta = \begin{cases} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \cos^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \theta = \begin{cases} 60^\circ \\ 300^\circ \end{cases} \quad \text{o} \quad \theta = \begin{cases} 120^\circ \\ 240^\circ \end{cases}$$

EJEMPLOS

Resuelve las siguientes ecuaciones para ángulos comprendidos entre 0° y 360° :

1.- $\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$

Sol.-

Como tengo una ecuación debo tener una sola incógnita; usando las identidades fundamentales, sustituimos la expresión $\sin^2 x$.

$$(1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \cos^2 x = \frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow -2 \cos^2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2}$$

Buscamos soluciones según sea el signo del coseno.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 60^\circ, 300^\circ$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 120^\circ, 240^\circ$$

(No hace falta poner los ángulos que difieran vueltas completas puesto que el enunciado, precisamente, hace referencia a que las soluciones pertenezcan a la "primera vuelta")

2.- $\sin x + \cos 2x = 1$

Sol.-

Por el coseno del ángulo doble:

$$\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

Por la fórmula fundamental:

$$\operatorname{sen} x + 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$\text{Operando: } \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 1 - 1$$

$$\text{Sacando factor común: } \operatorname{sen} x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0$$

Posibilidades y resultados:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ, 180^\circ$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ, 150^\circ \text{ (Por ser suplementario del anterior)}$$

$$\text{3.- } \cos^2 x = \cos x$$

Sol.-

Reagrupando y sacando factor común:

$$\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ ó } (\cos x - 1) = 0$$

Posibilidades y resultados:

$$\text{a) } \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\text{b) } \cos x = 1 \Rightarrow x = 0^\circ, 360^\circ$$

$$\text{4.- } 2 \cos x = \sec x$$

Sol.-

$$\text{Aplicando el valor de la secante: } 2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Reagrupando: } 2 \cos^2 x = 1$$

Sacando raíces:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Posibilidades y resultados:

$$\text{a) } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 45^\circ, 315^\circ \text{ (Por que los ángulos que difieren } 360^\circ \text{ tienen el mismo coseno)}$$

$$\text{b) } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 135^\circ, 225^\circ \text{ (Por la razón anterior)}$$

En resumen, y sólo en este caso, podemos reunir las cuatro soluciones anteriores en la expresión siguiente:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{5.- } 3 \tan^2 x = \sec^2 x + 1$$

Sol.-

$$\text{Aplicando definiciones: } 3 \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + 1$$

Quitando denominadores:

$$3 \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x = 1 + \cos^2 x$$

(En el resultado, habrá que controlar si se han introducido soluciones "extrañas" a la ecuación, puesto que hemos multiplicado por una función en ambos miembros)

Usando identidad trigonométrica fundamental:

$$3 \operatorname{sen}^2 x = 1 + 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\text{Reagrupando: } 4 \operatorname{sen}^2 x = 2$$

$$\text{Despejando: } \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las soluciones, como en el caso anterior (se puede comprobar) corresponden, una vez agrupadas, a

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Igualmente se puede comprobar que no se han introducido soluciones extrañas.

Otra forma de resolver la misma ecuación:

$$3 \tan^2 x = \sec^2 x + 1$$

$$\text{Sumando y restando 3: } 3 \tan^2 x + 3 - 3 = \sec^2 x + 1$$

$$\text{Sacando factor común: } 3 \cdot (\tan^2 x + 1) - 3 = \sec^2 x + 1$$

Aplicando identidad trigonométrica fundamental:

$$3 \sec^2 x - 3 = \sec^2 x + 1$$

$$\text{Reagrupando: } 2 \sec^2 x = 4$$

$$\text{Despejando: } \sec^2 x = 2$$

$$\text{Calculando inversos en ambos miembros: } \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Despejando: } \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es evidente que esta ecuación tiene las mismas soluciones que usando el otro camino (ver problema anterior)

$$\text{6.- } \cos 2x + 5\cos^2 x = 5$$

Sol.-

$$\text{Valor del coseno de } 2x: \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x = 5$$

Reagrupando y "abriendo" el sen:

$$6 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 5$$

$$\text{Reagrupando: } 7 \cos^2 x = 6$$

$$\text{Despejando: } \cos^2 x = \frac{6}{7} \Rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{6}{7}}$$

Solución 1: 22°

Solución 2: 338°

Solución 3: 157°

Solución 4: 203°

$$\text{7.- } \cos 2x + 6\cos^2 x = 1$$

Sol.-

$$\text{Valor de coseno } 2x: \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 6\cos^2 x = 1$$

"Abriendo el

coseno": $1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 6(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1$

Operando: $6 - 8\operatorname{sen}^2 x = 0$

Despejando: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{4}$

Despejando: $\operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución 1: $x = 60^\circ$

Solución 2: $x = 120^\circ$ (Ángulos suplementarios)

Solución 3: $x = 240^\circ$

Solución 4: $x = 300^\circ$ (Ángulos suplementarios)

8.- $\cos x + \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$

Sol.-

Aplicando "seno del ángulo mitad":

$$\cos x + \left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos x + \frac{1 - \cos x}{2} = 1$$

Quitando denominadores: $2 \cos x + 1 - \cos x = 2$

Operando: $\cos x = 1$

Solución única: 0° y 360°

9.- $\cos x - \operatorname{sen} 2x = 0$

Sol.-

Aplicando "seno del ángulo

doble": $\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0$

Sacando factor común: $\cos x(1 - 2 \operatorname{sen} x) = 0$

Tenemos ahora dos números cuyo producto es 0. Uno de ellos, al menos, debe ser cero, es decir:

$$\cos x = 0 \text{ ó } 1 - 2 \operatorname{sen} x = 0$$

Solución 1: $\cos x = 0 \Rightarrow x = 90^\circ, 270^\circ$

Solución 2: $1 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = 30^\circ, 150^\circ$
