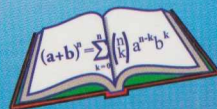




Eduardo Espinoza Ramos
Graduado y Titulado en Matemática Pura.
Catedrático de las principales
Universidades de la Capital

OBRAS PUBLICADAS



EDITORIAL

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

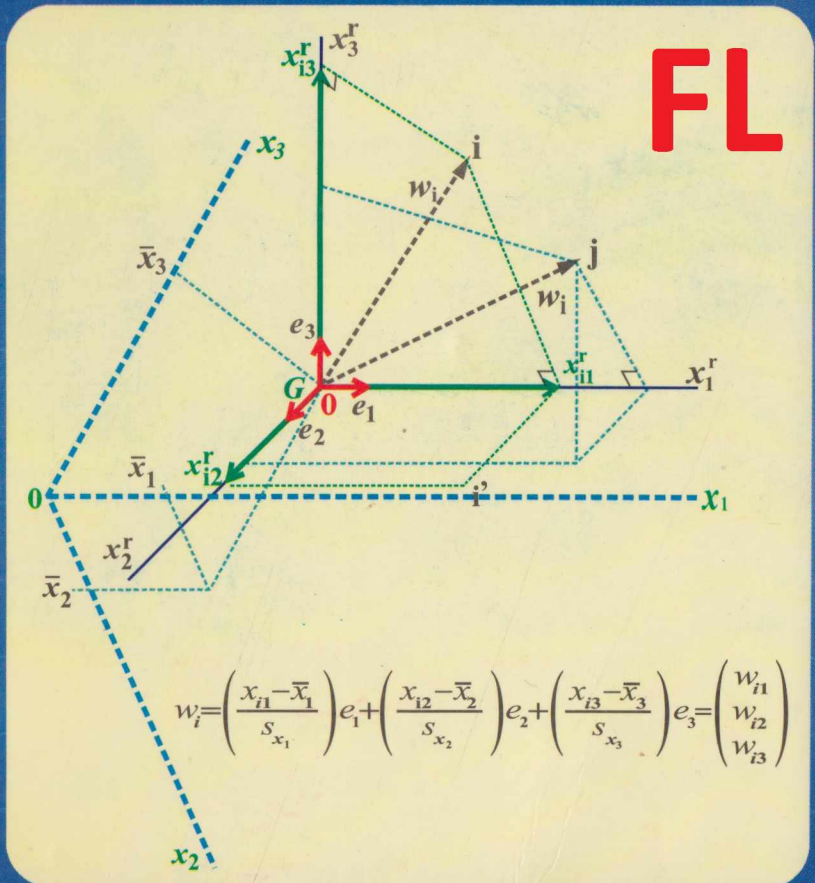
SEGUNDA
EDICIÓN

EDUARDO
ESPINOZA
RAMOS

ÁLGEBRA LINEAL
PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA

ÁLGEBRA LINEAL

PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA

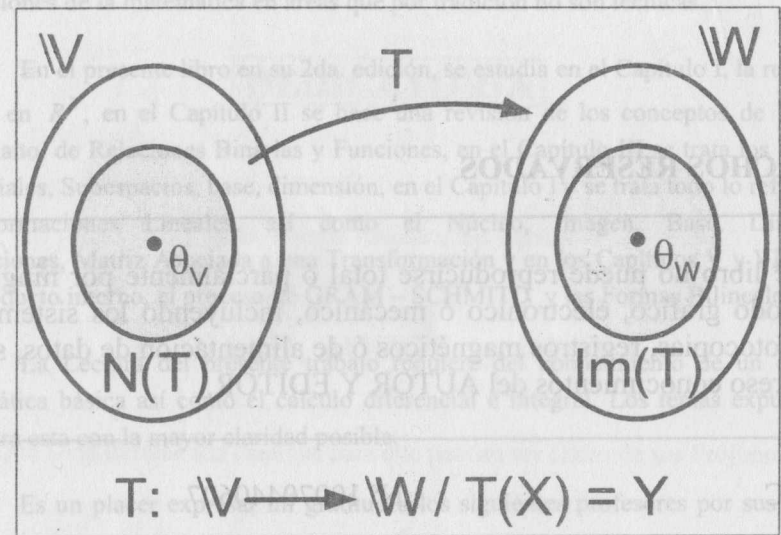


Eduardo Espinoza Ramos

Lima - Perú

Nueva
Edición

ALGEBRA LINEAL



EDUARDO ESPINOZA RAMOS

LIMA - PERU

IMPRESO EN EL PERU

25 - 08 - 2006

2da. Edición

PRÓLOGO

El estudio del Algebra Lineal, hace tan sólo unos 80 años, estaba destinado nada más a los estudiantes de Matemática y Física, aquellos que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como estadística multivariada.

En el Algebra Lineal se estudia ahora en muchas disciplinas debido a la invención de las computadoras de alta velocidad y el aumento general de las aplicaciones de la matemática en áreas que por tradición no son técnicas.

En el presente libro en su 2da. edición, se estudia en el Capítulo I, la recta y los planos en R^3 , en el Capítulo II se hace una revisión de los conceptos de Producto Cartesiano, de Relaciones Binarias y Funciones, en el Capítulo III se trata los Espacios Vectoriales, Subespacios, base, dimensión, en el Capítulo IV se trata todo lo referentes a Transformaciones Lineales, así como el Núcleo, Imagen, Base, Dimensión, Operaciones, Matriz Asociada a una Transformación y en los Capítulos V y VI, se trata del producto interno, el proceso de GRAM - SCHMITD y las Formas Bilineales.

La Lectura del presente trabajo requiere del conocimiento de un curso de matemática básica así como el cálculo diferencial e integral. Los temas expuestos en esta obra esta con la mayor claridad posible.

Es un placer expresar mi gratitud a los siguientes profesores por sus valiosas sugerencias.

- ♦ Lic. Juan Bernuy Barros
- ♦ Doctor Pedro Contreras Chamorro.
- ♦ Lic. Antonio Calderón.
- ♦ Lic. Guillermo Más Azahuanche.

Y a todo el público por la preferencia que brindan a cada una de mis publicaciones

EDUARDO ESPINOZA RAMOS

DERECHOS RESERVADOS

Este libro no puede reproducirse total ó parcialmente por ningún método gráfico, electrónico ó mecánico, incluyendo los sistemas de fotocopias, registros magnéticos ó de alimentación de datos, sin expreso conocimientos del AUTOR Y EDITOR.

RUC : N° 10070440607

Ley del libro : N° 28086

Ley de Derecho del Autor : N° 13714

Registro Comercial : N° 10716

Escritura Pública : N° 4484

PRÓLOGO

IMPRESO EN EL PERU

El estudio del Álgebra Lineal, hace un sólo unos 80 años, estaba destinado nada más a los estudiantes de Matemáticas y Física, aquellos que necesitaban conocimientos de la teoría de matrices para trabajar en áreas técnicas como estadística multivariada.

En el Álgebra Lineal se estudia ahora en muchas disciplinas debido a la invención de las computadoras de alta velocidad y el aumento general de las aplicaciones de la matemática en áreas que por tradición no son técnicas.

En el presente libro en su 3da. edición, se estudia en el Capítulo I, la recta y los planos en R^3 , en el Capítulo II se hace una revisión de los conceptos de Producto Cartesiano, de Relaciones Binarias y Funciones, en el Capítulo III se trata los Espacios Vectoriales, Subespacios, base, dimensión, en el Capítulo IV se trata todos los tipos de Transformaciones Lineales, así como el Núcleo, imagen, Base, Dimensión, Operaciones, Matriz Asociada a una Transformación y en los Capítulos V y VI se trata del producto interno, el proceso de GRAM-SCHMIDT y las Formas Bilineales.

La lectura del presente libro requiere conocimientos de un curso de matemática básica así como el cálculo diferencial e integral. Los temas expuestos en esta obra están con la mayor claridad posible.

Es un placer expresar mi gratitud a los siguientes profesores por sus sugerencias.

- ♦ L.c. Juan Betruy Barrios
- ♦ L.c. Antonio Calderón
- ♦ L.c. Pedro Contreras Chantorno
- ♦ L.c. Antonio Calderón

Y a todo el público que lea esta obra que sirva de guía a cada uno de mis estudiantes.

Escritura Pública

INDICE

CAPÍTULO I

1. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

1.1	Sistema de Coordenada Rectangular en el Espacio.	2
1.2	Distancia entre Dos Rectas.	3
1.3	División de un Segmento según una Razón dada.	5
1.4	Ángulos Directores, Cosenos Directores y Números Directores.	7
1.5	Expresiones de los Cosenos Directores de una Recta determinados por Dos de sus Puntos.	8
1.6	Relación entre los Cosenos Directores de una Recta.	8
A.	LA RECTA.	9
1.7	La Recta en el Espacio Tridimensional.	9
1.8	Que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser Guías de sus Próximo	10
1.9	Ecuación Paramétrica de la Recta en el Espacio.	11
1.10	Ecuación Simétrica de la Recta.	12
1.11	Rectas Paralelas y Ortogonales.	14
1.12	Ángulo entre Dos Rectas.	16
1.13	Distancia Mínima entre Dos Rectas (Rectas que se Cruzan).	16
1.14	Teorema.	18
1.15	Teorema.	19
1.16	Proyección Ortogonal de un Punto Sobre una Recta.	21
1.17	Ejercicios Desarrollados.	22

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos.

RONALD, JORGE y DIANA

DEDICATORIA

Este libro lo dedico a mis hijos.

RONALD, JORGE y DIANA

Que Dios ilumine sus caminos para que puedan ser Guías de sus Prójimo

INDICE

CAPÍTULO I

1. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

1.1	Sistema de Coordenada Rectangular en el Espacio.	2
1.2	Distancia entre Dos Puntos.	3
1.3	División de un Segmento según una Razón dada.	5
1.4	Ángulos Directores, Cosenos Directores y Números Directores.	7
1.5	Expresiones de los Cosenos Directores de una Recta determinados por Dos de sus Puntos.	8
1.6	Relación entre los Cosenos Directores de una Recta.	8
A.	LA RECTA	9
1.7	La Recta en el Espacio Tridimensional.	9
1.8	Ecuación Vectorial de la Recta.	10
1.9	Ecuación Paramétrica de la Recta en el Espacio.	11
1.10	Ecuación Simétrica de la Recta.	12
1.11	Rectas Paralelas y Ortogonales.	14
1.12	Ángulo entre Dos Rectas.	16
1.13	Distancia Mínima entre Dos Rectas (Rectas que se Cruzan).	16
1.14	Teorema.	18
1.15	Teorema.	19
1.16	Proyección Ortogonal de un Punto Sobre una Recta.	21
1.17	Ejercicios Desarrollados.	22

B.	EL PLANO	38
1.18	Definición.	38
1.19	Ecuación Vectorial del Plano.	38
1.20	Ecuaciones Paramétricas del Plano.	40
1.21	Ecuación General del Plano.	40
1.22	Planos Paralelos y Ortogonales.	41
1.23	Intersección de Planos.	43
1.24	Ecuación Biplanar de la Recta.	43
1.25	Intersección entre Recta y Plano.	45
1.26	Plano Paralelo a una Recta y Plano Perpendicular a una Recta.	46
1.27	Familia de Planos.	48
1.28	Ecuaciones Incompletas del Plano.	49
1.29	Distancia de un Punto a un Plano.	51
1.30	Ángulo entre Recta y Plano.	53
1.31	Proyección Ortogonal de un Punto sobre un Plano.	54
1.32	Proyección Ortogonal de una Recta sobre un Plano.	55
1.33	Distancia Mínima entre un Plano y una Recta que no está contenida en el Plano.	58
1.34	Ángulo entre dos Planos.	59
1.35	Ejercicios Desarrollados.	59
1.36	Ejercicios Propuestos.	75

CAPÍTULO II

2. CONCEPTOS BÁSICOS

2.1.	Producto de dos Conjuntos	104
2.2.	Propiedades de dos Conjuntos	104
2.3.	Relación Binaria	104

2.4.	Aplicación de X en Y	104
2.5.	Clases de Funciones	105
2.6.	Conjunto Imagen y Conjunto Imagen Inversa	105
2.7.	Composición de Funciones	106
2.8.	Leyes de Composición Interna y Externa	107
2.9.	Campo o Cuerpo	107

CAPÍTULO III

3. ESPACIOS VECTORIALES

3.1.	Definición	111
3.2.	Ejemplos de Espacios Vectoriales	113
3.3.	Propiedades de los Espacios Vectoriales	117
3.4.	Espacio Vectorial de Funciones	119
3.5.	Espacio Vectorial de las Matrices $m \times n$	121
3.6.	Ejercicios Propuestos	127
3.7.	Sub – espacios Vectoriales	130
3.8.	Operaciones con Funciones	153
3.9.	Combinaciones Lineales	168
3.10.	Conjunto de Combinaciones Lineales	171
3.11.	Sub – espacio Generado	173
3.12.	Independencia y Dependencia Lineal	178
3.13.	Sistema de Generadores	184
3.14.	Base de un Espacio Vectorial	186
3.15.	Dimensión de un Espacio Vectorial	191
3.16.	Dimensión de la suma	195
3.17.	Dimensión de la suma Directa	199
3.18.	Teorema	208
3.19.	Ejercicios Propuestos	213

CAPÍTULO IV

4. TRANSFORMACIONES LINEALES

4.1.	Definición	229
4.2.	Interpretación Geométrica	230
4.3.	Teorema	230
4.4.	Proposición	237
4.5.	Clasificación de las Transformaciones Lineales	239
4.6.	Proposición	242
4.7.	Núcleo o Imagen de una Transformación Lineal	247
4.8.	Teorema	252
4.9.	Dimensiones del Núcleo y de la Imagen	255
4.10.	Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales	260
4.11.	Coordenadas o Componentes de un Vector	266
4.12.	Matriz Asociada a una Transformaciones Lineales	268
4.13.	Algebra de las Transformaciones Lineales	275
4.14.	Composición de las Transformaciones Lineales	278
4.15.	Transformaciones Lineales Inversibles	282
4.16.	Teorema	287
4.17.	Isomorfismo Inducido por una Transformación Lineal	289
4.18.	Cambio de Base y Semejanza de Matrices	296
4.19.	Ejercicios Propuestos	303

CAPÍTULO V

5. PRODUCTO INTERNO Y ORTOGONALIDAD

5.1.	Definición	321
5.2.	Definición	323
5.3.	Teorema	327

5.4.	Ortogonalidad – Conjunto Ortogonal – Conjunto Ortonormal	329
5.5.	Teorema	333
5.6.	Corolario	333
5.7.	Proceso de Ortogonalidad de GRAM – SCHMIDT	335
5.8.	Corolario	338
5.9.	Definición	339
5.10.	Teorema	339
5.11.	Ejercicios Propuestos	342

CAPÍTULO VI

6. VALORES Y VECTORES PROPIOS

6.1.	Definición	343
6.2.	Valores y Vectores Propios de una Matriz	344
6.3.	Definición	345
6.4.	Teorema	350
6.5.	Polinomio Característico de una Matriz	353
6.6.	Matrices Semejantes y Diagonalización	355
6.7.	Teorema	356
6.8.	Matriz Diagonalizable	356
6.9.	Teorema	358
6.10.	Teorema de Cayley – Hamilton	364
6.11.	Ejercicios Propuestos	369
6.12.	Formas Bilineales	379
6.13.	Matriz Bilineal Simétrica	380
6.14.	Forma Bilineal Simétrica	381
6.15.	Formas Cuadráticas	383
6.16.	Ejercicios Propuestos	385

BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO I

1. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

PRE-REQUISITOS.- Para la comprensión adecuada de este tema de rectas y planos en R^3 , se requiere de los conocimientos previos de:

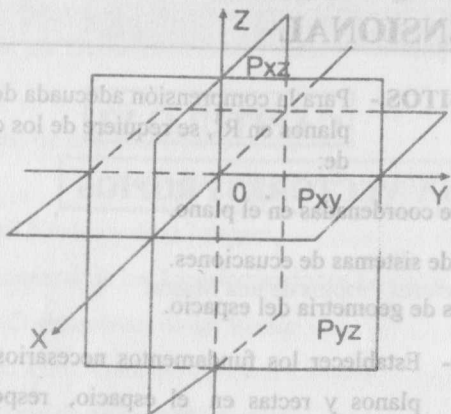
- Sistema de coordenadas en el plano.
- Solución de sistemas de ecuaciones.
- Elementos de geometría del espacio.

OBJETIVOS.- Establecer los fundamentos necesarios para el trazado de planos y rectas en el espacio, respecto a un sistema de coordenadas. Al terminar este capítulo el alumno debe ser capaz de:

- Describir el sistema coordenado en el espacio.
- Situar puntos en el sistema coordenado del espacio.
- Recordar las distintas formas de la ecuación general de un plano.
- Trazar un plano dada su ecuación, interpretando geoméricamente.
- Hallar la ecuación del plano a partir de condiciones geométricas.
- Recordar que dos ecuaciones lineales simultáneas representan una recta en el espacio. (Sistema Compatible).
- Representar gráficamente una recta en el espacio.
- Hallar la ecuación de la recta en el espacio a partir de condiciones geométricas dadas.

1.1. SISTEMA DE COORDENADA RECTANGULAR EN EL ESPACIO.-

Consideremos tres planos mutuamente perpendiculares, P_{xy} , P_{xz} y P_{yz} , que se cortan en un mismo punto O . En la figura identificamos los siguientes elementos geométricos.

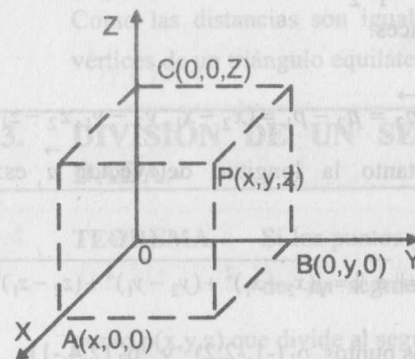


a) **EJES COORDENADOS.-** Los ejes generalmente son identificados por las letras X , Y , Z y se habla frecuentemente del eje X , del eje Y y del eje Z , donde:

El eje X es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xy} y P_{xz} , el eje Y es la recta determinada por la intersección de los planos P_{xy} y P_{yz} y el eje Z es la recta determinada por la intersección de los plano P_{xz} y P_{yz} .

La dirección positiva se indica por medio de una flecha. Los ejes coordenados tomados de dos en dos determinan tres planos, llamados planos coordenados.

b) PLANOS COORDENADOS.-



El plano coordenado XY que denotaremos por P_{xy} , es determinado por las rectas: eje X y el eje Y .

El Plano coordenado XZ que denotaremos por P_{xz} , es determinado por las rectas: eje X y el eje Z .

El Plano coordenado YZ que denotaremos por P_{yz} , es determinado por las rectas: eje Y y el eje Z .

Los planos coordenados dividen al espacio tridimensional en 8 sub-espacios llamados octantes.

Consideremos un punto $P(x, y, z)$, cualquiera en el espacio tridimensional, a través de $P(x, y, z)$ se construye tres planos, un plano perpendicular a cada uno de los ejes coordenados.

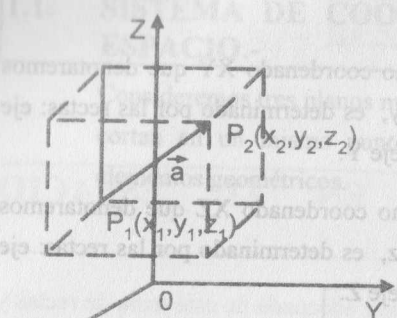
Sea $A(x, 0, 0)$ el punto en el cual el plano perpendicular corta al eje X , $B(0, y, 0)$ el punto en el cual el plano perpendicular corta al eje Y , y sea $C(0, 0, z)$ el punto en el cual el plano perpendicular corta al eje Z .

1.2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.-

TEOREMA.- La distancia no dirigida entre dos puntos $p_1(x_1, y_1, z_1)$ y $p_2(x_2, y_2, z_2)$ del espacio tridimensional está dado por:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demostración



Sea $\vec{a} = \overrightarrow{p_1 p_2}$ un vector de origen p_1 y extremo p_2 , entonces:

$$\vec{a} = \overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

por lo tanto la longitud del vector \vec{a} es:

$$d(p_1, p_2) = \|\vec{a}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Ejemplo.- Hallar la distancia entre los puntos $p_1(-1, -2, 2)$ y $p_2(2, 4, -1)$

Solución

Sea $\vec{a} = \overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = (2, 4, -1) - (-1, -2, 2) = (3, 6, -3)$

$$d(p_1, p_2) = \|\vec{a}\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54}$$

$$\therefore d(p_1, p_2) = 3\sqrt{6}$$

Ejemplo.- Demostrar que los puntos $p_1(-2, 4, -3)$, $p_2(4, -3, -2)$ y $p_3(-3, -2, 4)$ son los vértices de un triángulo equilátero.

Solución

Los puntos p_1 , p_2 y p_3 son los vértices de un triángulo equilátero si:

$d(p_1, p_2) = d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3)$, ahora calculando cada una de las distancias:

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-3 - 4)^2 + (-2 - (-3))^2} = \sqrt{36 + 49 + 1} = \sqrt{86}$$

$$d(p_1, p_3) = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (-2 - 4)^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{1 + 36 + 49} = \sqrt{86}$$

$$d(p_2, p_3) = \sqrt{(-3 - 4)^2 + (-2 - (-3))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{49 + 1 + 36} = \sqrt{86}$$

Como las distancias son iguales, entonces los puntos p_1 , p_2 y p_3 son los vértices de un triángulo equilátero.

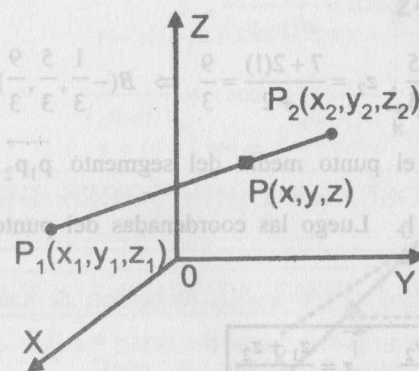
1.3. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO SEGÚN UNA RAZÓN DADA.-

TEOREMA.- Si los puntos $p_1(x_1, y_1, z_1)$ y $p_2(x_2, y_2, z_2)$ son los extremos de un segmento dirigido $\overrightarrow{p_1 p_2}$; las coordenadas de un

punto $p(x, y, z)$ que divide al segmento $\overrightarrow{p_1 p_2}$ en la Razón $r = \overrightarrow{p_1 p} : \overrightarrow{p p_2}$ es:

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1 + r}, y = \frac{y_1 + r y_2}{1 + r}, z = \frac{z_1 + r z_2}{1 + r}, r \neq -1$$

Demostración



Del gráfico se tiene: $\overrightarrow{p_1 p} \parallel \overrightarrow{p p_2} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}$

tal que: $\overrightarrow{p_1 p} = r \overrightarrow{p p_2}$, de donde $p - p_1 = r(p_2 - p)$ al despejar p se tiene:

$p = \frac{1}{1+r}(p_1 + r p_2)$, ahora reemplazamos por sus coordenadas respectivas:

$$(x, y, z) = \frac{1}{1+r}((x_1, y_1, z_1) + r(x_2, y_2, z_2))$$

$(x, y, z) = (\frac{x_1 + r x_2}{1+r}, \frac{y_1 + r y_2}{1+r}, \frac{z_1 + r z_2}{1+r})$, por igualdad se tiene:

$$x = \frac{x_1 + r x_2}{1+r}, y = \frac{y_1 + r y_2}{1+r}, z = \frac{z_1 + r z_2}{1+r}, r \neq -1$$

Ejemplo.- Hallar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $(5, -1, 7)$ y $(-3, 3, 1)$

Solución

$$P_1(5, -1, 7) \quad \quad \quad P_2(-3, 3, 1)$$

Calculando las coordenadas del punto A se tiene:

$$r = \frac{P_1A}{Ap_2} = \frac{P_1A}{2P_1A} = \frac{1}{2} \quad \text{entonces } r = \frac{1}{2}, \text{ por lo tanto se tiene:}$$

$$x_1 = \frac{5 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{3}, \quad y_1 = \frac{-1 + \frac{1}{2}(3)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad z_1 = \frac{7 + \frac{1}{2}(1)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{15}{3} \Rightarrow A\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{15}{3}\right)$$

$$\text{Ahora calculemos las coordenadas del punto B donde: } r = \frac{P_1B}{Bp_2} = \frac{2Bp_2}{Bp_2} = 2,$$

entonces $r = 2$

$$x_2 = \frac{5 + 2(-3)}{1 + 2} = \frac{1}{3}, \quad y_2 = \frac{-1 + 2(3)}{1 + 2} = \frac{5}{3}, \quad z_2 = \frac{7 + 2(1)}{1 + 2} = \frac{9}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}\right)$$

COROLARIO.- Si $p(x, y, z)$ es el punto medio del segmento $\overline{p_1p_2}$, entonces $r = \frac{P_1P}{PP_2} = 1$. Luego las coordenadas del punto medio son:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Ejemplo.- Los puntos extremos de un segmento son $p_1(-2, 1, 4)$ y $p_2(3, 2, -1)$.

Hallar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{p_1p_2}$

Solución

Sea $p(x, y, z)$ el punto medio de p_1 y p_2 entonces:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

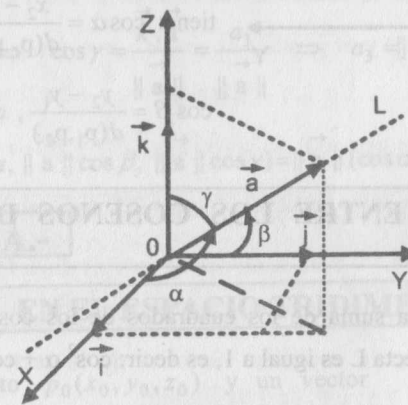
$$\text{entonces } p\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

1.4. ÁNGULOS DIRECTORES, COSENOS DIRECTORES Y NÚMEROS DIRECTORES.-

Consideremos el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ en el espacio tridimensional y los ángulos α , β y γ formados por los ejes coordenados positivos y el vector

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; es decir: $\alpha = \angle(\vec{i}, \vec{a})$, $\beta = \angle(\vec{j}, \vec{a})$, $\gamma = \angle(\vec{k}, \vec{a})$. Si $\vec{a} // L$

(recta) donde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ diremos que:

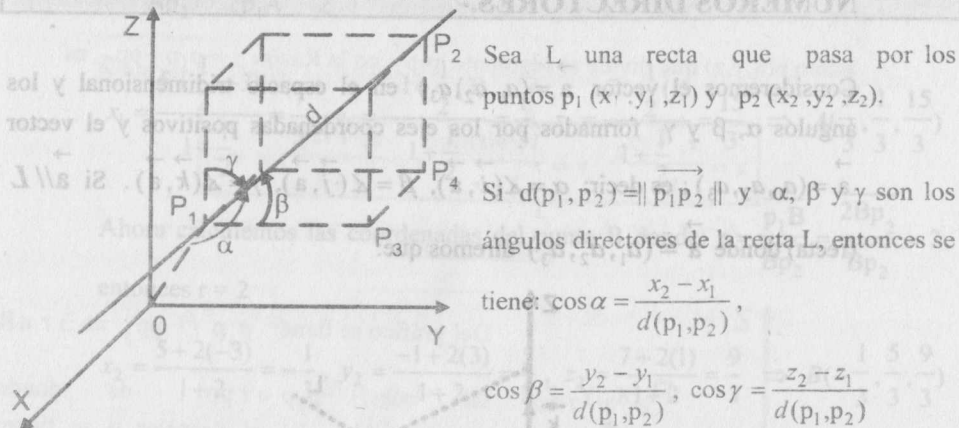


- a_1, a_2, a_3 son los números directores de la recta L .
- Los ángulos α , β y γ se llaman ángulos directores de la recta L , y son formados por los rayos positivos de los ejes de coordenadas y la recta, respectivamente.

Los ángulos directores toman valores entre 0° y 180° , es decir: $0^\circ \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 180^\circ$.

- iii) A los cosenos de los ángulos directores de la recta L , es decir: $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, se denominan cosenos directores.

1.5. EXPRESIONES DE LOS COSENO DIRECTORES DE UNA RECTA DETERMINADOS POR DOS DE SUS PUNTOS.-



1.6. RELACIÓN ENTRE LOS COSENO DIRECTORES DE UNA RECTA.-

TEOREMA.- La suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta L es igual a 1, es decir: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Demostración

Aplicando la parte 2.5, se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}, \quad \text{de donde}$$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, por lo tanto:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{(x_2 - x_1)^2}{d^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{d^2} + \frac{(z_2 - z_1)^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

OBSERVACIÓN.- Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es un vector dirección de la recta L , donde $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, entonces:

$$\alpha = \angle(\vec{i}, \vec{a}) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\| \|\vec{i}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow a_1 = \|\vec{a}\| \cos \alpha$$

$$\beta = \angle(\vec{j}, \vec{a}) \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{j} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\| \|\vec{j}\|} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow a_2 = \|\vec{a}\| \cos \beta$$

$$\gamma = \angle(\vec{k}, \vec{a}) \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\| \|\vec{k}\|} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \Rightarrow a_3 = \|\vec{a}\| \cos \gamma$$

$$\vec{a} = (\|\vec{a}\| \cos \alpha, \|\vec{a}\| \cos \beta, \|\vec{a}\| \cos \gamma) = \|\vec{a}\| (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

A. LA RECTA.-

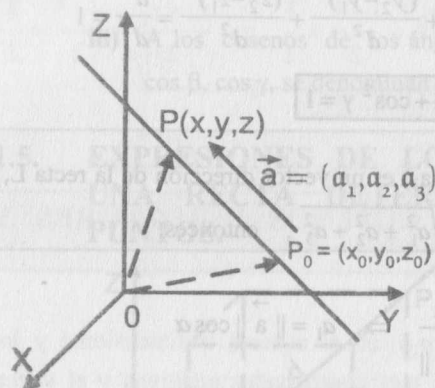
1.7. LA RECTA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL.-

Dado un punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ no nulo, llamaremos recta que pasa por $p_0(x_0, y_0, z_0)$ paralela al vector

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ al conjunto.

$$L = \{p \in R^3 / p = p_0 + t \vec{a}, t \in R\}$$

1.8. ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA.-



Sea L la recta que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ paralelo al vector

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Si $p(x, y, z)$ de R^3 es un punto cualquiera de la recta L , entonces el vector $\vec{p_0p}$ es paralelo al

vector \vec{a} , es decir: $\vec{p_0p} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \exists t \in R$ tal

que: $\vec{p_0p} = t \vec{a}$, de donde $p - p_0 = t \vec{a}$

entonces $p = p_0 + t \vec{a}$, por lo tanto la recta L es dado por:

$$L = \{P = p_0 + t \vec{a} / t \in R\} \quad \text{ecuación vectorial de la recta } L.$$

Ejemplo.- Hallar la ecuación vectorial de la recta L que pasa por el punto $(4, 0, 5)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (1, -1, 3)$

Solución

Como la ecuación vectorial de la recta es: $L = \{p_0 + t \vec{a} / t \in R\}$

reemplazando los datos se tiene: $L = \{(4, 0, 5) + t(1, -1, 3) / t \in R\}$

OBSERVACIÓN.- Para cada par de puntos distintos de R^3 , hay una y solo una recta que pasa por ellos.

Ejemplo.- Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P_1(1, 3, 5)$ y $P_2(4, 2, 7)$.

Solución

La ecuación vectorial de la recta, está dado por: $L = \{p_1 + t \vec{p_1p_2} / t \in R\}$,

donde $\vec{p_1p_2} = (3, -1, 2)$ $\therefore L = \{(1, 3, 5) + t(3, -1, 2) / t \in R\}$

OBSERVACIÓN.- Consideremos la recta $L = \{p_0 + t \vec{a} / t \in R\}$. Un punto p de R^3 pertenece a la recta L si $p = p_0 + t \vec{a}$ para algún t en R , es decir:

$$p \in L \Leftrightarrow p = p_0 + t \vec{a} \quad \text{para algún } t \text{ real}$$

1.9. ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA EN EL ESPACIO.-

Consideremos la ecuación vectorial de la recta L : $L = \{P_0 + t \vec{a} / t \in R\}$

De la observación anterior se tiene: $P \in L \Leftrightarrow P = P_0 + t \vec{a}$, para algún $t \in R$

de donde, al reemplazar por las coordenadas de P , P_0 y de las componentes del vector \vec{a} se tiene: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3)$, es decir:

$$L: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in R$$

Las cuales se conocen con el nombre de ecuaciones paramétricas de la recta L .

Ejemplo.- Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por el punto $(5, 3, 2)$, paralela al vector $\vec{a} = (4, 1, -1)$

Solución

Las ecuaciones paramétricas de la recta L son: $L: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in R$

OBSERVACIÓN.- Las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por el par de puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ está dado por:

$$L: \begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Ejemplo.- Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por los puntos $P_1(1, 2, 1)$ y $P_2(5, -1, 1)$

Solución

De acuerdo a la observación se tiene que las ecuaciones paramétricas de la recta L son:

$$L: \begin{cases} x = 1 + (5-1)t \\ y = 2 + (-1-2)t \\ z = 1 + (1-1)t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ es decir: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + 0t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1.10. ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA.-

Consideremos las ecuaciones paramétricas de la recta L .

$$L: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Suponiendo que $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, despejando el parámetro t de cada

ecuación tenemos: $t = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$, de donde por igualdad

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Que se denomina ecuación simétrica de la recta L .

Ejemplo.- Encontrar las ecuaciones simétricas de la recta paralela al vector $\vec{a} = (4, -3, 2)$ que pasa por el punto $(2, 5, -1)$

Solución

como $L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ se tiene $L: \frac{x - 2}{4} = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z + 1}{2}$

OBSERVACIÓN.-

① Si $a_3 = 0$, la ecuación simétrica de la recta L se escribe en la forma

$$L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \wedge z = z_0$$

② Si $a_1 = 0 \wedge a_3 = 0$. La ecuación simétrica de la recta L se escribe en la forma:

$$L: x = x_0 \wedge z = z_0$$

Ejemplo.- Hallar la ecuación simétrica de la recta L que pasa por $P_0(-1, 1, 1)$ paralela al vector $\vec{a} = (2, 0, 1)$

Solución

como $L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ ecuación simétrica de la recta L y como $a_2 = 0$, la ecuación de esta recta es $L: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{z - z_0}{a_3} \wedge y = y_0$, ahora reemplazamos por los datos se tiene: $L: \frac{x + 1}{2} = \frac{z - 1}{1} \wedge y = 1$

1.11. RECTAS PARALELAS Y ORTOGONALES.-

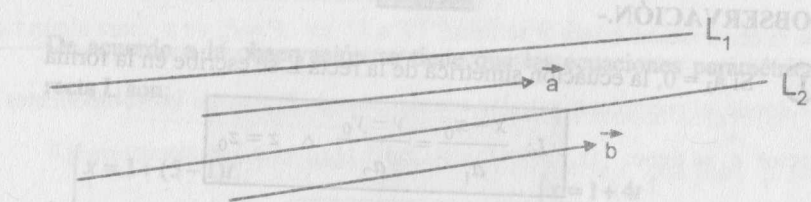
Las relaciones de paralelismo y ortogonalidad entre dos rectas se da comparando sus vectores direccionales.

Consideremos las ecuaciones vectoriales de dos rectas.

$$L_1 = \{p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad L_2 = \{q_0 + \lambda \vec{b} / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

La recta L_1 y la recta L_2 son paralelas ($L_1 \parallel L_2$) si y sólo si, sus vectores direccionales son paralelo, es decir:

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$



La recta L_1 y la recta L_2 son ortogonales ($L_1 \perp L_2$) si y sólo si sus vectores direccionales son ortogonales, es decir:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

OBSERVACIÓN.-

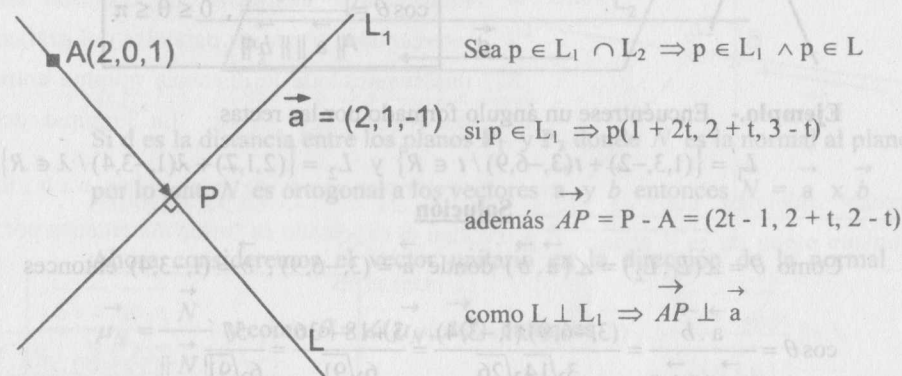
- ① Si L_1 y L_2 son paralelas ($L_1 \parallel L_2$), entonces $L_1 = L_2$ ó $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
- ② Si L_1 y L_2 no son paralelas ($L_1 \nparallel L_2$), entonces $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ (las rectas se cruzan) ó $L_1 \cap L_2$ consta de un solo punto.

Ejemplo.- La recta $L_1 = \{(1,2,-1) + t(5,-2,-3) / t \in \mathbb{R}\}$ es paralela a la recta

$L_2 = \{(1,-3,2) + \lambda(-10,4,6) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ puesto que el vector dirección de L_1 , $\vec{a} = (5,-2,-3)$ es paralelo al vector $\vec{b} = (-10,4,6)$ que es el vector dirección de la recta L_2 .

Ejemplo.- Hallar la ecuación de la recta L que intercepta en ángulo recto a la recta $L_1 = \{(1,2,3) + t(2,1,-1) / t \in \mathbb{R}\}$ y que pasa por el punto $A(2,0,1)$.

Solución



$$\text{Sea } p \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow p \in L_1 \wedge p \in L$$

$$\text{si } p \in L_1 \Rightarrow p(1+2t, 2+t, 3-t)$$

$$\text{además } \vec{AP} = P - A = (2t-1, 2+t, 2-t)$$

$$\text{como } L \perp L_1 \Rightarrow \vec{AP} \perp \vec{a}$$

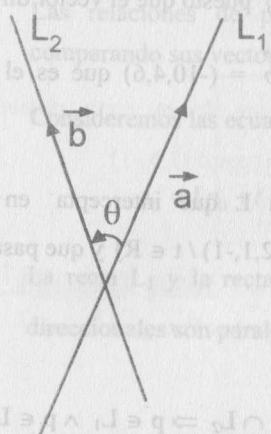
$$\text{Si } \vec{AP} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{AP} \cdot \vec{a} = 0$$

$$(2t-1, 2+t, 2-t) \cdot (2,1,-1) = 0 \Rightarrow 4t-2+2+t-2+t=0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$$

$$\text{por lo tanto } \vec{AP} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}(-1,7,5)$$

$$\text{Luego } L = \{(2,0,1) + \lambda(-1,7,5) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

1.12. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS.-



Consideremos las ecuaciones de dos rectas

$$L_1 = \{ p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R} \} \text{ y } L_2 = \{ q_0 + t \vec{b} / t \in \mathbb{R} \}$$

Un ángulo entre las rectas L_1 y L_2 se define como el ángulo formado por sus vectores direccionales \vec{a} y \vec{b} , es decir: $\angle(L_1, L_2) = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$, y es dado por la fórmula.

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Ejemplo.- Encuéntrese un ángulo formado por las rectas

$$L_1 = \{ (1, 3, -2) + t(3, -6, 9) / t \in \mathbb{R} \} \text{ y } L_2 = \{ (2, 1, 7) + \lambda(1, -3, 4) / \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Solución

Como $\theta = \angle(L_1, L_2) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ donde $\vec{a} = (3, -6, 9)$, $\vec{b} = (1, -3, 4)$ entonces

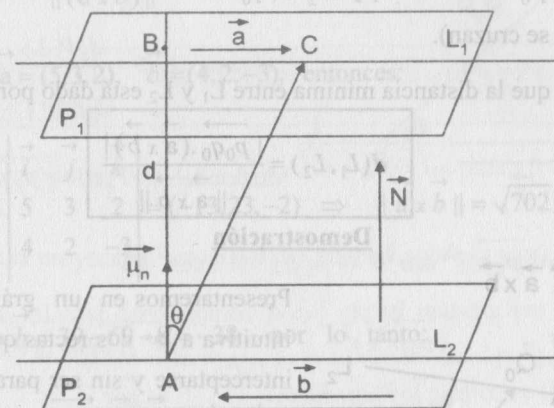
$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{(3, -6, 9) \cdot (1, -3, 4)}{3\sqrt{14} \sqrt{26}} = \frac{3+18+36}{6\sqrt{91}} = \frac{57}{6\sqrt{91}}$$

$$\cos \theta = 0.99587 \text{ de donde } \theta = \arccos(0.99587)$$

1.13. DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS (RECTAS QUE SE CRUZAN).-

Si $L_1 = \{ p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R} \}$ y $L_2 = \{ q_0 + \lambda \vec{b} / \lambda \in \mathbb{R} \}$ son dos rectas no paralelas (rectas que se cruzan), entonces a la distancia mínima entre las rectas L_1 y L_2 denotaremos por $d(L_1, L_2)$ y es definido como el segmento perpendicular común a ambas rectas.

Si las rectas L_1 y L_2 se cruzan, quiere decir que existen planos paralelos que contienen a las rectas L_1 y L_2 respectivamente.



Si d es la distancia entre los planos P_1 y P_2 donde \vec{N} es la normal al plano P_2 ; por lo tanto \vec{N} es ortogonal a los vectores \vec{a} y \vec{b} entonces $\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$

Ahora consideremos el vector unitario en la dirección de la normal \vec{N} ;

$$\vec{\mu}_N = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} \text{ y como } \theta = \angle(\vec{\mu}_N, \vec{AC}) \text{ entonces}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{\mu}_N \cdot \vec{AC}}{\|\vec{\mu}_N\| \|\vec{AC}\|} = \frac{\vec{\mu}_N \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AC}\|}, \text{ de donde } \boxed{\vec{\mu}_N \cdot \vec{AC} = \|\vec{AC}\| \cos \theta \quad \dots (1)}$$

por otro lado en el triángulo rectángulo ABC se tiene:

$$\boxed{d = \|\vec{AC}\| \cos \theta} \quad \dots (2)$$

$$\text{de donde al comparar (1) y (2) se tiene: } \boxed{d(L_1, L_2) = |\vec{\mu}_N \cdot \vec{AC}|}$$

1.14. TEOREMA.-

Sean $L_1 = \{p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{q_0 + \lambda \vec{b} / \lambda \in \mathbb{R}\}$ dos rectas no paralelas (rectas que se cruzan).

Demuestre que la distancia mínima entre L_1 y L_2 está dado por:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\vec{p_0 q_0} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Demostración

Presentaremos en un gráfico, en forma intuitiva a las dos rectas que se cruzan sin interceptarse y sin ser paralelas del gráfico observamos que la distancia mínima entre las rectas L_1 y L_2 es: "La longitud del vector proyección de $\vec{p_0 q_0}$ sobre $\vec{a} \times \vec{b}$, lo cual es expresado en forma matemática por:

$$d = \frac{|\vec{p_0 q_0} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2}, \text{ de donde } d(L_1, L_2) = \frac{|\vec{p_0 q_0} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Ejemplo.- Calcule la distancia perpendicular entre las dos rectas oblicuas dadas por las ecuaciones $L_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$, y

$$L_2: \frac{x+2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

Solución

Escribiendo las rectas dadas en forma vectorial se tiene: $L_1 = \{(1, -2, -1) + t(5, 3, 2) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(-2, -1, 3) + \lambda(4, 2, -3) / \lambda \in \mathbb{R}\}$, la distancia entre L_1 y L_2 es dado por:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\vec{p_0 q_0} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}, \text{ donde: } p_0(1, 2, -1), q_0(-2, -1, 3) \Rightarrow \vec{p_0 q_0} = (-3, -3, 4)$$

además $\vec{a} = (5, 3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, -3)$, entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-13, 23, -2) \Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{702}$$

$\vec{p_0 q_0} \cdot \vec{a} \times \vec{b} = 39 - 69 - 8 = -38$, por lo tanto:

$$d(L_1, L_2) = \frac{|\vec{p_0 q_0} \cdot \vec{a} \times \vec{b}|}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|} = \frac{|-38|}{\sqrt{702}} = \frac{38}{\sqrt{702}}$$

OBSERVACIÓN.- Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, entonces $d(L_1, L_2) = d(P, L_2)$, donde P es un punto cualquiera de la recta L_1 .

1.15. TEOREMA.-

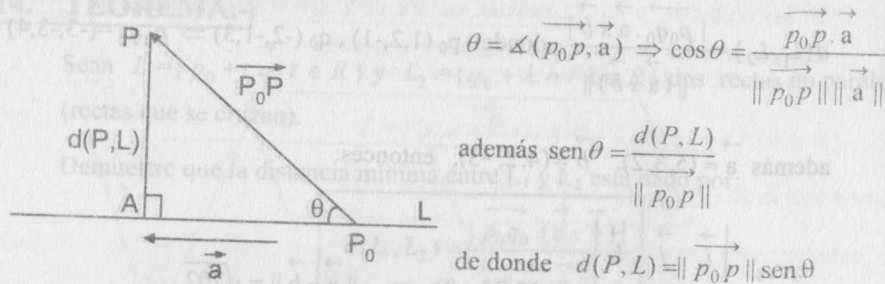
Demostrar que la distancia del punto P a la recta $L_1 = \{p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$ es dado por:

$$d(p, L) = \frac{\sqrt{\|\vec{p_0 p}\|^2 \|\vec{a}\|^2 - (\vec{p_0 p} \cdot \vec{a})^2}}{\|\vec{a}\|}$$

Demostración

Hacemos un dibujo intuitivo, para su interpretación, entonces. En el triángulo $A P_0 P$ se tiene:

1.14. TEOREMA



$$d^2(P, L) = \|\vec{P_0P}\|^2 \sin^2 \theta = \|\vec{P_0P}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \|\vec{P_0P}\|^2 \left(1 - \frac{(\vec{P_0P} \cdot \vec{a})^2}{\|\vec{P_0P}\|^2 \|\vec{a}\|^2}\right) = \|\vec{P_0P}\|^2 - \frac{(\vec{P_0P} \cdot \vec{a})^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

$$= \frac{\|\vec{P_0P}\|^2 \|\vec{a}\|^2 - (\vec{P_0P} \cdot \vec{a})^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

$$\therefore d(P, L) = \frac{\sqrt{\|\vec{P_0P}\|^2 \|\vec{a}\|^2 - (\vec{P_0P} \cdot \vec{a})^2}}{\|\vec{a}\|}$$

Ejemplo.- Hallar la distancia del punto $P(3,1,-2)$ a la recta

$$L: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución

Escribimos la recta en forma vectorial: $L = \{(-1, -2, -1) + t(1, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$

La $d(p, L)$ es dada por: $d(p, L) = \frac{\sqrt{\|\vec{P_0P}\|^2 \|\vec{a}\|^2 - (\vec{P_0P} \cdot \vec{a})^2}}{\|\vec{a}\|}$

donde $P_0(-1, -2, -1)$ y $P(3, 1, -2)$ entonces $\vec{P_0P} = (4, 3, -1)$, $\vec{a} = (1, 1, 1)$,

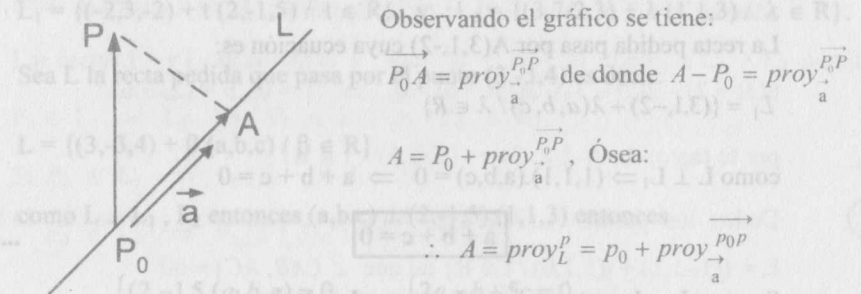
$$\vec{P_0P} \cdot \vec{a} = 4 + 3 - 1 = 6, \quad \|\vec{P_0P}\| = \sqrt{26}, \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{3}$$

$$d(p, L) = \frac{\sqrt{\|\vec{P_0P}\|^2 \|\vec{a}\|^2 - (\vec{P_0P} \cdot \vec{a})^2}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\sqrt{26(3) - 36}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{42}{3}} = \sqrt{14}$$

1.16. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA.-

Consideremos una recta $L_1 = \{p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$ y un punto p , que no pertenece a la recta L .

Entonces la proyección ortogonal del punto p sobre la recta L es el punto A de la recta L , al cual denotaremos $proj_L^P$ de tal manera que el vector \vec{AP} sea ortogonal a la recta L .



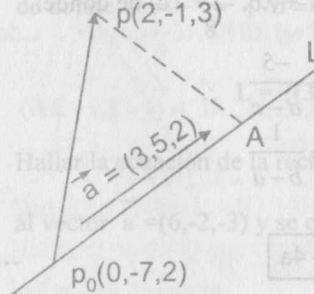
Ejemplo.- Hallar la proyección ortogonal del punto $P(2, -1, 3)$ sobre la recta $L = \{(0, -7, 2) + t(3, 5, 2) / t \in \mathbb{R}\}$

Solución

$$A = p_0 + proj_a^{\vec{P_0P}}, \text{ donde } \vec{P_0P} = (2, 6, 1)$$

$$\vec{a} = (3, 5, 2) \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{38}$$

$$A = (0, -7, 2) + \frac{(2, 6, 1) \cdot (3, 5, 2)}{38} \cdot (3, 5, 2)$$



$$A = (0, -7, 2) + \frac{6+30+2}{38} \cdot (3, 5, 2) \text{ entonces } A = (0, -7, 2) + (3, 5, 2) = (3, -2, 4)$$

$$\therefore A(3, -2, 4)$$

1.17. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

- ① Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3, 1, -2) y es perpendicular y corta a la recta $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$

Solución

Escribiendo en forma vectorial a la recta $L = \{(-1, -2, -1) + t(1, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$

La recta pedida pasa por A(3, 1, -2) cuya ecuación es:

$$L_1 = \{(3, 1, -2) + \lambda(a, b, c) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{como } L \perp L_1 \Rightarrow (1, 1, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\boxed{a + b + c = 0} \quad \dots (1)$$

Sea $p \in L \cap L_1$ entonces $p \in L \wedge p \in L_1$ de donde

$$\text{Si } p \in L \Rightarrow p(-1+t, -2+t, -1+t), p \in L_1 \Rightarrow p(3+\lambda a, 1+\lambda b, -2+\lambda c),$$

entonces: $(-1+t, -2+t, -1+t) = (3+\lambda a, 1+\lambda b, -2+\lambda c)$ de donde:

$$\begin{cases} -1+t = 3+\lambda a \\ -2+t = 1+\lambda b \\ -1+t = -2+\lambda c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-5}{a-c} \\ \lambda = \frac{1}{b-a} \end{cases}$$

$$\frac{-5}{a-c} = \frac{1}{b-a} \text{ entonces}$$

$$\boxed{c = 5b - 4a} \quad \dots (2)$$

de (1) y (2) se tiene: $a = 2b, c = -3b, (a, b, c) = (2b, b, -3b) = b(2, 1, -3)$

por lo tanto la recta pedida es: $L = \{(3, 1, -2) + \lambda(2, 1, -3) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

- ② Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3, -3, 4) y es perpendicular

a cada una de las rectas $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{5}, y$

$$L_2: \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{2} = \frac{3-z}{-3}$$

Solución

A las ecuaciones dadas escribiremos en forma vectorial

$$L_1 = \{(-2, 3, -2) + t(2, -1, 5) / t \in \mathbb{R}\}, y L_2 = \{(3, 7/2, 3) + \lambda(1, 1, 3) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Sea L la recta pedida que pasa por el punto (3, -3, 4) es decir:

$$L = \{(3, -3, 4) + \beta(a, b, c) / \beta \in \mathbb{R}\}$$

como $L \perp L_1, L_2$ entonces $(a, b, c) \perp (2, -1, 5), (1, 1, 3)$ entonces

$$\begin{cases} (2, -1, 5) \cdot (a, b, c) = 0 \\ (1, 1, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b + 5c = 0 \\ a + b + 3c = 0 \end{cases}$$

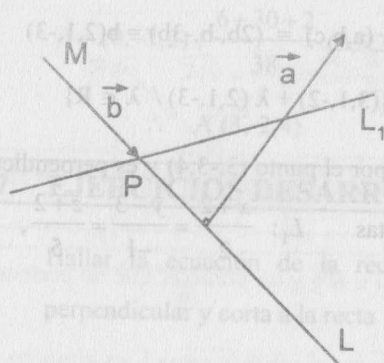
$$\text{de donde } c = -\frac{3a}{8}, b = \frac{a}{8}, (a, b, c) = (a, \frac{a}{8}, -\frac{3a}{8}) = \frac{a}{8}(8, 1, -3)$$

$$\therefore L = \{(3, -3, 4) + t(8, 1, -3) / t \in \mathbb{R}\}$$

- ③ Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto M(-1, 2, -3) es perpendicular

al vector $\vec{a} = (6, -2, -3)$ y se corta con la recta $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$

Solución



Escribiendo a la recta

$$L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5} \text{ en forma vectorial}$$

se tiene:

$$L = \{(1, -1, 3) + t(3, 2, -5) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Sea } p \in L_1 \wedge L \Rightarrow p \in L_1 \wedge p \in L.$$

$$\text{Si } p \in L_1 \Rightarrow p(1+3t, -1+2t, 3-5t) \text{ para algún } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{como } \vec{b} = \vec{MP} = P - M = (3t+2, 2t-3, -5t+6)$$

$$\text{además } \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (6, -2, -3) \cdot (3t+2, 2t-3, -5t+6) = 0$$

$$6(3t+2) - 2(2t-3) - 3(-5t+6) = 0 \Rightarrow t = 0, \vec{b} = (2, -3, 6)$$

$$\text{por lo tanto: } L = \{(-1, 2, -3) + t(2, -3, 6) / t \in \mathbb{R}\}$$

4

Dados los puntos A (3,1,1) y B (3,-2,4). Hallar el punto C de la recta

$$L = \{(1, -1, 1) + t(1, 1, 0) / t \in \mathbb{R}\} \text{ tal que } \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$$

Solución

$$\text{Sea } C \in L \Rightarrow C(1+t, -1+t, 1)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos 60^\circ, \text{ donde}$$

$$\vec{AB} = (0, -3, 3), \vec{AC} = (t-2, t-2, 0)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{2(t-2)^2} = \sqrt{2}|t-2|$$

Como $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \|\vec{AC}\| \cos 60^\circ$, reemplazando:

$$6 - 3t = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}|t-2| \frac{1}{2} \Rightarrow |t-2| = 2-t \text{ de donde } t-2 < 0 \text{ como } t < 2$$

entonces $C(1+t, -1+t, 1)$, para $t < 2$.

5

Una recta pasa por el punto $p(1,1,1)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (1,2,3)$, otra recta pasa por el punto $Q(2,1,0)$ y es paralela al vector $\vec{b} = (3,8,13)$. Demostrar que las dos rectas se cortan y determinar su punto de intersección.

Solución

$$\text{Sean } L_1 = \{(1,1,1) + t(1,2,3) / t \in \mathbb{R}\} \text{ y } L_2 = \{(2,1,0) + \lambda(3,8,13) / \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Las rectas L_1 y L_2 se cortan si y solo si $\exists P_0$ tal que $P_0 \in L_1 \wedge L_2$ como

$$P_0 \in L_1 \wedge L_2 \Rightarrow P_0 \in L_1 \wedge P_0 \in L_2$$

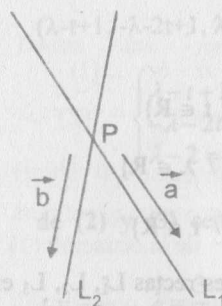
$$\text{Si } P_0 \in L_1 \Rightarrow P_0(1+t, 1+2t, 1+3t)$$

$$P_0 \in L_2 \Rightarrow P_0(2+3\lambda, 1+8\lambda, 13\lambda)$$

como P_0 es punto común a L_1 y L_2

$$\text{entonces: } (1+t, 1+2t, 1+3t) = (2+3\lambda, 1+8\lambda, 13\lambda)$$

$$\begin{cases} 1+t = 2+3\lambda \\ 1+2t = 1+8\lambda \\ 1+3t = 13\lambda \end{cases} \text{ resolviendo el sistema se tiene } t=4, \lambda=1$$



Luego el punto de intersección es $P_0(5,9,13)$

6

Dadas las rectas $L_1 = \{(3,1,0) + t(1,0,1) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(1,1,1) + \lambda(2,1,0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$, Hallar el punto Q que equidista de ambas rectas una distancia mínima, además hallar ésta distancia.

Solución

Sea $A \in L_1 \Rightarrow A(3+t, 1, t)$, $B \in L_2$

$B(1+2\lambda, 1+\lambda, 1)$, $\vec{AB} = B - A = (2\lambda - t - 2, \lambda, 1 - t)$

$\vec{a} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{AB} = 0, (1, 0, 1) \cdot (2\lambda - t - 2, \lambda, 1 - t) = 0$,

de donde $2\lambda - 2t - 1 = 0 \dots (1)$

$\vec{b} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow (2, 1, 0) \cdot (2\lambda - t - 2, \lambda, 1 - t) = 0 \Rightarrow 5\lambda - 2t - 4 = 0 \dots (2)$

formando el sistema de (1) y (2) se tiene:

$$\begin{cases} 2\lambda - 2t - 1 = 0 \\ 5\lambda - 2t - 4 = 0 \end{cases}$$

resolviendo el sistema se tiene $t = \frac{1}{2}, \lambda = 1$

como Q es punto equidistante de A y B entonces $Q\left(\frac{A+B}{2}\right) = Q\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$

La distancia mínima $d = \frac{1}{2}d(A, B) = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

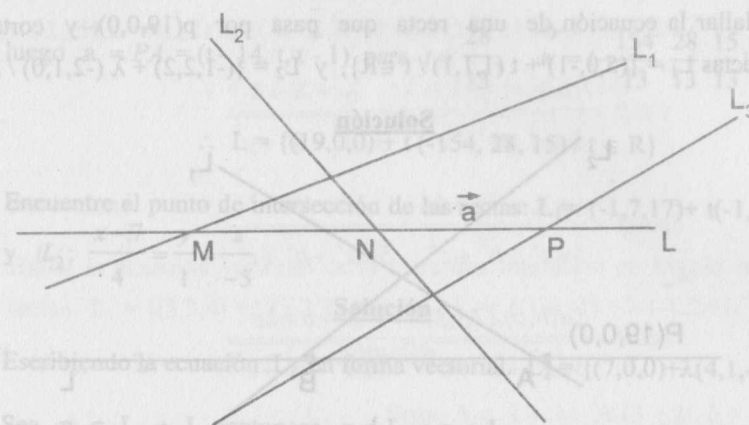
7 Dadas las tres rectas $L_1 = \{(1, 1, 2) + t(1, 2, 0) / t \in \mathbb{R}\}$

$L_2 = \{(2, 2, 0) + \lambda(1, -1, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

$L_3 = \{(0, 3, -2) + r(5, 0, 2) / r \in \mathbb{R}\}$

Hallar la ecuación de una recta que corte a estas tres rectas L_1, L_2, L_3 en M, N

y P respectivamente de tal manera que $\vec{MN} = \vec{NP}$.

Solución

$M \in L_1 = \{(1, 1, 2) + t(1, 2, 0) / t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow M(1+t, 1+2t, 2)$

$N \in L_2 = \{(2, 2, 0) + \lambda(1, -1, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow N(2+\lambda, 2-\lambda, \lambda)$

$P \in L_3 = \{(0, 3, -2) + r(5, 0, 2) / r \in \mathbb{R}\} \Rightarrow P(5r, 3, -2+2r)$

como $\vec{MN} = \vec{NP}$ entonces se tiene: $\vec{MN} = N - M = (\lambda - t + 1, -\lambda - 2t + 1, \lambda - 2)$

$\vec{NP} = P - N = (5r - \lambda - 2, 1 + \lambda, 2r - \lambda - 2)$, de donde

$(\lambda - t + 1, -\lambda - 2t + 1, \lambda - 2) = (5r - \lambda - 2, 1 + \lambda, 2r - \lambda - 2)$, por igualdad de vectores se tiene:

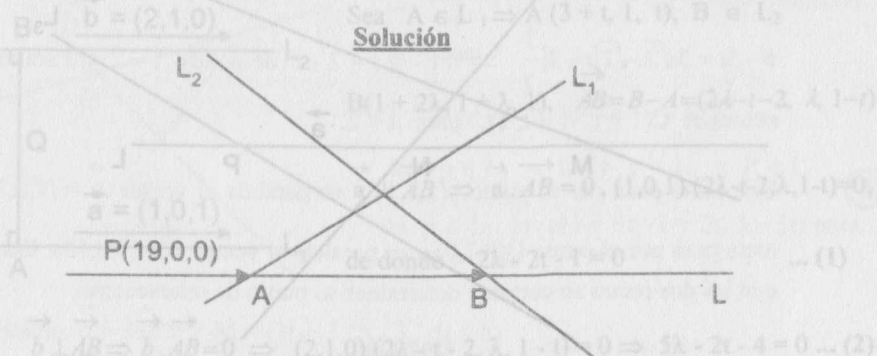
$$\begin{cases} \lambda - t + 1 = 5r - \lambda - 2 \\ -\lambda - 2t + 1 = 1 + \lambda \\ \lambda - 2 = 2r - \lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5r - 2\lambda + t = 3 \dots (1) \\ 2\lambda + 2t = 0 \dots (2) \\ 2r - 2\lambda = 0 \dots (3) \end{cases}$$

de (2) y (3) se tiene $\lambda = -t, r = \lambda$ ahora reemplazamos en la ecuación (1).

$t = -\frac{3}{2}, \lambda = \frac{3}{2}, r = \frac{3}{2}$. Luego $M(-\frac{1}{2}, -2, 2)$, $N(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $P(\frac{15}{2}, 3, -1)$

$\therefore L = \{(-\frac{1}{2}, -2, 2) + t(8, 5, 1) / t \in \mathbb{R}\}$

- 8 Hallar la ecuación de una recta que pasará por $p(19,0,0)$ y corta a las rectas $L_1 = \{(5,0,-1) + t(1,1,1) / t \in \mathbb{R}\}$, y $L_2 = \{(-1,2,2) + \lambda(-2,1,0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solución

Sean $A \in L_1 = \{(5,0,-1) + t(1,1,1) / t \in \mathbb{R}\} \Rightarrow A(t+5, t, t-1)$

$B \in L_2 = \{(-1,2,2) + \lambda(-2,1,0) / \lambda \in \mathbb{R}\} \Rightarrow B(-2\lambda-1, \lambda+2, 2)$

como los puntos P, A, B son colineales, entonces.

$\vec{PA} // \vec{AB} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{PA} = r \vec{AB}$ de donde $A - P = r(B - A)$

que al reemplazar por sus coordenadas se tiene:

$$(t-14, t, t-1) = r(-2\lambda-t-6, \lambda-t+2, -t+3)$$

por igualdad de vectores se tiene:

$$\begin{cases} t-14 = -2r\lambda - rt - 6r & \dots(1) \\ t = \lambda r - rt + 2r & \dots(2) \\ t-1 = -rt + 3r & \dots(3) \end{cases}$$

de la ecuación (3) y (2) se tiene: $t = \frac{3r+1}{r+1}$, $\lambda = \frac{r-1}{r}$ de la ecuación (1)

$(1+r)t + 2r\lambda + 6r = 14$ reemplazando t y λ se tiene:

$$3r+1+2(r-1)+6r=14 \Rightarrow r=\frac{15}{11}, \quad t=\frac{28}{13}, \quad \lambda=\frac{4}{15}$$

luego $a = \vec{PA} = (t-14, t, t-1)$ para $t = \frac{28}{13}$, $a = (-\frac{154}{13}, \frac{28}{13}, \frac{15}{13})$

$$\therefore L = \{(19,0,0) + t(-154, 28, 15) / t \in \mathbb{R}\}$$

- 9 Encuentre el punto de intersección de las rectas: $L_1 = \{-1, 7, 17\} + t(-1, 2, 3) / t \in \mathbb{R}$

y $L_2: \frac{x-7}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-5}$

Solución

Escribiendo la ecuación L_2 en forma vectorial. $L_2 = \{(7,0,0) + \lambda(4,1,-5) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

Sea $p \in L_1 \wedge L_2$ entonces $p \in L_1 \wedge p \in L_2$.

Si $p \in L_1 \Rightarrow p(-1-t, 7+2t, 17+3t) \wedge p \in L_2$ entonces $p(7+4\lambda, \lambda, -5\lambda)$

como $p \in L_1 \wedge L_2 \Rightarrow (-1-t, 7+2t, 17+3t) = (7+4\lambda, \lambda, -5\lambda)$

$$\begin{cases} -1-t = 7+4\lambda \\ 7+2t = \lambda \\ 17+3t = -5\lambda \end{cases} \text{ entonces } t = -4, \lambda = -1. \text{ Luego: } p(3, -1, 5)$$

- 10 Dadas las rectas no coplanares concurrentes en $0(1,-2,3)$,

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}; L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{3-z}{-4} \wedge y = -2, L_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $A(-4,2,6)$ y forma ángulos iguales con las rectas dadas.

Solución

Escribiendo las rectas dadas en forma vectorial. $L_1 = \{(1,-2,3) + t(2,2,1) / t \in \mathbb{R}\}$,

$L_2 = \{(1,3,-2) + \lambda(3,0,4) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $L_3 = \{(1,-2,3) + r(2,1,2) / r \in \mathbb{R}\}$

Sea L la recta pedida que pasa por el punto A $(-4,2,6)$ es decir:

$L = \{(-4, 2, 6) + t(a, b, c) / t \in \mathbb{R}\}$, como $\theta = \angle(L_1, L) = \angle(L_2, L) = \angle(L_3, L)$ entonces:

$$\cos \theta = \frac{(a, b, c) \cdot (2, 2, 1)}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2a + 2b + c}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \dots (1)$$

$$\cos \theta = \frac{(a, b, c) \cdot (3, 0, 4)}{5\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{3a + 4c}{5\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \dots (2)$$

$$\cos \theta = \frac{(a, b, c) \cdot (2, 1, 2)}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2a + b + 2c}{3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \dots (3)$$

de (1) y (2) se tiene: $a + 10b - 7c = 0$

de (2) y (3) se tiene: $a + 5b - 2c = 0$

de (1) y (3) se tiene: $b = c$

como $b = c$ entonces $a = -3c$, $L = \{(-4, 2, 6) + r(-3c, c, c) / r \in \mathbb{R}\}$

$$\therefore L = \{(-4, 2, 6) + t(-3, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$$

- 11) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $p(7, -2, 9)$ y es perpendicular a las rectas $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$, y $L_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z}{-2}$.

Solución

Los vectores direcciones de L_1 y L_2 son $\vec{a} = (2, -2, 3)$, $\vec{b} = (2, 5, -2)$ respectivamente.

Sea L la recta que pasa por el punto $p(7, -2, 9)$, luego la recta pedida $L = \{(7, -2, 9) + t\vec{c} / t \in \mathbb{R}\}$, pero como $L \perp L_1, L_2$ entonces $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ entonces:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-11, 10, 14).$$

Por lo tanto: $L = \{(7, -2, 9) + t(-11, 10, 14) / t \in \mathbb{R}\}$

12)

Hallar la ecuación vectorial de la recta que intercepta en ángulo recto a las rectas $L_1 = \{(3, 3, 4) + t(2, 2, 3) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(1, 6, -1) + \lambda(-1, 2, 0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Solución

Sean $A \in L_1 \Rightarrow A(3 + 2t, 3 + 2t, 4 + 3t)$,
 $B \in L_2 \Rightarrow B(1 - \lambda, 6 + 2\lambda, -1)$

como A, B son puntos sobre la recta L entonces el vector dirección de la recta L es

$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ de donde se tiene:

$\vec{a} = (-2 - 2t - \lambda, 3 + 2\lambda - 2t, -5 - 3t)$ como $L \perp L_1, L_2$ entonces:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot (2, 2, 3) = 0 \\ \vec{a} \cdot (-1, 2, 0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -17t + 2\lambda = 13 \\ -2t + 5\lambda = -8 \end{cases} \text{ resolviendo el sistema se tiene } t = -1, \lambda = -2,$$

por lo tanto los puntos son $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, -1)$, $\vec{a} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-2, -1, 2)$.

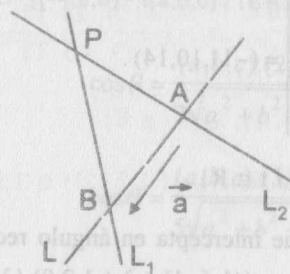
Luego la ecuación vectorial de la recta pedida es:

$$L = \{(1, 1, 1) + t(-2, -1, 2) / t \in \mathbb{R}\}$$

13)

Determinar una recta L tal que con las rectas $L_1 = \{(2, 1, 4) + t(1, 1, 0) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(2 + \alpha, 1 + \alpha, 3 + \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$ determinan un triángulo de área $5u^2$.

Solución



$$\text{Sea } p \in L_1 \wedge L_2 \Rightarrow p \in L_1 \wedge p \in L_2$$

$$\text{Si } p \in L_1 \Rightarrow p(2+t, 1+t, 4)$$

$$p \in L_2 \Rightarrow p(2+\alpha, 1+\alpha, 3+\alpha)$$

como $p \in L_1 \wedge L_2$, entonces:

$$(2+t, 1+t, 4) = (2+\alpha, 1+\alpha, 3+\alpha)$$

$$\text{de donde: } \begin{cases} 2+t=2+\alpha \\ 1+t=1+\alpha \\ 4=3+\alpha \end{cases} \text{ al resolver el sistema se tiene que: } t=\alpha=1$$

por lo tanto el punto p es $p(3, 2, 4)$, ahora tomemos en t cercano a p así como $t=2$ entonces el punto A de L_2 es $A(4, 3, 4)$,

además $B \in L_1 \Rightarrow B(2+\alpha, 1+\alpha, 3+\alpha)$ entonces se tiene:

$$\vec{a} = \vec{AB} = B - A = (\alpha - 2, \alpha - 2, \alpha - 1) \text{ por otra parte } \vec{b} = \vec{AP} = P - A = (-1, -1, 0)$$

además el área $A = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\| = 5$ de donde $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 10$ entonces

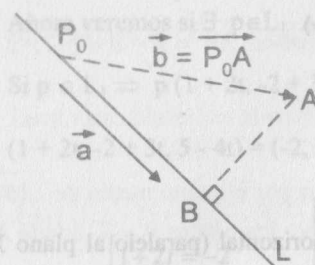
$$\alpha^2 - 2\alpha - 49 = 0 \text{ de donde se tiene: } \alpha_1 = 1 - 5\sqrt{2}, \alpha_2 = 1 + 5\sqrt{2} \text{ por lo tanto}$$

las rectas pedidas son: $L = \{(4, 3, 4) + t(-1 + 5\sqrt{2}, -1 + 5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}) / t \in \mathbb{R}\}$

$$L = \{(4, 3, 4) + t(-1 - 5\sqrt{2}, -1 - 5\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) / t \in \mathbb{R}\}$$

- 14 Sea $A(1, 1, 2)$ un punto y supongamos que la recta L tiene por ecuaciones paramétricas: $x = 4 - t$, $y = 5 + 3t$, $z = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$, encontrar un punto B en L , tal que el vector $A - B$ y la recta sean perpendicular.

Solución



$$\text{Sea } L = \{(4, 5, 3) + t(-1, 3, 1) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$\vec{b} = \vec{P_0A} = A - P_0 = (-3, -4, -1)$$

$$\vec{P_0B} = \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}$$

$$\vec{P_0B} = \frac{(-1, 3, 1) \cdot (-3, -4, -1)}{11} \cdot (-1, 3, 1)$$

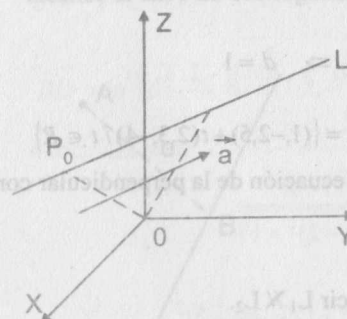
$$\vec{P_0B} = \frac{3 - 12 - 1}{11} = -\frac{10}{11} (-1, 3, 1) = \left(\frac{10}{11}, -\frac{30}{11}, -\frac{10}{11}\right)$$

$$\vec{P_0B} = B - P_0 = \left(\frac{10}{11}, -\frac{30}{11}, -\frac{10}{11}\right) \Rightarrow B\left(4 + \frac{10}{11}, 5 - \frac{30}{11}, 3 - \frac{10}{11}\right)$$

$$\therefore B\left(\frac{54}{11}, \frac{25}{11}, \frac{23}{11}\right)$$

- 15 Determinar los ángulos entre una recta L paralela al vector $\vec{a} = (1, 1, 1)$ y los ejes coordenados.

Solución



$$\text{Sea } L = \{P_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R}\}, \text{ donde}$$

$\vec{a} = (1, 1, 1)$ es la dirección de la recta L y

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{3}, \text{ entonces:}$$

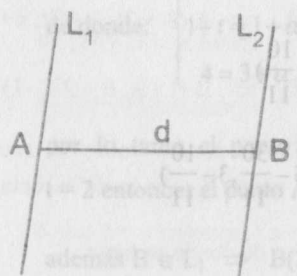
$$\cos \alpha = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos \beta = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

- 16 Hallar la longitud del menor segmento horizontal (paralelo al plano XY) que une las rectas $L_1 = \{(1,2,0) + t(1,2,1) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(0,0,0) + \lambda(1,1,1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

Solución



$$L_1 = \{(1,2,0) + t(1,2,1) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$L_2 = \{(0,0,0) + \lambda(1,1,1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Si $A \in L_1 \Rightarrow A(1+t, 2+2t, t)$, $B \in L_2 \Rightarrow B(\lambda, \lambda, \lambda)$
 como $\vec{AB} //$ al plano XY entonces $\lambda = t$.

Luego $A(1+t, 2+2t, t)$ y $B(t, t, t)$

$$d = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1+(t+2)^2+0} \text{ de donde } f(t) = \sqrt{t^2+4t+5}$$

$$f'(t) = \frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+5}} = 0 \Rightarrow t = -2 \text{ número crítico.}$$

$$\therefore d = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1+0+0} = 1 \Rightarrow d = 1$$

- 17 Dadas las rectas $L_1 = \{(1,-2,5) + t(2,3,-4) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(-2,1,2) + \lambda(0,1,2) / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Hallar la ecuación de la perpendicular común.

Solución

Las rectas L_1 y L_2 no son paralelas, es decir $L_1 \not\parallel L_2$.

Ahora veremos si $\exists p \in L_1 \wedge L_2 \Rightarrow p \in L_1 \wedge p \in L_2$.

Si $p \in L_1 \Rightarrow p(1+2t, -2+3t, 5-4t)$, $p \in L_2 \Rightarrow p(-2, 1+\lambda, 2+2\lambda)$

$(1+2t, -2+3t, 5-4t) = (-2, 1+\lambda, 2+2\lambda)$ de donde

$$\begin{cases} 1+2t = -2 \\ -2+3t = 1+\lambda \\ 5-4t = 2+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ \lambda = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

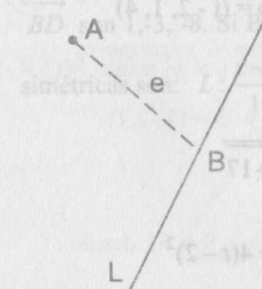
por lo tanto las rectas L_1 y L_2 son rectas que se cruzan.

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$L = \{(1,-2,5) + t(10,-4,2) / t \in \mathbb{R}\}; L' = \{(-2,1,-2) + \lambda(10,-4,2) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- 18 Determinar bajo qué dirección debe ser lanzada rectilíneamente una partícula desde el punto $A(2,2,3)$, hacia la recta $L = \{(0, 1+\lambda, -\lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ para que lo alcance al cabo de dos segundos, siendo su velocidad $V = \sqrt{3}u / \text{seg}$.

Solución



Sea $B \in L \Rightarrow B(0, 1+\lambda, -\lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. además $e = vt$ donde $e = d(A, B)$ para

$$t = 2 \text{ seg. } V = \sqrt{3}u, e = 2\sqrt{3}$$

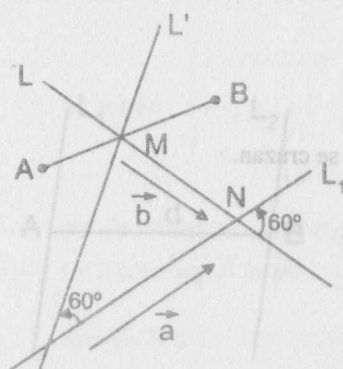
$$d(A, B) = \sqrt{4+(\lambda-1)^2+(-\lambda-3)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{de donde } \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Luego $B(0,0,1)$ entonces está dado por el vector $\vec{AB} = B - A = (-2, -2, -2)$

$$\therefore \vec{AB} = (-2, -2, -2)$$

- 19) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de \vec{AB} y corta bajo un ángulo de 60° a la recta que pasa por los puntos R y S , donde $A(2,4,0)$, $B(0,0,-2)$, $R(3,3,3)$, $S(-1,3,3)$.



Solución

El punto medio del segmento AB es $M(1,2,-1)$, y observando el gráfico este problema tiene dos soluciones.

La ecuación de la recta L_1 que pasa por R y S es:

$$L_1 = \{(-1, 3, 3) + t(1, 0, 0) / t \in \mathbb{R}\}$$

Sea N el punto de intersección de L con L_1 es decir:

Si $N \in L_1 \Rightarrow N(-1+t, 3, 3)$ pasa algún $t \in \mathbb{R}$. Definimos

$\vec{b} = \vec{MN} = N - M = (t-2, 1, 4)$, como $60^\circ = \angle(L, L_1) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ entonces:

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}; \text{ donde } \vec{a} = (1, 0, 0) \text{ y } \vec{b} = (t-2, 1, 4)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{(1, 0, 0) \cdot (t-2, 1, 4)}{\sqrt{(t-2)^2 + 1 + 16}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{t-2}{\sqrt{(t-2)^2 + 17}}$$

$$\sqrt{(t-2)^2 + 17} = 2(t-2) \Rightarrow (t-2)^2 + 17 = 4(t-2)^2$$

$$3(t-2)^2 = 17 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{\frac{17}{3}} \Rightarrow \vec{b} = (\pm \sqrt{\frac{17}{3}}, 1, 4)$$

Luego las soluciones al problema son:

$$L = \{(1, 2, -1) + \lambda(\sqrt{\frac{17}{3}}, 1, 4) / \lambda \in \mathbb{R}\}; L' = \{(1, 2, -1) + r(-\sqrt{\frac{17}{3}}, 1, 4) / r \in \mathbb{R}\}$$

- 20) Dados los vértices de un triángulo $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ y $C(-5, 14, -3)$. Hallar las ecuaciones simétricas de la bisectriz del ángulo interno del vértice B .

Solución

Tomemos los vectores unitarios \vec{u} y \vec{v} en las direcciones de \vec{BA} y \vec{BC} , respectivamente donde $\vec{BA} = (2, -3, 6)$, $\vec{BC} = (-6, 12, 4)$

$$\vec{u} = \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|} = \frac{1}{7}(2, -3, 6) \text{ y } \vec{v} = \frac{\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|} = \frac{1}{7}(-3, 6, 2)$$

entonces sea $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$ el vector dirección de la bisectriz BD es decir:

$\vec{b} = \frac{1}{7}(-1, 3, 8) = -\frac{1}{7}(1, -3, -8)$. Luego los números directores de la bisectriz

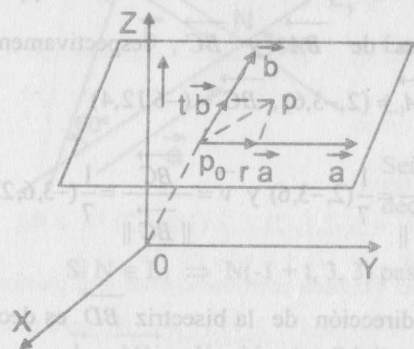
BD son $1, -3, -8$. Si $B(1, 2, -7)$ pertenece a la bisectriz, entonces sus ecuaciones

$$\text{simétricas son: } L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$$

B. EL PLANO.-**1.18. DEFINICIÓN.-**

Un plano es un conjunto P de puntos $p(x,y,z)$ de R^3 . Si existe un punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ de R^3 y dos vectores no paralelos $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de R^3 de tal manera que:

$$P = \{P(x,y,z) \in R^3 / P(x,y,z) = P_0(x_0,y_0,z_0) + t\vec{a} + \lambda\vec{b}, \quad t, \lambda \in R\}$$

1.19. ECUACIÓN VECTORIAL DEL PLANO.-

Consideremos un plano P que pasa por el punto $p_0(x_0,y_0,z_0)$ y que es paralelo a los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Sea $p \in P$ entonces existen $t, \lambda \in R$ tal que: $\vec{p} - \vec{p}_0 = t\vec{a} + \lambda\vec{b}$, de donde $\vec{p} - \vec{p}_0 = t\vec{a} + \lambda\vec{b}$ entonces:

$$p = p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b}, \text{ luego } P = \{p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b} / t, \lambda \in R\}$$

Que es la ecuación vectorial del plano P .

Ejemplo. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M(3,4,-5)$ y es paralelo a los vectores $\vec{a} = (3,4,-5)$ y $\vec{b} = (1,-2,1)$.

Solución

Como la ecuación del plano es $P = \{p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b} / t, \lambda \in R\}$ donde

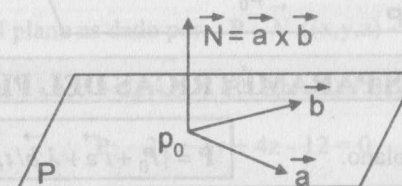
$p_0 = M(3,4,-5)$ y $\vec{a} = (3,1,-1)$, $\vec{b} = (1,-2,1)$, por lo tanto al reemplazar se tiene:

$$P = \{(3,4,-5) + t(3,1,-1) + \lambda(1,-2,1) / t, \lambda \in R\}$$

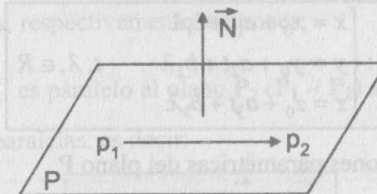
OBSERVACIÓN.-

- ① De la ecuación vectorial del plano $P = \{p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b} / t, \lambda \in R\}$ se obtiene la normal del plano que es una recta perpendicular a dicho plano:

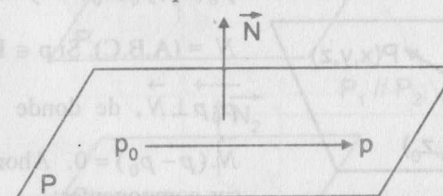
$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$$



- ② Si \vec{N} es una normal al plano $P = \{p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b} / t, \lambda \in R\}$ y si $p_1, p_2 \in P$ entonces \vec{N} es ortogonal a $\vec{p_1 p_2} = \vec{p_2} - \vec{p_1}$



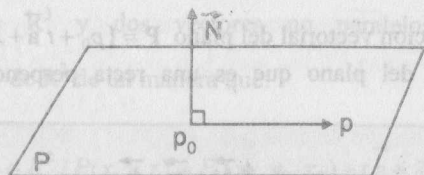
- ③ Si \vec{N} es la normal al plano $P = \{p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b} / t, \lambda \in R\}$ y si $p - p_0$ es ortogonal a \vec{N} entonces $p \in P$.



- 4 Si p_0 es un punto fijo del plano P y \vec{N} es su normal, entonces la ecuación del plano es:

$$P: \vec{N} \cdot (p - p_0) = 0$$

Es la ecuación del plano que pasa por p_0 y cuya normal es \vec{N} .



1.20. ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO.-

Consideremos el plano.

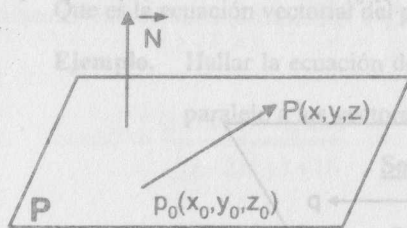
$$P = \{P_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b} / t, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Si $p \in P$ entonces $p = p_0 + t\vec{a} + \lambda\vec{b}$ para $t, \lambda \in \mathbb{R}$, reemplazando por sus respectivas componentes se tiene: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a_1, a_2, a_3) + \lambda(b_1, b_2, b_3)$ de donde por igualdad se tiene:

$$P: \begin{cases} x = x_0 + a_1t + b_1\lambda \\ y = y_0 + a_2t + b_2\lambda \\ z = z_0 + a_3t + b_3\lambda \end{cases} \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$

Que son las ecuaciones paramétricas del plano P .

1.21. ECUACIÓN GENERAL DEL PLANO.-



Sea P el plano que pasa por el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ cuyo vector normal es:

$\vec{N} = (A, B, C)$. Si $p \in P$ entonces:

$\vec{p_0p} \perp \vec{N}$, de donde $\vec{p_0p} \cdot \vec{N} = 0$ entonces

$\vec{N} \cdot (p - p_0) = 0$. Ahora reemplazando por sus componentes:

$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$ entonces $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$, de donde $P: Ax + By + Cz + D = 0$.

Que es la ecuación general del plano P .

Ejemplo.- Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\vec{N} = (2, 3, 4)$.

Solución

La ecuación del plano es dado por $P: \vec{N} \cdot ((x, y, z) - (2, 4, -1)) = 0$,

$P: (2, 3, 4) \cdot (x - 2, y - 4, z + 1) = 0$, $P: 2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$

$$\therefore P: 2x + 3y + 4z - 12 = 0$$

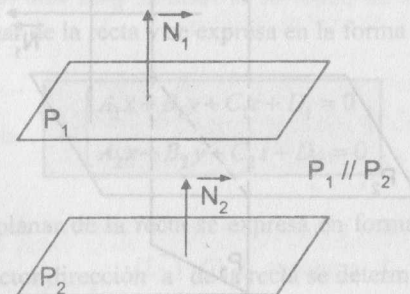
1.22. PLANOS PARALELOS Y ORTOGONALES.-

Consideremos los planos: $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y

$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, donde $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ son sus normales, respectivamente, entonces:

- i) El plano P_1 es paralelo al plano P_2 ($P_1 \parallel P_2$) si y solo si sus normales \vec{N}_1 y \vec{N}_2 son paralelas, es decir:

$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$$



Si $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{N}_1 = r\vec{N}_2$, lo que quiere decir que los coeficientes de las ecuaciones cartesianas de los planos deben ser proporcionales, o sea que debe cumplirse:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = r$$

Ejemplo.- Los planos $P_1: 3x + 5y - 7z + 2 = 0$ y $P_2: 6x + 10y - 14z + 5 = 0$ son paralelos porque: $\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-7}{-14} = \frac{1}{2} = r$

Si los planos P_1 y P_2 son paralelos puede ocurrir que: $P_1 = P_2$ ó $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, es decir:

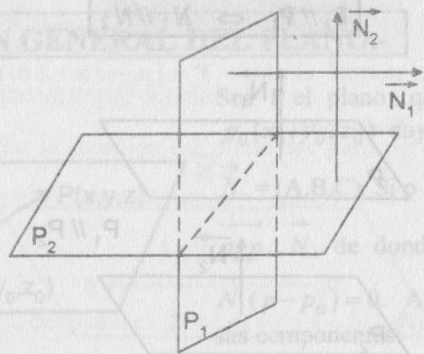
$$P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow P_1 = P_2 \text{ ó } P_1 \cap P_2 = \emptyset$$

ii) El plano P_1 es ortogonal al plano P_2 ($P_1 \perp P_2$) si y solo si sus normales \vec{N}_1 y \vec{N}_2 son ortogonales, es decir:

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$$

Si $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Rightarrow \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$, por lo tanto

$$P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

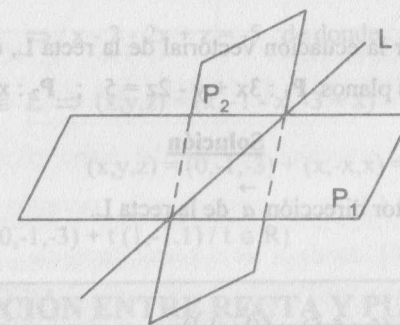


Ejemplo.- El plano $P_1: 4x - y + 2z = 7$ es ortogonal al plano $P_2: x + 6y + z = 16$ porque $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$. En efecto como $\vec{N}_1 = (4, -1, 2)$, $\vec{N}_2 = (1, 6, 1)$, se tiene: $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = (4, -1, 2) \cdot (1, 6, 1) = 4 - 6 + 2 = 0$.

1.23. INTERSECCIÓN DE PLANOS.-

Consideremos los planos: $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Si el plano P_1 no es paralelo al plano P_2 ($P_1 \not\parallel P_2$) entonces la intersección de P_1 y P_2 nos da una recta L , es decir:

$$\text{Si } P_1 \not\parallel P_2 \Rightarrow \exists L \text{ tal que } P_1 \cap P_2 = L$$

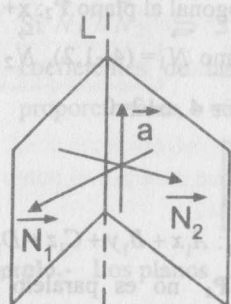


1.24. ECUACIÓN BIPLANAR DE LA RECTA.-

A la ecuación de una recta que es la intersección de dos planos se denomina ecuación biplanar de la recta y se expresa en la forma siguiente:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

La ecuación biplanar de la recta se expresa en forma vectorial, paramétrica y simétrica. El vector dirección \vec{a} de la recta se determina en la forma siguiente:



$$P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

El punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ por donde pasa la recta se determina resolviendo el sistema de ecuaciones de los planos P_1 y P_2 .

Ejemplo.- Hallar la ecuación vectorial de la recta L, dado por la intersección de los planos $P_1: 3x + y - 2z = 5$; $P_2: x + 2y + z + 5 = 0$.

Solución

Calculando el vector dirección \vec{a} de la recta L.

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -5, 5) = 5(1, -1, 1)$$

ahora calculamos un punto de la recta L, para esto resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + 2y + z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} 5x + 5y = -5 \\ x + y = -1 \end{cases}, \text{ simplificando}$$

ahora damos un valor a cualquiera de las variables de x e y por ejemplo para $x = 0, y = -1, z = -3$ entonces $p_0(0, -1, -3)$.

Luego la ecuación de la recta L en forma vectorial es:

$$L = \{(0, -1, -3) + t(1, -1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$$

Otra forma de obtener la ecuación vectorial de la recta L es expresar dos de las variables en función de la tercera variable y para esto se elimina una de las variables del sistema.

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + 2y + z = -5 \end{cases} \quad \text{entonces } x + y = -1 \quad \text{de donde } y = -1 - x$$

ahora se toma cualquiera de las ecuaciones.

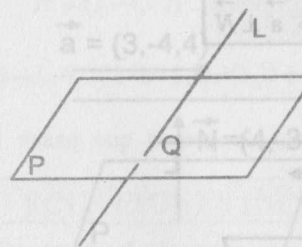
$$x + 2y + z = -5 \Rightarrow x - 2 - 2x + z = -5 \quad \text{de donde } z = -3 + x$$

$$\text{como } (x, y, z) \in L \Rightarrow (x, y, z) = (x, -1 - x, -3 + x)$$

$$(x, y, z) = (0, -1, -3) + (x, -x, x) = (0, -1, -3) + x(1, -1, 1)$$

$$\text{Luego: } L = \{(0, -1, -3) + t(1, -1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$$

1.25. INTERSECCIÓN ENTRE RECTA Y PLANO.-



Consideremos la ecuación general de un plano:

$P: Ax + By + Cz + D = 0$ y la ecuación vectorial de la recta $L = \{p_0 + t\vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$.

Si L y P no son paralelos entonces al intersectarse nos da un punto Q, es decir:

$$L \cap P = \{Q\}.$$

Para calcular el punto Q de intersección se resuelve el sistema de ecuaciones de la recta L y el plano P.

Ejemplo.- Hallar el punto de intersección de la recta $L: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$ y el plano $P: 2x + 3y - z + 11 = 0$.

Solución

Escribiendo la recta L en forma vectorial. $L = \{(-2, 0, 4) + t(3, -1, 2) / t \in \mathbb{R}\}$ como $L \cap P \Rightarrow \exists p$ tal que $p \in L \cap P$. Si $p \in L \cap P$ entonces $p \in L \cap P$ como $p \in L$ entonces $p(-2 + 3t, -t, 4 + 2t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

además $p \in P \Rightarrow 2(-2 + 3t) + 3(-t) - (4 + 2t) + 11 = 0 \Rightarrow t = -3$

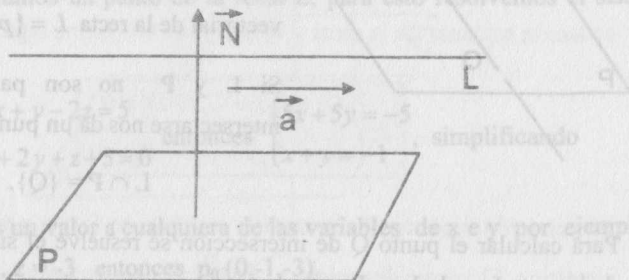
Luego: $p(-11, 3, -2)$.

1.26. PLANO PARALELO A UNA RECTA Y PLANO PERPENDICULAR A UNA RECTA.-

Consideremos la ecuación general del plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$, donde $\vec{N} = (A, B, C)$ es la normal y la ecuación vectorial de la recta $L = \{p_0 + t\vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$ donde \vec{a} es el vector dirección.

La recta L es paralela al plano P si y solo si el vector dirección \vec{a} es ortogonal

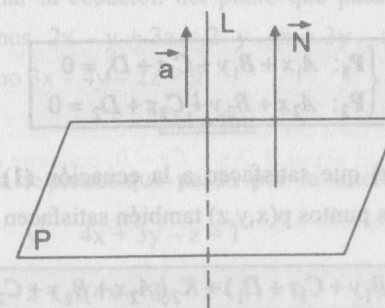
al vector normal \vec{N} es decir: $L // P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{N}$



Si la recta L es paralela al plano P puede ocurrir que la recta L está contenida en el plano P ó que la intersección es el \emptyset , es decir:

$$\text{Si } L // P \Rightarrow L \subset P \text{ ó } L \cap P = \emptyset$$

La recta L es perpendicular al plano P si y solo si el vector dirección \vec{a} de L es paralelo al vector normal \vec{N} de P , es decir: $L \perp P \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{N}$



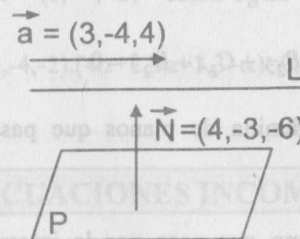
Ejemplo.- Demostrar que la recta $L = \{(-2, 1, -5) + t(3, -4, 4) / t \in \mathbb{R}\}$ es paralela al plano $P: 4x - 3y - 6z - 5 = 0$

Solución

Para demostrar que la recta L es paralela al plano P debe de cumplirse que el vector dirección \vec{a} de la recta es perpendicular al vector normal \vec{N} del plano, es decir:

$$L // P \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{N} = 12 + 12 - 24 = 0$$

Luego como $\vec{a} \cdot \vec{N} = 0$ entonces $\vec{a} \perp \vec{N}$. Por lo tanto la recta L es paralela al plano P .



1.27. FAMILIA DE PLANOS.-

En forma similar que en la geometría analítica plana, en donde se consideraba una familia de rectas, en este caso se puede considerar una familia de planos, por ejemplo, la ecuación $2x - y + 3z + D = 0$ representa una familia de planos paralelos donde su normal es $\vec{N} = (2, -1, 3)$. Una familia de planos importante, es el sistema de planos que pasan por la intersección de dos planos dados, cuya ecuaciones se expresan:

$$\begin{cases} P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \dots (1)$$

Los puntos $p(x, y, z)$ que satisfacen a la ecuación (1) están sobre la recta de intersección, dichos puntos $p(x, y, z)$ también satisfacen a la ecuación:

$$K_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + K_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad \dots (2)$$

donde K_1 y K_2 son números reales cualesquiera excepto que sean ceros simultáneamente.

Si en la ecuación (2) se tiene que $K_1 \neq 0$, entonces a la ecuación (2) se puede expresar en la forma:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + K(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad \dots (3)$$

A la ecuación (3) se denomina la familia de planos que pasan por la intersección de los planos P_1 y P_2 .

Ejemplos.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $2x - y - z + 8 = 0$, $x + 6y - 2z - 7 = 0$ y por el punto $(1, -2, 2)$.

Solución

Aplicando el concepto de familia de planos se tiene:

$$P: 2x - y - z + 8 + k(x + 6y - 2z - 7) = 0$$

$$\text{como } (1, -2, 2) \in P \Rightarrow 2 + 2 - 2 + 8 + k(1 - 12 - 4 - 7) = 0 \Rightarrow k = \frac{5}{11}$$

$$P: 2x - y - z + 8 + \frac{5}{11}(x + 6y - 2z - 7) = 0 \quad \therefore P: 27x + 19y - 21z + 53 = 0$$

Ejemplo.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $2x - y + 3z = 2$ y $4x + 3y - z = 1$ y es perpendicular al plano $3x - 4y - 2z = 9$

Solución

Sea P_α la familia de planos que pasan por la intersección de los planos

$$2x - y + 3z = 2 \quad \text{y} \quad 4x + 3y - z = 1$$

$$P_\alpha: 2x - y + 3z - 2 + \alpha(4x + 3y - z - 1) = 0$$

$P_\alpha: (4\alpha + 2)x + (3\alpha - 1)y + (3 - \alpha)z - 2 - \alpha = 0$, donde su normal es:

$$\vec{N}_\alpha = (4\alpha + 2, 3\alpha - 1, 3 - \alpha) \text{ y sea } P: 3x - 4y - 2z = 9 \text{ cuya normal es:}$$

$$\vec{N} = (3, -4, -2) \quad \text{como } P_\alpha \perp P \Rightarrow \vec{N}_\alpha \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{N}_\alpha = 0$$

$$(3, -4, -2) \cdot (4\alpha + 2, 3\alpha - 1, 3 - \alpha) = 0, \text{ de donde } 12\alpha + 6 - 12\alpha + 4 - 6 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

$$\therefore P_\alpha: 6x + 7y - 5z = 0$$

1.28. ECUACIONES INCOMPLETAS DEL PLANO.-

Consideremos el plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$, donde $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, como A, B, C y D son números reales, entonces se presentan los siguientes casos:

- 1^{er} Si $B = C = D = 0, A \neq 0$ entonces el plano $P: x = 0$, que es el plano YZ .
- 2^{do} Si $A = C = D = 0, B \neq 0$ entonces el plano $P: y = 0$ que es el plano XZ .
- 3^{ro} Si $A = B = D = 0, C \neq 0$ entonces el plano $P: z = 0$ que es el plano XY .
- 4^{to} Si $B = C = 0$, el plano $P: Ax + D = 0$ es paralelos al plano YZ .
- 5^{to} Si $A = C = 0$, el plano $P: By + D = 0$ es paralelos al plano XZ .
- 6^{to} Si $A = B = 0$, el plano $P: Cz + D = 0$ es paralelos al plano XY .
- 7^{mo} Si $C = D = 0$, el plano $P: Ax + By = 0$, contiene al eje Z y es ortogonal al plano XY .
- 8^{to} Si $B = D = 0$, el plano $P: Ax + Cz = 0$, contiene al eje Y y es ortogonal al plano XZ .
- 9^{no} Si $A = D = 0$, el plano $P: By + Cz = 0$, contiene al eje X y es ortogonal al plano YZ .
- 10^{mo} Si $C = 0$, el plano $P: Ax + By + D = 0$, es paralelo al eje Z y además es ortogonal al plano coordenado XY .
- 11^{avo} Si $B = 0$, el plano $P: Ax + Cz + D = 0$, es paralelo al eje Y y además es ortogonal al plano coordenado XZ .
- 12^{avo} Si $A = 0$, el plano $P: By + Cz + D = 0$, es paralelo al eje X y además es ortogonal al plano coordenado YZ .
- 13^{avo} Si $D = 0$, el plano $P: Ax + By + Cz = 0$, pasa por el origen de coordenadas.

Ejemplo.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(7,2,-3)$ y $B(5,6,-4)$ y es paralelo al eje X .

Solución

Sea P el plano buscado. $P: \vec{N} \cdot [(x, y, z) - (7, 2, -3)] = 0$

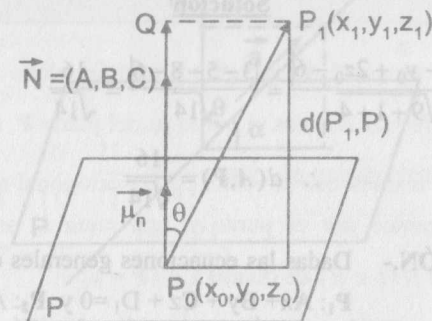
como $A, B \in P \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 4, -1) \parallel P$, como eje $X \parallel P \Rightarrow \vec{i} \parallel P$ entonces la normal es:

$$\vec{N} = \vec{i} \cdot \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, 4) \Rightarrow P: (0, 1, 4) \cdot (x - 7, y - 2, z + 3) = 0$$

$$P: y + 4z + 10 = 0$$

1.29. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO.-

Consideremos la ecuación general de un plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$ y un punto $p_1(x_1, y_1, z_1)$ que no pertenece al plano P .



consideremos un vector unitario $\vec{\mu}_N$ en la dirección del vector normal, es

$$\text{decir: } \vec{\mu}_N = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$

$$\text{como } \theta = \angle(p_0p_1, \vec{\mu}_N) \text{ entonces } \vec{p_0p_1} \cdot \vec{\mu}_N = \|\vec{p_0p_1}\| \cos \theta \quad \dots (1)$$

En el triángulo rectángulo se tiene: $d(p_1, P) = \| \overrightarrow{p_0 p_1} \| \cos \theta \quad \dots (2)$

de (1) y (2) se tiene que:

$$d(p_1, P) = \overrightarrow{p_0 p_1} \cdot \vec{\mu}_N = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C) \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

$$= \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\therefore d(p_1, P) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo.- Calcular la distancia del punto $A(1, 5, -4)$ al plano dado por $P: 3x - y + 2z = 6$.

Solución

$$d(A, P) = \frac{|3x_0 - y_0 + 2z_0 - 6|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|3 - 5 - 8 - 6|}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore d(A, P) = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

OBSERVACIÓN.- Dadas las ecuaciones generales de dos planos paralelos

$$P_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0 \text{ y } P_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

la distancia entre dichos planos está dado por la fórmula.

$$d(P_1, P_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplos.- Hallar la distancia entre los planos paralelos $P_1: x - 3y + 4z = 10$ y $P_2: x - 3y + 4z = 6$.

Solución

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos planos paralelos.

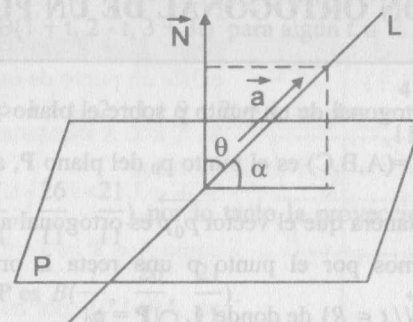
$$P_1: x - 3y + 4z = 10 \text{ y } P_2: x - 3y + 4z - 6 = 0$$

$$d(P_1, P_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-10 - (-6)|}{\sqrt{1 + 9 + 16}} = \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}$$

$$\therefore d(P_1, P_2) = \frac{2\sqrt{26}}{13}$$

1.30. ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO.-

Consideremos la ecuación vectorial de una recta $L = \{p_0 + t \vec{a} / t \in R\}$ y la ecuación general del plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$ cuyo vector normal es $\vec{N} = (A, B, C)$



Sea $\theta = \angle(\vec{a}, \vec{N})$ ángulo entre los vectores \vec{a} y \vec{N} , entonces:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{N}}{\|\vec{a}\| \|\vec{N}\|}, \text{ además se tiene } \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta, \text{ entonces:}$$

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{N}}{\|\vec{a}\| \|\vec{N}\|} \text{ por lo tanto:}$$

$$\sin \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{N}}{\|\vec{a}\| \|\vec{N}\|}$$

Que es la expresión para calcular el ángulo α formado por una recta y un plano

Ejemplo.- Hallar el ángulo θ que forma la recta $L = \{(1,8,1) + t(1,1,2) / t \in \mathbb{R}\}$ con el plano $P: 2x - y + z = 7$.

Solución

Sea $\theta = \angle(L, P)$ donde $a = (1,1,2)$ vector dirección de la recta y $N = (2, -1, 1)$ el vector normal del plano P . Ahora aplicamos la relación para calcular el ángulo θ .

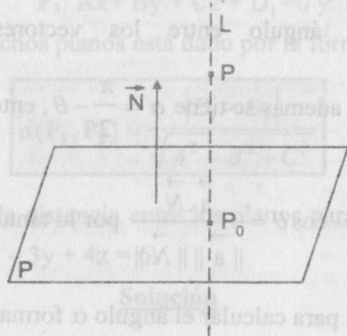
$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{a}\| \|\vec{N}\|} = \frac{(1,1,2) \cdot (2,-1,1)}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{2-1+2}{6} = \frac{1}{2}$$

de donde: $\sin \theta = \frac{1}{2}$ entonces $\theta = 60^\circ$.

1.31. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO.-

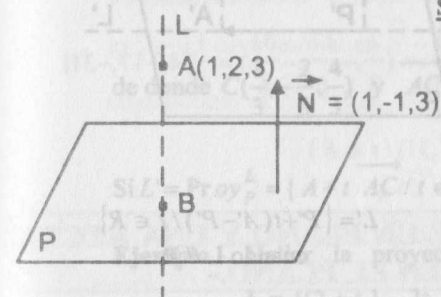
La proyección ortogonal de un punto p sobre el plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$ con normal $\vec{N} = (A, B, C)$ es el punto p_0 del plano P , al cual denotaremos por

Proy_P^p , de tal manera que el vector $\vec{p_0 p}$ es ortogonal al plano P . Para hallar el punto p_0 trazamos por el punto p una recta L ortogonal al plano P es decir: $L = \{p + t\vec{N} / t \in \mathbb{R}\}$ de donde $L \cap P = p_0$.



Ejemplo.- Hallar la proyección ortogonal del punto $A(1,2,3)$ sobre el plano $P: x - y + 3z = 4$

Solución



como $P: x - y + 3z = 4$, donde $\vec{N} = (1, -1, 3)$ es la normal de P y L la recta que pasa por el punto $A(1,2,3)$ y es perpendicular al plano P entonces $L = \{A + t\vec{N} / t \in \mathbb{R}\}$ es decir:

$$L = \{(1,2,3) + t(1,-1,3) / t \in \mathbb{R}\}$$

Sea $B \in L \cap P \Rightarrow B \in L \wedge B \in P$.

Si $B \in L \Rightarrow B(1+t, 2-t, 3+3t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$

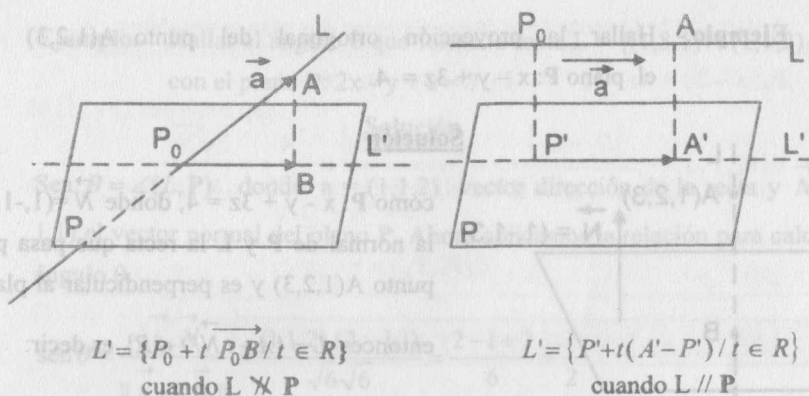
$$\text{como } B \in P \Rightarrow 1+t-2+t+9t=4 \Rightarrow t = -\frac{4}{11}$$

de donde $B(\frac{7}{11}, \frac{26}{11}, \frac{21}{11})$ por lo tanto la proyección ortogonal del punto A

sobre el plano P es $B(\frac{7}{11}, \frac{26}{11}, \frac{21}{11})$.

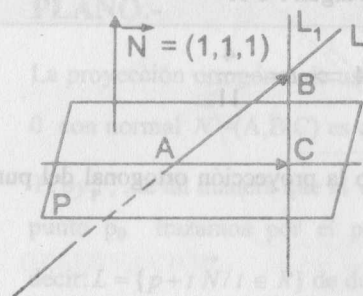
1.32. PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO.-

La proyección ortogonal de la recta $L = \{p_0 + t\vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$ sobre el plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$, es la recta L' , el cual denotaremos por Proy_P^L que está contenida en el plano P y que pasa por dos puntos de P que son las proyecciones ortogonales de dos puntos de L sobre el plano P .



Ejemplo.- Hallar la proyección ortogonal de la recta $L = \{(t, 1-t, 2t) / t \in R\}$ sobre el plano $P: x + y + z = 1$

Solución



$L = \{(t, 1-t, 2t) / t \in R\} = \{(0, 1, 0) + t(1, -1, 2) / t \in R\}$, de donde

$\vec{a} = \vec{AB} = (1, -1, 2) \Rightarrow B - A = (1, -1, 2)$, $B = A + (1, -1, 2) = (0, 1, 0) + (1, -1, 2) \Rightarrow B(1, 0, 2)$

ahora calculamos el punto C que es la proyección ortogonal del punto B sobre el plano P , para esto trazamos la recta L_1 que pasa por B perpendicular al plano P es decir: $L_1 = \{(1, 0, 2) + \lambda(1, 1, 1) / \lambda \in R\}$

Sea $C \in L_1 \cap P \Rightarrow C \in L_1 \wedge C \in P$

Si $C \in L_1 \Rightarrow C(1 + \lambda, \lambda, 2 + \lambda)$ para algún $\lambda \in R$.

como $C \in P \Rightarrow 1 + \lambda + \lambda + 2 + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

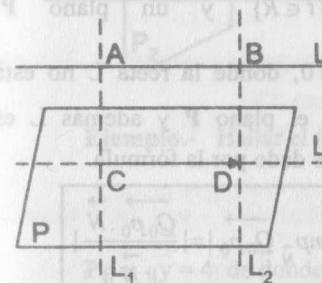
de donde $C(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$ y $\vec{AC} = C - A = \frac{1}{3}(1, -5, 4)$

Si $L' = \text{Pr oy}_P^L = \{A + t \cdot \vec{AC} / t \in R\}$ de donde: $L' = \{(0, 1, 0) + t(1, -5, 4) / t \in R\}$

Ejemplo.- Hallar la proyección ortogonal de la recta

$L = \{(2+t, 1-3t, -5t) / t \in R\}$, sobre el plano $P: 2x - y + z = 1$.

Solución



$L = \{(2, 1, 0) + t(1, -3, -5) / t \in R\}$

Donde $\vec{a} = \vec{AB} = (1, -3, -5)$ si $A(2, 1, 0) \Rightarrow B(3, -2, -5)$

ahora calculamos sus proyecciones ortogonales sobre el plano P , $C = \text{Pr oy}_P^A$ y $D = \text{Pr oy}_P^B$ para calcular C trazamos la recta L_1 que pasa por A es decir: $L_1 = \{(2, 1, 0) + t(2, -1, 1) / t \in R\}$

como $C \in L_1 \cap P \Rightarrow C \in L_1 \wedge C \in P$.

Si $C \in L_1 \Rightarrow C(2+2t, 1-t, t)$ para algún $t \in R$.

como $C \in P \Rightarrow 4 + 4t - 1 + t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$ por lo tanto $C(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$

ahora calculamos el punto D , para esto trazamos la recta L_2 que pasa por el punto B , es decir:

$L_2 = \{(3, -2, -5) + t(2, -1, 1) / t \in R\}$, como $D \in L_2 \cap P$ entonces:

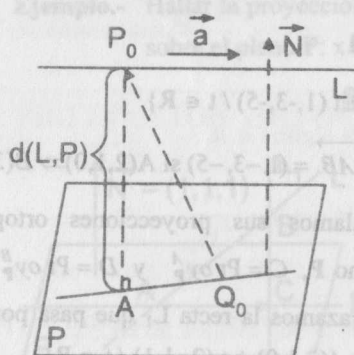
$D \in L_2 \Rightarrow D(3+2t, -2-t, -5+t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

como $D \in P \Rightarrow 6+4t+2+t-5+t=1 \Rightarrow t=-\frac{1}{3}, D(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{16}{3})$ de donde

$$\overrightarrow{CD} = D - C = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right) - \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{17}{6}, -\frac{31}{6}\right) = \frac{1}{6}(4, -17, -31)$$

$$\therefore L' = \text{Pr oy}_P^L = \left\{ \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) + t(4, -17, -31) / t \in \mathbb{R} \right\}$$

1.33. DISTANCIA MÍNIMA ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA QUE NO ESTA CONTENIDA EN EL PLANO.-



La distancia mínima entre una recta

$L = \{p_0 + t \vec{a} / t \in \mathbb{R}\}$ y un plano P :

$\vec{N} \cdot (p - Q_0) = 0$, donde la recta L no está contenida en el plano P y además L es paralela a P es dado por la fórmula.

$$d(L, P) = |\text{comp}_{\vec{N}} \overrightarrow{Q_0 P_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{Q_0 P_0} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|} \right|$$

Ejemplo.- Hallar la distancia de la recta $L = \{(2, 1, 5) + t(3, -4, 4) / t \in \mathbb{R}\}$ al plano $P: 4x - 3y - 6z - 5 = 0$

Solución

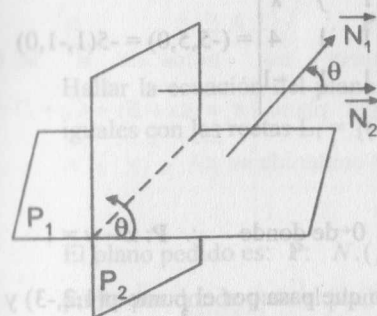
Tomemos un punto del plano. $z = 0, y = 5, x = 5$

entonces $Q_0 = (5, 5, 0)$ y $p_0 = (2, 1, 5) \Rightarrow \overrightarrow{Q_0 P_0} = Q_0 - p_0 = (7, 4, -5)$

$$d(L, P) = \left| \frac{\overrightarrow{Q_0 P_0} \cdot \vec{N}}{\|\vec{N}\|} \right| = \left| \frac{(7, 4, -5) \cdot (4, -3, -6)}{\sqrt{16+9+36}} \right| = \left| \frac{28-12+30}{\sqrt{61}} \right| = \frac{46}{\sqrt{61}}$$

1.34. ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS.-

Consideremos las ecuaciones generales de dos planos $P_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, cuya normal es $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ y $P_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, cuya normal es $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.



El ángulo θ formado por los planos P_1 y P_2 es igual al ángulo entre sus vectores normales \vec{N}_1 y \vec{N}_2 respectivamente y es dado por la expresión siguiente.

$$\cos \theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|}$$

Ejemplo.- Hallar el ángulo formado por los planos $P_1: x - y = 4$ y $P_2: x + z = 6$

Solución

$P_1: x - y = 4$ de donde $\vec{N}_1 = (1, -1, 0)$, $P_2: x + z = 6$ de donde $\vec{N}_2 = (1, 0, 1)$

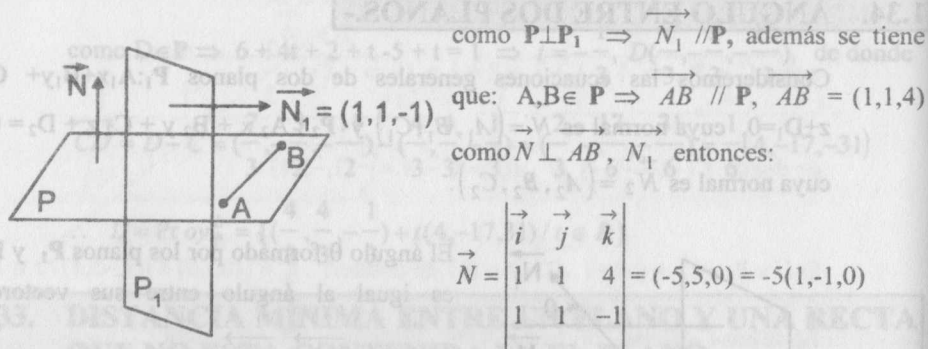
Si $\theta = \angle(P_1, P_2) = \angle(\vec{N}_1, \vec{N}_2)$ entonces $\cos \theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|}$

$$\cos \theta = \frac{(1, -1, 0) \cdot (1, 0, 1)}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1-0+0}{2} = \frac{1}{2}, \text{ como } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ entonces } \theta = 60^\circ$$

1.35. EJERCICIOS DESARROLLADOS.-

①

Encontrar una ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, 1, 3)$ y que además es perpendicular al plano $P_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z + 2 = 0\}$

Solución

como $P \perp P_1 \Rightarrow \vec{N}_1 \parallel \vec{P}$, además se tiene
que: $A, B \in P \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{P}$, $\vec{AB} = (1, 1, 4)$
como $N \perp \vec{AB}$, N_1 entonces:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-5, 5, 0) = -5(1, -1, 0)$$

de donde tenemos que: $\vec{N} = -5(1, -1, 0)$

Luego $P: \vec{N} \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$ de donde $\therefore P: x - y = 1$

- ② Hallar la ecuación cartesiana de un plano que pasa por el punto $p(1, 2, -3)$ y por la intersección del plano $x - y + 2z = 4$ con el plano XY .

Solución

La intersección del plano $x - y + 2z = 4$ con el

plano XY es la recta $L: \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

Escribiendo la ecuación de la recta L en forma vectorial para $z = 0 \Rightarrow x - y = 4 \Rightarrow x = y + 4$

Si $(x, y, z) \in L \Rightarrow (x, y, z) = (y + 4, y, 0) = (4, 0, 0) + y(1, 1, 0)$

Luego $L = \{(4, 0, 0) + t(1, 1, 0) / t \in \mathbb{R}\}$

ahora calculamos la normal $\vec{N} = p_0 \times a$, donde $p_0 p = (-3, 2, -3)$ y $a = (1, 1, 0)$ entonces:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (3, -3, -5), \text{ como el plano } P \text{ pasa por } p(1, 2, -3)$$

$$P: \vec{N} \cdot [(x, y, z) - (1, 2, -3)] = 0, \text{ de donde } P: (3, -3, -5) \cdot (x - 1, y - 2, z + 3) = 0$$

$$\therefore P: 3x - 3y - 5z = 12$$

③

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $p_0(3, 1, -2)$ y hace ángulos iguales con las rectas $L_1 = \{(1, 4, 2) + t(1, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$, L_2 : eje OX , L_3 : eje OY

Solución

El plano pedido es: $P: \vec{N} \cdot (p - p_0) = 0$, de donde $\vec{N} = (A, B, C)$ y $p_0(3, 1, -2)$ el punto por donde pasa el plano.

La condición del problema es: $\angle(L_1, P) = \angle(L_2, P) = \angle(L_3, P)$, donde:

para $\angle(L_1, P) = \angle(L_2, P)$, se tiene:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{a}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{a}\|} = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{b}\|}, \text{ donde } \vec{a} = (1, 1, 1), \vec{b} = (1, 0, 0), \vec{N} = (A, B, C)$$

$$\text{efectuando operaciones se tiene que: } (\sqrt{3} - 1)A - B - C = 0 \quad \dots (1)$$

para $\angle(L_2, P) = \angle(L_3, P)$ se tiene:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{b}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{b}\|} = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{c}|}{\|\vec{N}\| \|\vec{c}\|}, \text{ donde } \vec{b} = (1, 0, 0), \vec{c} = (0, 1, 1), \vec{N} = (A, B, C)$$

$$\text{efectuando operaciones se tiene: } A = B \quad \dots (2)$$

ahora reemplazamos (2) en (1) se tiene: $C = (\sqrt{3} - 2)B$

como $\vec{N} = (A, B, C) = (B, B, (\sqrt{3} - 2)B) = B(1, 1, \sqrt{3} - 2)$ $B \neq 0$

Por lo tanto $P: (1, 1, \sqrt{3} - 2) \cdot (x - 3, y - 1, z + 2) = 0$

$$\therefore P: x + y + (\sqrt{3} - 2)z + 2\sqrt{3} - 8 = 0$$

- 4 Sea $\vec{\mu} = (a, b, c)$ y $\vec{N} = (A, B, C)$ vectores no nulos de \mathbb{R}^3 tal que $\vec{N} \perp \vec{\mu}$ si $p_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto del plano $\pi = Ax + By + Cz + D = 0$.

Demostrar que $L = \{p_0 + t\vec{\mu} / t \in \mathbb{R}\}$ está contenida en π .

Solución

Como $\vec{N} \perp \vec{\mu} \Rightarrow \vec{N} \cdot \vec{\mu} = 0 \Rightarrow Aa + Bb + Cc = 0$ además

$L = \{p_0 + t\vec{\mu} / t \in \mathbb{R}\} = \{(x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) / t \in \mathbb{R}\}$ por demostrar que

$$L \subset \pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

Sea $p \in L \Rightarrow p(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$

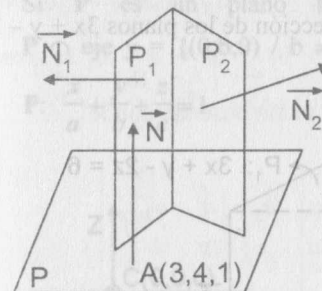
como $p_0 \in \pi \Rightarrow A(x_0 + ta) + B(y_0 + tb) + C(z_0 + tc) + D = 0$

$$= \underbrace{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}_0 + t(Aa + Bb + Cc) = 0,$$

Luego $L = 0 + t(Aa, Bb, Cc) = 0 + t_0 = 0$, entonces $p \in \pi$ luego $L \subset \pi$.

- 5 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(3, 4, 1)$ y es ortogonal a los planos $P_1: x - y = 4$, $P_2: x + z = 6$.

Solución



Sea $P_1: x - y = 4$ de donde $\vec{N}_1 = (1, -1, 0)$

$P_2: x + z = 6$ de donde $\vec{N}_2 = (1, 0, 1)$

$P: \vec{N} \cdot (p - A) = 0$ es el plano pedido como $P \perp$

P_1, P_2 entonces $\vec{N}_1, \vec{N}_2 \parallel P$ de donde la normal \vec{N} de P es:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

como $P: \vec{N} \cdot (p - A) = 0$, al reemplazar se tiene, $P: (-1, -1, 1) \cdot (x - 3, y - 4, z - 1) = 0$

$$\therefore P: x + y - z = 6$$

- 6 Encontrar la ecuación del plano que pasa por $(1, 2, -3)$ y sea paralelo al plano $3x - y + 2z = 4$. ¿Cuál es la distancia entre los planos?

Solución

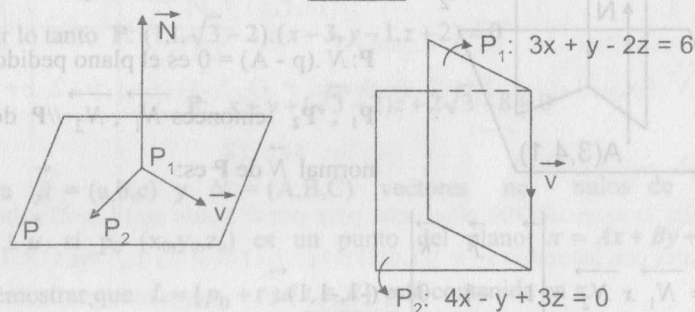
Sea $P_1: 3x - y + 2z = 4$, donde $\vec{N}_1 = (3, -1, 2)$ y P el plano pedido, como $P \parallel P_1$ entonces $P: 3x - y + 2z + D = 0$

pero $(1, 2, -3) \in P \Rightarrow 3 - 2 - 6 + D = 0 \Rightarrow D = 5$

por lo tanto el plano es $P: 3x - y + 2z + 5 = 0$, la distancia entre ambos planos paralelos se tiene:

$$d(P, P_1) = \frac{|D - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|5 - (-4)|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{14}}$$

- 7) Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1,0,-1)$ y $P_2(-1,2,1)$ y es paralelo a la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z = 6$, $4x - y + 3z = 0$

Solución

para determinar el vector normal al plano P , primero hallaremos el vector dirección \vec{v} de la recta de intersección.

$$\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (1, -17, -7) \text{ donde } \vec{N}_1 = (3, 1, -2) \text{ y } \vec{N}_2 = (4, -1, 3)$$

ahora trasladamos el vector \vec{v} paralelamente al plano buscado y con el vector $\vec{P_1P_2} = (-2, 2, 2)$ se obtiene la normal \vec{N} al plano P , es decir:

$$\vec{N} = \vec{P_1P_2} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -17 & -7 \end{vmatrix} = (20, -12, 32)$$

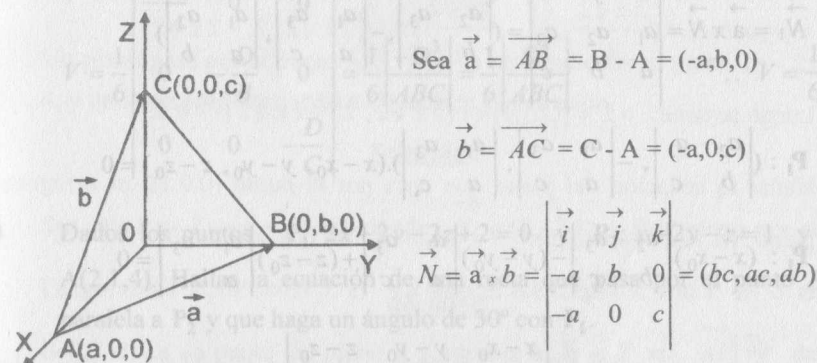
considerando el punto $p_1(1,0,-1)$ en el plano y la normal $\vec{N} = (20, -12, 32)$ se tiene:

$$P: \vec{N} \cdot (p - p_1) = 0, \text{ reemplazando se tiene. } P: (20, -12, 32) \cdot (x - 1, y, z + 1) = 0$$

$$\therefore P: 5x - 3y + 8z + 3 = 0$$

- 8) Si P es un plano tal que: $P \cap \text{eje } x = \{(a, 0, 0) / a \neq 0, a \in \mathbb{R}\}$, $P \cap \text{eje } y = \{(0, b, 0) / b \neq 0, b \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que P tiene la ecuación.

$$P: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Solución

$$\text{Sea } \vec{a} = \vec{AB} = B - A = (-a, b, 0)$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = C - A = (-a, 0, c)$$

$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab)$$

La ecuación del plano es: $P: \vec{N} \cdot (p - A) = 0$, reemplazando se tiene:

$$P: (bc, ac, ab) \cdot (x - a, y, z) = 0 \Rightarrow P: bcx + acy + abz = abc$$

$$\therefore P: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- 9) Demostrar que la ecuación del plano, que pasa por la recta $L: x = x_0 + a_1t, y = y_0 + a_2t, z = z_0 + a_3t, t \in \mathbb{R}$ y es perpendicular al plano $P: ax + by + cz + d = 0$, se puede representar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Solución

En la recta $L: x = x_0 + a_1t, y = y_0 + a_2t, z = z_0 + a_3t, t \in \mathbb{R}$ el vector dirección es $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y en el plano $P: ax + by + cz + d = 0$, su normal es $\vec{N} = (a, b, c)$. Sea $P_1: \vec{N}_1 \cdot (p - p_0) = 0$, el plano buscado donde:

$$\vec{N}_1 = a \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b & c \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a & b \end{vmatrix} \right)$$

$$P_1: \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b & c \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a & b \end{vmatrix} \right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$P_1: (x - x_0) \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b & c \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a & c \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore P_1: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

- 10 Si A, B, C y D son todos no nulos. Demuéstrese que el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$ tiene un volumen

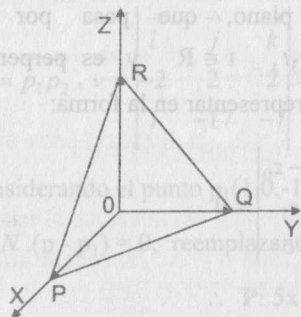
$$\text{igual a } V = \frac{1}{6} \frac{D^3}{|ABC|}.$$

Solución

Sean P, Q, R, los puntos de intersección del plano $P: Ax + By + Cz + D = 0$, con los ejes coordenados respectivamente, es decir:

$$P(-\frac{D}{A}, 0, 0), Q(0, -\frac{D}{B}, 0) \text{ y } R(0, 0, -\frac{D}{C})$$

el volumen V del tetraedro OPQR es:



$$V = \frac{1}{6} |[\vec{OP} \vec{OQ} \vec{OR}]| \text{ de donde se tiene:}$$

$$\vec{OP} = (-\frac{D}{A}, 0, 0), \vec{OQ} = (0, -\frac{D}{B}, 0), \vec{OR} = (0, 0, -\frac{D}{C})$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -\frac{D}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{D}{C} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \frac{-D^3}{|ABC|} = \frac{1}{6} \frac{D^3}{|ABC|} \therefore V = \frac{1}{6} \frac{D^3}{|ABC|}$$

- 11 Dados los puntos $P_1: 2x + 2y - 2z + 2 = 0$ y $P_2: x - 2y - z = 1$ y el punto $A(2, 1, 4)$. Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto A que es paralela a P_2 y que haga un ángulo de 30° con P_1 .

Solución

$$P_1: 2x + 2y - 2z + 2 = 0, \text{ de donde su normal es } \vec{N}_1 = (2, 2, -2)$$

$$P_2: x - 2y - z = 1, \text{ de donde su normal es } \vec{N}_2 = (1, -2, -1)$$

$$\text{Sea } L = \{(2, 1, 4) + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ donde } \vec{u} = (a, b, c) \text{ y } \|\vec{u}\| = 1$$

$$\text{como } L \parallel P_2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{N}_2 = 0 \Rightarrow a - 2b - c = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{por otra parte se tiene: } \angle(L, P_1) = 30^\circ, \text{ entonces } \sin 30^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{N}_1|}{\|\vec{u}\| \|\vec{N}_1\|} \text{ donde}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{N}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \|\vec{u}\| \|\vec{N}_1\| \Rightarrow 2a + 2b - 2c = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} \Rightarrow 2a + 2b - 2c = 3 \dots (2)$$

$$\text{como } \|\vec{u}\| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \dots (3)$$

En la recta $L: x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$ donde $\vec{u} = (a, b, c)$ es normal al plano P que pasa por el punto A que es resolviendo el sistema se tiene:

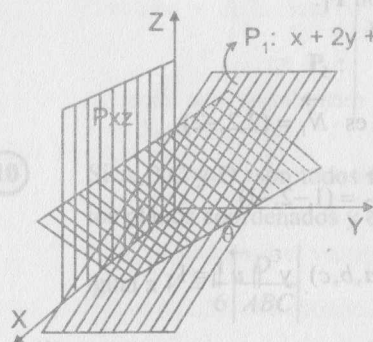
$$\begin{cases} a - 2b - c = 0 \\ 2a + 2b - 2c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\vec{u} = (a, b, c) = \left(\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{4} (2 \pm \sqrt{2}, 2, -2 \pm \sqrt{2})$$

Luego se tiene: $L = \{(2, 1, 4) + t(2 \pm \sqrt{2}, 2, -2 \pm \sqrt{2}) / t \in \mathbb{R}\}$

- 12 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $(0, 0, 1)$, es ortogonal al plano XZ y hace un ángulo $\theta = \arccos \frac{1}{3}$ con el plano $x + 2y + 2z = 5$.

Solución



Sea $P_1: x + 2y + 2z = 5$ de donde

$$\vec{N}_1 = (1, 2, 2) \text{ y } P_2 = XZ$$

$P_3 = ?$ tal que $P_3 \perp P_2$ y además

Sea $\vec{N}_3 = (a, 0, c)$ la norma de P_3 puesto que N_3 es paralelo al plano XZ y $XZ \perp P_3$.

Además $\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_3\|}$ donde $\vec{N}_1 = (1, 2, 2)$ y $\vec{N}_3 = (a, 0, c)$

$$\cos \theta = \frac{(1, 2, 2) \cdot (a, 0, c)}{3\sqrt{a^2 + c^2}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{a + 2c}{3\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\sqrt{a^2 + c^2} = a + 2c \text{ entonces se tiene: } a = -\frac{3}{4}c$$

por lo tanto $\vec{N}_3 = (-\frac{3c}{4}, 0, c) = -\frac{c}{4}(3, 0, -4)$

Luego $P_3: \vec{N}_3 \cdot (p - (0, 0, 1)) = 0$, al reemplazar se tiene:

$$P_3: (3, 0, -4) \cdot (x, y, z - 1) = 0 \quad \therefore P_3: 3x - 4z + 4 = 0$$

- 13 Un plano pasa por el punto $A(3, 1, -1)$, es perpendicular al plano $2x - 2y + z = -4$, y un intercepto Z es igual a -3 , hállese su ecuación.

Solución

Sea $P_1: 2x - 2y + z = -4$, de donde $\vec{N}_1 = (2, -2, 1)$ y P el plano por calcular,

Luego como $P_1 \perp P \Rightarrow \vec{N}_1 // P$ y como el intercepto Z con P es -3 entonces

$B(0, 0, -3)$ es un punto del plano P y además $A, B \in P \Rightarrow \vec{AB} // P$ de donde $\vec{AB} = (-3, -1, -2)$ como $\vec{N}_1, \vec{AB} // P$ entonces la normal P es \vec{N} dado por:

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, -1, 8)$$

$P: \vec{N} \cdot (x - 3, y - 1, z + 1) = 0$, de donde $P: (-5, -1, 8) \cdot (x - 3, y - 1, z + 1) = 0$, por lo tanto:

$$P: 5x + y - 8z - 24 = 0$$

- 14 Hallar la ecuación de cada uno de los planos que se hallan a dos unidades del origen y tiene una normal que hace ángulos de 60° con los semi ejes positivos OX y OY .

Solución

Sea P el plano buscado, cuya normal es $\vec{N} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

$$\text{como } \alpha = \beta = 60^\circ \Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{N} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1, 1, \pm \sqrt{2})$$

La ecuación del plano es: $P: x + y \pm \sqrt{2}z + D = 0$

$$\text{como } d(O, P) = 2 \Rightarrow \frac{|0+0+0+D|}{\sqrt{1+1+2}} = 2 \text{ de donde } |D| = 4 \Rightarrow D = 4 \vee D = -4$$

Si $D = 4$ entonces $P_1: x + y \pm \sqrt{2}z + 4 = 0$;

$D = -4$ entonces $P_2: x + y \pm \sqrt{2}z - 4 = 0$

- 15** Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano $z = 2$, que contenga al punto $(2, 2, 2)$ y que haga un ángulo de 60° con el plano $\sqrt{3}x + 2y - 3z + 2 = 0$

Solución

La ecuación del plano pedido es de la forma $P: Ax + By + D = 0$ puesto que es perpendicular al plano $z = 2$ paralelo al plano XY . La normal del plano P es $\vec{N} = (A, B, 0)$.

Si $P_1: \sqrt{3}x + 2y - 3z + 2 = 0$, de donde $\vec{N}_1 = (\sqrt{3}, 2, -3)$

El ángulo formado por P_1 y P es $\theta = 60^\circ$ que es dado por: $\cos \theta = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}\|}$

$$\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}A + 2B}{4\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ de donde } \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}A + 2B}{4\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow 2\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3}A + 2B$$

$$4(A^2 + B^2) = 3A^2 + 4B^2 + 4\sqrt{3}AB \Rightarrow A = 4\sqrt{3}B \quad \dots (1)$$

$$\text{como } (2, 2, 2) \in P \Rightarrow 2A + 2B + D = 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{de (1) y (2) se tiene } D = -(8\sqrt{3} + 2)B \quad \dots (3)$$

reemplazando (1) y (3) en $P: Ax + By + D = 0$

$$P: 4\sqrt{3}Bx + By - (8\sqrt{3} + 2)B = 0, B \neq 0 \Rightarrow P: 4\sqrt{3}x + y - 8\sqrt{3} - 2 = 0$$

- 16** La recta $L_1 = \{(5+t, -t, 0) / t \in \mathbb{R}\}$ se refleja en el plano $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$.

Hallar la ecuación de la recta reflejada.

Solución

Se observa que $p_2 \in L_1 \wedge \pi \Rightarrow p_2 \in L_1 \wedge p_2 \in \pi$

Si $p_2 \in L_1 \Rightarrow p_2(5+t, -t, 0)$ para algún $t \in \mathbb{R}$

además $p_2 \in \pi: 2(5+t) - t + 0 - 1 = 0 \Rightarrow t = -3$

de donde $p_2(2, 3, 0)$ también $p_1(5, 0, 0) \in L_1$

como $\pi: 2x - y + z - 1 = 0$, de donde $\vec{N} = (2, -1, 1)$

entonces $\vec{N} \perp \pi \Rightarrow \vec{N} // L_3$ de donde:

$$L_3 = \{(5, 0, 0) + \lambda(2, -1, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$A \in L_3 \cap \pi \Rightarrow A \in L_3 \wedge A \in \pi$$

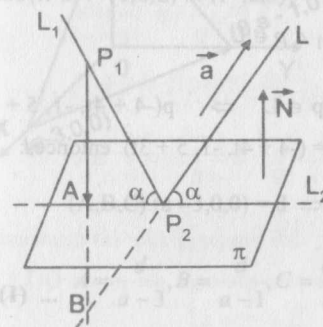
Si $A \in L_3 \Rightarrow A(5+2\lambda, -\lambda, \lambda)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, además $A \in \pi$ entonces

$$2(5+2\lambda) - \lambda + \lambda - 1 = 0 \text{ entonces } \lambda = -\frac{3}{2}, \text{ de donde:}$$

$$A(2, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \Rightarrow \vec{AP}_1 = (3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) \Rightarrow \vec{BP}_1 = p_1 - B = 2\vec{AP}_1 = 2(3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = (6, -3, 3)$$

$$\vec{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = (-3, 3, 0) \Rightarrow \vec{BP}_2 = p_2 - B = (3, 0, 3) \text{ como } \vec{BP}_2 // L \text{ y } p_2 \in L$$

$$\text{entonces } L = \{(2, 3, 0) + r(3, 0, 3) / r \in \mathbb{R}\}$$



- 17 Dado el plano $P: x - 2y + 3z = 8$ y la recta $L: \frac{x+4}{4} = \frac{5-z}{-3}, y = -1$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 2, -1)$ paralela al plano dado y corta la recta L .

Solución

A la ecuación de la recta $L: \frac{x+4}{4} = \frac{5-z}{-3}, y = -1$, escribiremos en forma vectorial $L = \{-4, -4, 5\} + t(4, 0, 3) / t \in \mathbb{R}$.

Sea L_1 la recta por determinar, es decir: $L_1 = \{(0, 2, -1) + r(a, b, c) / r \in \mathbb{R}\}$ como

L_1 corta a $L \Rightarrow \exists p \in L_1 \cap L \Rightarrow p \in L_1 \wedge p \in L$

Si $p \in L_1 \Rightarrow p(ra, 2+rb, -1+rc) \Rightarrow p \in L \Rightarrow p(-4+4t, -1, 5+3t)$

(de donde por igualdad $(ra, 2+rb, -1+rc) = (-4+4t, -1, 5+3t)$ entonces:

$$\begin{cases} a = \frac{4t-4}{r} \\ -4+4t = ra \\ -1 = 2+rb \\ 5+3t = -1+rc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{4t-4}{r} \\ b = -\frac{3}{r} \\ c = \frac{6-3t}{r} \end{cases} \dots (1)$$

como $P: x - 2y + 3z = 8$ de donde $\vec{N} = (1, -2, 3)$ como $L_1 \perp P$ entonces

$\vec{a} \perp \vec{N}$ donde $\vec{a} = (a, b, c)$ Si $\vec{a} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{N} = 0 \Rightarrow a - 2b + 3c = 0 \dots (2)$

reemplazando (1) en (2) se tiene. $\frac{4t-4}{r} + \frac{6}{r} + \frac{18-9t}{r} = 0 \Rightarrow t = 4$

de donde: $a = \frac{12}{r}, b = -\frac{3}{r}, c = -\frac{6}{r}$ como $\vec{a} = (a, b, c) = \frac{3}{r}(4, -1, -2)$

$$\therefore L_1 = \{(0, 2, -1) + \lambda(4, -1, -2) / \lambda \in \mathbb{R}\}$$

- 18 El intercepto Y de un plano es menor en una unidad que su intercepto Z y mayor en 2 unidades que su intercepto X , si el volumen encerrado por el plano y los tres planos coordenados es $15u^3$, Hallar la ecuación del plano.

Solución

Los puntos por donde pasa el plano π son: $(0, 0, a), (0, a - 1, 0), (a - 3, 0, 0)$ y la ecuación del plano es:

$\pi: \vec{N} \cdot (x, y, z) = d$ donde $\vec{N} = (A, B, C)$

$(0, 0, a) \in \pi \Rightarrow (A, B, C) \cdot (0, 0, a) = d \Rightarrow aC = d$

$(0, a - 1, 0) \in \pi \Rightarrow (A, B, C) \cdot (0, a - 1, 0) = d$

$B(a - 1) = d \Rightarrow (a - 3, 0, 0) \in \pi$

$(A, B, C) \cdot (a - 3, 0, 0) = d \Rightarrow A(a - 3) = d$ de donde

$$A = \frac{d}{a-3}, B = \frac{d}{a-1}, C = \frac{d}{a} \text{ además se tiene que: } V = \frac{1}{6} \left| \frac{d^3}{ABC} \right| \text{ donde } V = 15u^3$$

$$V = \frac{1}{6} \left| \frac{d^3}{\frac{d}{a-3} \cdot \frac{d}{a-1} \cdot \frac{d}{a}} \right| = 15 \Rightarrow (a-3)(a-1)a = 90 \Rightarrow a = 6 \text{ de donde } A = \frac{d}{3}, B = \frac{d}{5}, C = \frac{d}{6},$$

como $\pi: \vec{N} \cdot (x, y, z) = d \Rightarrow \pi: d \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \right) \cdot (x, y, z) = d \therefore \pi: \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 1$

- 19 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 1)$, perpendicular a la recta $3x = 2y = z$, y paralela al plano $x + y - z = 0$

Solución

Sean $L = \{(1, -1, 1) + \lambda(a, b, c) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ la recta buscada $L_1: 3x = 2y = z$

entonces: $L_1: \frac{x}{1/3} = \frac{y}{1/2} = \frac{z}{1} \Rightarrow \vec{b} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$

$$L \perp L_1 \Rightarrow (a, b, c) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1) = 0 \Rightarrow 2a + 3b + 6c = 0 \quad \dots (1)$$

como el plano $P: x + y - z = 0$, de donde $\vec{N} = (1, 1, -1)$ por ser $P \parallel L \Rightarrow \vec{N} \cdot (a, b, c) = 0$

$$(1, 1, -1) \cdot (a, b, c) = 0 \quad \text{entonces } a + b - c = 0 \quad \dots (2)$$

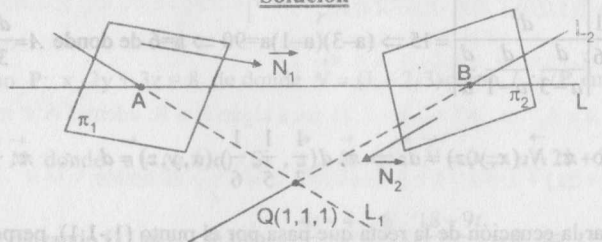
ahora resolvemos el sistema siguiente:
$$\begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9c \\ b = -8c \end{cases}$$

$(a, b, c) = (9c, -8c, c) = c(9, -8, 1)$ por lo tanto $L = \{(1, -1, 1) + \lambda(9, -8, 1) / \lambda \in$

$R\}$ lo que es igual a expresar en la forma. $L: \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{-8} = \frac{z-1}{1}$

- 20 Sean $\pi_1: 3x + y - z = 1$ y $\pi_2: x - y + 3z = 1$, dos planos. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por las proyecciones del punto $Q(1, 1, 1)$ sobre cada plano.

Solución



Del gráfico se observa que la recta L pasa por los puntos A y B que son las proyecciones del punto Q sobre cada plano, por lo tanto calcularemos los puntos A y B .

Para el punto A trazamos la recta L_1 , es decir: $L_1 = \{(1, 1, 1) + t(3, 1, -1) / t \in R\}$

como $A \in L_1 \cap \pi_1$ entonces $A \in L_1 \wedge A \in \pi_1$. Si $A \in L_1 \Rightarrow A(1 + 3t, 1 + t, 1 - t)$

para algún $t \in R$, además $A \in \pi_1 \Rightarrow 3(1 + 3t) + 1 + t + 1 - t = 1 \Rightarrow t = -\frac{2}{11}$,

de donde el punto $A(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11})$. Para el punto B trazamos la recta L_2 , es

decir: $L_2 = \{(1, 1, 1) + t(1, -1, 3) / t \in R\}$ como $B \in L_2 \cap \pi_2 \Rightarrow B \in L_2 \wedge B \in \pi_2$

Si $B \in L_2 \Rightarrow B(1 + t, 1 - t, 1 + 3t)$ para algún $t \in R$

además $B \in \pi_2 \Rightarrow 1 + t - 1 + t + 3(1 + 3t) = 1 \Rightarrow t = -\frac{2}{11}$

de donde el punto $B(\frac{9}{11}, \frac{13}{11}, \frac{5}{11})$

Sea $\vec{a} = \vec{AB} = B - A = \frac{4}{11}(1, 1, -2)$ por lo tanto la recta L pedida es:

$L = \{(\frac{5}{11}, \frac{9}{11}, \frac{13}{11}) + \lambda(1, 1, -2) / \lambda \in R\}$ cuyas ecuaciones paramétricas es:

$$L: \begin{cases} x = \frac{5}{11} + \beta \\ y = \frac{9}{11} + \beta \\ z = \frac{13}{11} - 2\beta \end{cases}, \beta \in R$$

1.36. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- 1 Una recta pasa por el punto $A(-2, 1, 3)$, es perpendicular e intercepta a la recta $L_1 = \{(2, 2, 1) + t(1, 0, -1) / t \in R\}$. Hallar la ecuación vectorial de dicha recta.

Rpta. $L = \{(-2, 1, 3) + \lambda(1, 1, 1) / \lambda \in R\}$.

- 2) Por los puntos A(-6,6,-5) y B(12,-6,1), se ha trazado una recta. Hallar los puntos de intersección de esta recta con los planos coordenados.

Rpta. (9,-4,0), (3,0,-2), (0,2,-3)

- 3) Dados los vértices de un triángulo A(3,6,-7), B(-5,2,3) y C(4,-7,-2). Hallar las ecuaciones paramétricas de su mediana, trazada desde el vértice C.

Rpta. $x = 4 + 5t$, $y = -7 - 11t$, $z = -2$

- 4) Hallar las ecuaciones de la recta L que pasa por el punto A(-1,0,2), es ortogonal a la recta $L_1 = \{(2,2,0) + t(5,-2,-3) / t \in \mathbb{R}\}$ y que corta con la recta

$$L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{1}.$$

Rpta. $L = \{(-1,0,2) + t(32,65,10) / t \in \mathbb{R}\}$.

- 5) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto M(-4,-5,3) y se corta con las dos rectas. $L_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $L_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$

Rpta. $L: \frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-3}{-1}$

- 6) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto A(-1,2,-3), es perpendicular al vector $\vec{a} = (6,-2,-3)$ y se corta con la recta $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$

Rpta. $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6}$

- 7) Dadas las rectas $L_1 = \{(3,1,0) + t(1,0,1) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(1,1,1) + \lambda(2,1,0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Hallar el punto Q que equidista de ambas rectas una distancia mínima, además

hallar esta distancia.

Rpta. $Q(\frac{13}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ y $d = \frac{\sqrt{6}}{4}$

- 8) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2,0,1) y que intercepta a la recta $L_1 = \{(1,2,3) + t(2,2,3) / t \in \mathbb{R}\}$ en ángulo recto.

Rpta. $L = \{(2,0,1) + \lambda(-33,18,10) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

- 9) La recta L pasa por el punto A(2,1,5) y además intercepta y es perpendicular a la recta $L_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}$. Determinar la ecuación de la recta L.

Rpta. $L = \{(2,1,5) + t(28,-11,-20) / t \in \mathbb{R}\}$

- 10) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de AB donde A(-5,-4,4) y B(3,-2,-4) y que corta a la recta $L_1 = \{(1,1,1) + t(-3,-8,-3) / t \in \mathbb{R}\}$

Rpta. $L = \{(-1,-3,0) + \lambda(1,4,2) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

- 11) Determinar la distancia más corta entre las rectas $L_1: 2x = y = z$, $L_2: x = y = 26 + z$

Rpta. $d(L_1, L_2) = 13\sqrt{2}u$

- 12) Sean las rectas $L_1 = \{(5,1,2) + t(2,0,2) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(3,2,1) + \lambda(2,1,0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Hallar un punto que equidista de ambas rectas una distancia mínima.

Rpta. $P(\frac{13}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

- 13) Una recta L_1 pasa por los puntos A(2,1,-1) y B(5,-1,3) y otra recta L_2 pasa por los puntos C(-4,2,-6) y corta perpendicularmente a L_1 . Hallar la ecuación de L_2 .

Rpta. $L_2 = \{(-4,2,-6) + t(2,11,-7) / t \in \mathbb{R}\}$

- 14) Hallar la ecuación vectorial de la recta que intercepta un ángulo recto a las rectas $L_1 = \{(3,4,3) + t(2,2,3) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(1,6,-1) + \lambda(-1,2,0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

Rpta. $L = \{(1,6,-1) + t(-2,-1,2) / t \in \mathbb{R}\}$

- 15) Dado los vértices de un triángulo A(1,-2,-4), B(3,1,-3) y C(5,1,-7). Hallar las ecuaciones paramétricas de la altura bajada desde el vértice B al lado opuesto.

Rpta. $x = 3t + 3$, $y = 15t + 1$, $z = 19t - 3$

- 16) Hallar la ecuación vectorial de una recta que pasa por el punto A(2,1,-1) y corta a las rectas $L_1 = \{(1,1,1) + t(2,4,5) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2: \text{eje } x$.

Rpta. $L = \{(2,1,-1) + t(13,8,-8) / t \in \mathbb{R}\}$

- 17 Dado los vértices de un triángulo $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$ y $C(-5, 14, -3)$. Hallar las ecuaciones canónicas de la bisectriz del ángulo interno del vértice B.

$$\text{Rpta. } L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+7}{-8}$$

- 18 Dados los vértices de un triángulo $A(2, -1, -3)$, $B(5, 2, -7)$ y $C(-7, 11, 6)$. Hallar las ecuaciones canónicas de la bisectriz del ángulo externo al vértice A.

$$\text{Rpta. } L: \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$$

- 19 Hallar una recta L que intercepta a las rectas $L_1 = \{(2, 1, -1) + t(3, 4, 0) / t \in R\}$ y $L_2 = \{(1, 1, 2) + t(-4, 3, 0) / t \in R\}$ formando un ángulo $\theta = \arctg \sqrt{2}$ con cada una de ellas.

$$\text{Rpta. } L_1 = \left\{ \left(\frac{61}{25}, \frac{73}{25}, -1 \right) + t(1, -7, 5) / t \in R \right\}, L_2 = \left\{ \left(\frac{61}{25}, \frac{73}{27}, -1 \right) + \lambda(-1, 7, 5) / \lambda \in R \right\}$$

- 20 Encontrar la longitud del cordel que se necesita para llegar desde el punto $P(8, 6, 5)$ hasta una vara recta de madera que pasa por los puntos $A(3, 5, 3)$ y $B(8, 3, 1)$.

$$\text{Rpta. } d(P, L) = \sqrt{\frac{629}{33}}$$

- 21 Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $M(1, 0, 2)$ que es ortogonal a la recta $L_1 = \{(1 + 2t, 5t, 1 + t) / t \in R\}$ y que se corta con la recta

$$L_2: \frac{x-2}{5} = \frac{2-y}{2} = \frac{z}{-3} \quad \text{Rpta. } L = \{(1, 0, 2) + t(53, -14, -36) / t \in R\}$$

- 22 Las rectas L_1 y L_2 de vectores direccionales $(-3, 1, 2)$ y $(1, 2, 3)$ respectivamente, se interceptan en $(4, 1, 1)$. Hallar la recta (ó rectas) L_3 que al interceptar a las dos primeras, determinan un triángulo isósceles con base en L_3 y cuya área es $6\sqrt{19} u^2$.

- 23 Hallar la recta L que pasa por el punto $A(5, 0, 0)$ que corta al eje y en un punto B de tal modo que forma con el origen un triángulo de área $30 u^2$.

$$\text{Rpta. } L = \{(5, 0, 0) + t(-5, \pm 12, 0) / t \in R\}$$

- 24 Hallar las ecuaciones paramétricas de la perpendicular común a las rectas, dadas por las ecuaciones $L_1: x = 3t - 7, y = -2t + 4, z = 3t + 4$ y $L_2: x = t + 1, y = 2t - 9, z = -t - 12$.

$$\text{Rpta. } L: x = 2t - 5, y = -3t + 1, z = -4t$$

- 25 Una recta que pasa por el punto $A(1, 2, 3)$, haciendo un ángulo de 30° con el eje X y 60° con el eje Y . Hallar su ecuación.

$$\text{Rpta. } L = \{(1, 2, 3) + t(\pm\sqrt{3}, 1, 0) / t \in R\}$$

- 26 Dados un punto A en la recta $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$ y un punto B en la recta

$$L_2 = \{(3, 0, 8) + t(1, 2, 5, 2) / t \in R\} \text{ que determinan un segmento } \overrightarrow{AB} \text{ que forma con la recta } L_1 \text{ un ángulo de } 30^\circ. \text{ Hallar la distancia de } A \text{ a } B.$$

$$\text{Rpta. } \|\overrightarrow{AB}\| = 10$$

- 27 Hallar la ecuación vectorial de la recta L , que intercepta a las rectas $L_1 = \{(1, -2, 5) + t(2, 3, -4) / t \in R\}$ y $L_2 = \{(-2, 1, -2) + \lambda(0, 1, 2) / \lambda \in R\}$ en ángulo recto.

$$\text{Rpta. } L = \left\{ \left(-\frac{9}{3}, -\frac{9}{2}, \frac{25}{3} \right) + t(-30, 197, -137) / t \in R \right\}$$

- 28 Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P_0(3, -3, 4)$ y que es ortogonal a cada una de las rectas $L_1 = \{(-2, 3, -2) + t(2, -1, 5) / t \in R\}$

$$\text{y } L_2: \frac{x-3}{1} = \frac{2y-7}{2} = \frac{3-z}{-3} \quad \text{Rpta. } x = 3 - 7t, y = -3 + 11t, z = 4 + 5t$$

- 29 Dadas las rectas L_1 que pasa por los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(5, 4, 5)$ y L_2 que pasa por los puntos $C(7, 4, 3)$ y $D(10, 8, 5)$.

- a) ¿Cuál es la menor distancia entre ambas rectas?
- b) ¿Calcular un vector ortogonal a ambas rectas cuya longitud sea igual a la distancia menor? **Rpta.** a) $d = \sqrt{6}u$, b) $\vec{a} = (-2, 1, 1)$
- 30) Determinar una recta L tal que con las rectas $L_1 = \{(2, 1, 4) + t(1, 1, 0) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(2 + \lambda, 1 + \lambda, 3 + \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Determine un triángulo de área $5u^2$.
Rpta. $L = \{(4, 3, 4) + t(1 \pm 5\sqrt{2}, -1 \pm 5\sqrt{2}, \pm 5\sqrt{2}) / t \in \mathbb{R}\}$
- 31) La unión consecutiva de los puntos A, B, C y D es un paralelogramo si las coordenadas de los tres primeros puntos son A(1, 2, 3), B(0, -1, 4), C(-1, 2, 6). Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos C y D.
Rpta. $L = \{(0, 5, 5) + t(-1, -3, 1) / t \in \mathbb{R}\}$
- 32) ¿Cuáles son los puntos de la recta $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$ tales que, junto con el punto (0, 0, 2) determinar un triángulo equilátero?
- 33) Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(0, 1, 1)$ y corta a las rectas $L_1 = \{(1, -2, 0) + t(1, 2, 1) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y, x = z\}$.
Rpta. $L = \{(0, 1, 1) + t(3, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$
- 34) Dadas las rectas $L_1 = \{(2 + t, 6 + 2t, 1) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(1, 6 + r, 1) / r \in \mathbb{R}\}$. Hallar la recta L que intercepta a L_1 y L_2 determinando un triángulo de una unidad cuadrada de área, si L pasa por el punto M(3, 2, 1).
Rpta. $L = \{(3, 2, 1) + t(-2, 5, 0) / t \in \mathbb{R}\}$
- 35) Dado el punto A(4, 3, 2), determinar dos puntos B y C de la recta $L = \{(2t, 3 - t) / t \in \mathbb{R}\}$ tal que con A sean los vértices de un triángulo isósceles de área igual a $6u^2$, si el lado desigual esta sobre la recta L .

- 36) Dado el punto A(4, 3, 2), determinar dos puntos B y C de la recta $L = \{(2, -2, 2) + t(3, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$, tales que con A, sean los vértices de un triángulo isósceles de arrea igual a $9\sqrt{22}$ unidades cuadradas, si el lado desigual esta sobre la recta L .
- 37) Dado el punto Q(6, 3, 2) y la recta $L = \{(1, -1, 4) + t(0, -1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$ determinar las rectas que pasa por Q y cortan a L formando un ángulo de 60° .
Rpta. $L_1 = \{(6, 3, 2) + t(-5, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}) / t \in \mathbb{R}\}$
 $L_2 = \{(6, 3, 2) + \lambda(-5, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}) / \lambda \in \mathbb{R}\}$
- 38) Las rectas $L_1 = \{(3, -2, 4) + t(0, 4, -4) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(1, -1, 2) + \lambda(-2, -1, 0) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $L_3 = \{(2, 6, -3) + \alpha(3, -5, 5) / \alpha \in \mathbb{R}\}$ contiene 3 aristas de un paralelepípedo. Encontrar cada uno de los otros vértices de este si (3, -2, 4) y (2, 6, -3) son dos de ellos. **Rpta.** (3, -2, 4), (2, 6, -3), (3, 0, 2), (5, 1, 2), (5, -1, 4), (0, 3, -1), (0, 5, -3), (2, 4, -1)
- 39) Hallar la ecuación de una recta perpendicular al plano XZ, que una las rectas $L_1 = \{(1, -1, 1) + t(2, -1, 4) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(1, 2, -3) + \lambda(-1, 4, 2) / \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Rpta. $L = \{(0, 6, -1) + t(0, 1, 0) / t \in \mathbb{R}\}$
- 40) Hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto A(3, 4, -5), corta a la recta $L_1 = \{(1, 3, -2) + t(4, 3, 2) / t \in \mathbb{R}\}$ y es perpendicular a la recta $L_2: \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{3}, z=5$.
- 41) Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1, 2, 3) y que intercepta perpendicularmente al segmento de extremos (2, 3, 4) y (-3, 2, 5).

- 42) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2,1,5)$ y es perpendicular a los vectores $(1,-1,2)$ y $(2,1,-1)$.
- 43) Determinar la ecuación de la recta que intercepta un ángulo recto a la recta $L_1 = \{(1,2,3) + t(2,1,-1) / t \in \mathbb{R}\}$ y que pasa por el punto $A(2,0,1)$.
- 44) Hallar el punto de intersección de las rectas si existen.
 a) $L_1: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z+1$, $L_2: \frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$
 b) $L_1: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z-3$, $L_2: \frac{x-3}{2} = y+5 = \frac{z+2}{4}$
- 45) Hallar la distancia entre las rectas $L_1: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $L_2: \frac{x-1}{-1} = y-4 = z+1$
- 46) Encontrar las ecuaciones de la recta que pasa por el origen, es perpendicular a la recta $x = y-5$, $z = 2y-3$, y que intercepta a la recta $y = 2x+1 \wedge z = x+2$.
Rpta. $L: \frac{x}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$
- 47) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(1,0,1)$ y corta a las rectas $L_1 = \{(-1,1,1) + t(2,0,1) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2: x-y+z=1$, $x+2y-z=0$
Rpta. $L = \{(1,0,1) + \lambda(-6,7,18) / \lambda \in \mathbb{R}\}$
- 48) Hallar una ecuación vectorial de la recta que pasa por $P(0,1,-2)$ y corta a las rectas $L_1 = \{(1,4,3) + t(1,3,0) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-y=3z \wedge 4-z=x\}$
Rpta. $L = \{(0,1,-2) + t(13,39,-7) / t \in \mathbb{R}\}$
- 49) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(3,1,2)$ y corta a las rectas $L_1 = \{(2,4,-1) + t(0,1,2) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2: x-y+z=4 \wedge 2x+z=6$
Rpta. $L = \{(0,2,6) + t(1,-1,-2) / t \in \mathbb{R}\}$

- 50) Hallar una ecuación vectorial de la recta L cuya ortogonal sobre el plano XY esta dado por $z = 0$, $x - 2y - 5 = 0$ y cuya proyección ortogonal sobre el plano YZ esta dado por $x = 0$, $y - z + 2 = 0$. **Rpta.** $L = \{(1,-2,0) + t(2,1,1) / t \in \mathbb{R}\}$
- 51) Sean las rectas $L_1: x-y+z-5=0 \wedge x-3y+6=0$; $L_2: 2y+z-5=0 \wedge 4x-2y+5z-7=0$. Demostrar que $L_1 // L_2$.
- 52) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(1,6,-5)$ y es perpendicular a cada una de las rectas.
 $L_1: 3x-2y+3z+9=0 \wedge x+y-2z+13=0$;
 $L_2: 2x+2y-5z+10=0 \wedge x-y-z+3=0$
Rpta. $L = \{(1,6,-5) + t(-21,19,-30) / t \in \mathbb{R}\}$
- 53) Encontrar la distancia perpendicular del punto $P(-1,3,1)$ a la recta $x-2z=1$, $y=1$.
Rpta. $d(P,L) = \frac{3\sqrt{10}}{5}$
- 54) Hallar la distancia del punto $P(6,-3,3)$ a la recta $L: 2x+2y+z=0 \wedge 4x-y-3z-5=0$
Rpta. $d(P,L) = 3$
- 55) Las rectas $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-2y=3, z=2\}$, $L_2 = \{A + t(3,-5,5) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x=3, y+z=2\}$ contiene aristas de un paralelepípedo, uno de cuyos vértices es $A(2,4,-1)$ encontrar sus otros vértices y su superficie lateral.
Rpta. a) $(3,0,2), (5,-1,4), (0,5,-3), (5,1,2), (0,3,-1), (2,6,-3), (3,-2,4)$
 b) $(2\sqrt{294} + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{6})u^2$

- 56 Demostrar que la condición, según la cual las dos rectas $L_1: \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{m_2} = \frac{z-c_1}{m_3}$ y $L_2: \frac{x-a_2}{n_1} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{n_3}$ están situadas en un plano, se puede expresar de la forma:
- $$\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0$$

- 57 Halle el punto de intersección de la recta: $L: x = 4 + 5t, y = -1 + t, z = 4 - t$ y el plano $3x - y + 7z + 8 = 0$.
Rpta. $P(-31, -8, 11)$

- 58 Hallar la distancia mas corta entre las dos rectas cruzadas $L_1: \begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$; $L_2: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$
Rpta. $d(L_1, L_2) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

- 59 Hallar la distancia del punto $P(-1, 2, 3)$ a la recta: $L: \frac{x-7}{6} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{3}$
Rpta. $d(P, L) = 7$

- 60 Hallar la distancia mas corta entre las dos rectas que se cruzan $L_1 = \{(1, -2, 3) + t(2, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$; $L_2: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$
Rpta. $d(L_1, L_2) = \frac{17}{5}\sqrt{3}$

- 61 Hallar la distancia del punto $P(7, 7, 4)$ a la recta: $L: \begin{cases} 6x + 2y + z - 4 = 0 \\ 6x + y - 2z - 10 = 0 \end{cases}$
Rpta. $d(P, L) = 11$

- 62 Hallar la proyección del punto $P(2, -1, 3)$ sobre la recta $L: \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$
Rpta. $Q(3, -2, 4)$

- 63 Demostrar que la recta $L: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}, -\infty < t < \infty$

- a) Esta en el plano $6x + 4y - 4z = 0$
b) Es paralela al plano $5x - 3y + 3z = 1$ y esta debajo de él.
c) Es paralela al plano $6x + 2y - 2z = 3$ y esta arriba de él.

- 64 Un plano pasa por el punto $(3, 1, -1)$, es perpendicular al plano, $2x - 2y + z + 4 = 0$ y su intersección con el eje z es -3 . Hallar su ecuación.
Rpta. $\pi: 5x + y - 8z = 24$

- 65 Hallar la ecuación del plano que pasa por el recta $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$, y es perpendicular al plano $\pi: 2x + y + 2z + 4 = 0$.
Rpta. $P: 2y - z = 0$

- 66 Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos extremos de los vectores $\vec{a} = (2, -3, -1)$, $\vec{b} = (0, -1, 4)$, $\vec{c} = (2, 1, -3)$ si los vectores tienen su origen en el punto $p(1, 0, 3)$.
Rpta. $\pi: 6x + y + 2z = 19$

- 67 Hallar la ecuación del plano determinado por la recta $L: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{-1}$ y el punto $p(4, -3, 2)$.
Rpta. $\pi: x - 9y - 17z + 3 = 0$

- 68 Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1, 0, -1)$ y $B(2, 0, 2)$ y forma un ángulo de 60° con el plano $2x - 2y + z + 6 = 0$.
Rpta. $\pi: 21x + (40 - 3\sqrt{170})y - 7z = 28$

$$\pi_1: 21x + (40 + 3\sqrt{170})y - 7z = 28$$

- (69) Hallar la ecuación de cada plano que contiene intercepto x en 2, intercepto y en 3, y se halla a las distancia de $\frac{6}{7}$ del origen. **Rpta. P:** $3x + 2y \pm 6z = 6$
- (70) Encontrar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(-2,5,3)$ y $B(4,8,-8)$ y es perpendicular al plano XZ . **Rpta. P:** $11x + 6z + 4 = 0$
- (71) Determinar los puntos de intersección y el ángulo que forman los planos $\pi_1: 4x + 3y + z = 0$; $\pi_2: x + y - z = 15$
- (72) Calcular la distancia del punto $p(6,-3,3)$ a la recta: $L: \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 4x - y - 3z - 15 = 0 \end{cases}$
- (73) Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $p(3,2,-1)$ y que corta a las rectas. $L_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ y $L_2: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$
- (74) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de \overline{AB} y corta bajo un ángulo de 60° a la recta que pasa por M y N donde $A(2,4,0)$, $B(0,0,-2)$, $M(3,3,3)$, $N(-1,3,3)$.
- (75) Desde el foco $F(0,0,10)$ se lanza un rayo luminoso el cual se refleja en el espejo plano π de ecuación $x + y + z = 1$. Hallar la dirección con la cual se lanzó el rayo, si el rayo reflejado pasa por el punto $G(2,3,15)$.
- (76) Halle la ecuación del plano que contenga a la recta $x - 3 = -(y + 5) = -(z + 2)$ y el punto $(5,0,-4)$. **Rpta. P:** $x + z = 1$
- (77) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,2,-4)$ y es paralelo cada una de las rectas $L_1: x + y - z + 11 = 0 \wedge x - y + 2z - 7 = 0$ y $L_2: 2x - 3y - 2z + 8 = 0 \wedge x + 2y + z - 9 = 0$ **Rpta. P:** $29x + 9y + z - 72 = 0$

- (78) Un rayo de luz se dirige por la recta $L = \{(2-t, -t, 1) / t \in \mathbb{R}\}$ al chocar con el espejo plano $\pi: 2x - y + z + 2 = 0$, se refleja. Hallar la recta L_1 en la cual está el rayo reflejado. **Rpta.** $L_1 = \{(-5, -7, 1) + \lambda(1, 4, 1) / \lambda \in \mathbb{R}\}$
- (79) Hallar una ecuación del plano que pasa por el punto $A(1, -1, 4)$ y es ortogonal a cada uno de los planos $P_1: 2x + y - z + 2 = 0$ y $P_2: x - y + 3z - 1 = 0$. **Rpta. P:** $2x - 7y - 3z + 3 = 0$
- (80) Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano XY y que pasa por los puntos $A(1, 5, -3)$ y $B(-5, -4, 11)$. **Rpta. P:** $3x - 2y + 7 = 0$
- (81) Dado el plano $\pi_1: x - y + 2z = 2$ que representa un espejo, al cual incide un rayo luminoso que sigue la trayectoria de la recta $L_1 = \{(0, 2, 0) + t(1, 1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$. Hallar el punto de intercepción de la recta L_2 que contiene al rayo reflejado con el plano $\pi: 2x + y + z = 16$.
- (82) El radio vector normal a un plano tiene una longitud de 5 unidades y dos de sus ángulos directores son $\alpha = 45^\circ$ y $\beta = 60^\circ$. Hallar la ecuación del plano si este pasa por el extremo de su radio vector normal. **Rpta.** $\pi_1: \sqrt{2}x + y + z - 10 = 0$
 $\pi_2: \sqrt{2}x + y - z - 10 = 0$
- (83) El volumen del tetraedro formado por un cierto plano y los planos coordenados es $12u^3$. Hallar la ecuación del plano, sabiendo que es paralelo al plano cuya ecuación es $3x + 2y + 4z + 6 = 0$. **Rpta. P:** $3x + 2y + 4z \pm 12 = 0$
- (84) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $L: x = y = 2z$ y que además pasa por el punto $A(0, 1, 0)$. **Rpta. P:** $2x - z = 0$
- (85) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $A(-2, 3, 1)$ y es ortogonal a los dos planos. $P_1: 3x + 2y - z = 1$ y $P_2: 2x - 5y + 4z = 7$ **Rpta.** $3x - 14y - 19z + 67 = 0$

- 86** Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(1,2,-4)$, $B(4,-3,2)$ y $C(-4,5,10)$. **Rpta.** $P: 11x + 9y + 2z - 21 = 0$
- 87** Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(2,0,-1)$, $B(0,2,5)$ y es ortogonal al plano $3x + y - z = 7$. **Rpta.** $P: x - 2y + z = 1$
- 88** Hallar la recta L que es paralela a los planos $P_1: 3x + 12y - 3z = 5$ y $P_2: 3x - 4y + 9z = -7$ y que corta a las rectas $L_1: \frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $L_2: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$. **Rpta.** $L = \{(-3, -1, 2) + t(-8, 3, 4) / t \in \mathbb{R}\}$
- 89** El pie de la perpendicular trazada desde el origen al plano P es el punto $A(1,-2,1)$. Hallar la ecuación del plano P . **Rpta.** $P: x - 2y + z = 6$
- 90** Encontrar la ecuación de un plano que pasa por el punto $A(1,-2,1)$ y es perpendicular al vector \overrightarrow{OA} , siendo O el origen de coordenadas. **Rpta.** $P: x - 2y + z = 6$
- 91** Hallar la ecuación vectorial de un plano P . Sabiendo que la recta $L = \{(1,1,1) + t(0,1,1) / t \in \mathbb{R}\}$ está contenida en el plano P y que el ángulo que forma el plano P con el plano $\pi: 3x - y - z = 0$ es 60° . **Rpta.** $P: (22,5,-5) \cdot [(x,y,z) - (1,1,1)] = 0$; $P': (-22,5,-5) \cdot [(x,y,z) - (1,1,1)] = 0$
- 92** Hallar la proyección ortogonal de la recta $L = \{(1+t, 1-2t, 2+3t) / t \in \mathbb{R}\}$ sobre el plano $\pi: x - 2y + 3z = 33$. **Rpta.** $P_L \text{ o } y_\pi L = (3, -3, 8)$
- 93** Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x - y + 2z = 5$ y $8x + 2y - z = 3$ y que contiene al origen. **Rpta.** $\pi: 31x + 13y - 11z = 0$
- 94** Dos rectas $L_1 = \{(3,4,3) + t(-2,0,1) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(1,-24,-3) + t(1,-2,1) / t \in \mathbb{R}\}$ son paralelas a un plano P y están en lados opuestos respecto al plano. Hallar el plano P si se sabe que $d(L_1, P) = d(L_2, P) = 3$

- 95** Un plano pasa por el punto $A(5,-1,3)$ y dos de sus ángulos directores de su normal son $\alpha = 60^\circ$ y $\beta = 45^\circ$. Hallar la ecuación del plano. **Rpta.** $\pi_1: x + \sqrt{2}y + z - 8 + \sqrt{2} = 0$ ó $\pi_2: x + \sqrt{2}y + z - 2 + \sqrt{2} = 0$
- 96** Hallar la distancia del punto p al plano π donde.
 a) $p(15,-22,10)$, $\pi: x + 10y + 4z + 15 = 0$ **Rpta.** $d(p, \pi) = \frac{50\sqrt{13}}{13}$
 b) $p(-10,-10,5)$, $\pi: x + 2y - 3z = 18$ **Rpta.** $d(p, \pi) = \frac{63}{14}\sqrt{14}$
 c) $p(3,-2,5)$, $\pi: 2x - y + z = 0$ d) $p(1,1,5)$, $\pi: 2x + 3y - 2z = 4$
- 97** Dados los puntos $A(3,5,1)$, $B(-1,1,3)$ y $C(2,4,1)$ del triángulo ABC , donde G es el centro de gravedad de dicho triángulo y G es la proyección ortogonal de R sobre el triángulo ABC . Si $\|\overrightarrow{GR}\| = 6\sqrt{2}$. Hallar la proyección ortogonal de G sobre el plano BCR . **Rpta.** $(\frac{3}{5}, 3, -\frac{1}{5})$
- 98** Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,3,0)$ y $(4,0,0)$ y forma un ángulo de 30° con el plano $x + y + z - 1 = 0$. **Rpta.** $\pi: 4x + 4y + z - 16 = 0$
- 99** Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $L_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{4}$ y es paralela a la recta $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+7}{5}$. **Rpta.** $P: 7x + 6y + z - 4 = 0$
- 100** Un cubo tiene dos de sus caras en los planos $P_1: 2x + 6y + 3z - 12 = 0$ y $P_2: 6x + 18y + 9z + 6 = 0$. Hallar su área total y su volumen. **Rpta.** $A_t = 24u^2$, $V = 8u^3$

- 101** Sean los puntos A(2,3,4) y B(3,1,6) y el plano P: $x + y - 4z = 3$. Hallar un plano π que pasa por A y B y que forma con el plano P un ángulo de 45° .

Rpta. $\pi: 2x - y - 2z = -7$

- 102** Hallar la ecuación del plano π paralelo al plano $\pi_1: x + 3y - 2z + 14 = 0$ y tal que la suma de sus interceptos con los ejes coordenadas sea igual a 5.

Rpta. $\pi: x + 3y - 2z - 6 = 0$

- 103** Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta L: $x - y - 1 = 0$ \wedge $x + y + z = 2$ y que es ortogonal al plano de coordenada XZ.

Rpta. $\pi: 2x + z = 3$

- 104** Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $x = 2t + 1$, $y = -3t + 2$, $z = 2t - 3$ y por el punto A(2,-2,1)

Rpta. $\pi: 4x + 6y + 5z = 1$

- 105** Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ y es paralela a la recta $L_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$. **Rpta.** $\pi: 2x - 2y - z + 1 = 0$

- 106** Hallar la ecuación del plano P que contiene a la recta $L: \begin{cases} x + y + 3z - 7 = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $P_1: 2x + y - 2z + 1 = 0$.

Rpta. $P: 19x + 16y + 27z = 70$

- 107** Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto de coordenadas A(2,-1,1) y es perpendicular a los dos planos $2x - z + 1 = 0$, $y = 0$ **Rpta.** $P: x + 2z - 4 = 0$

- 108** Determinar la ecuación de una recta que sea paralela a los planos $P: x + z - 4 = 0$ y $Q: x + y = 2$ e intercepta a las rectas $L_1 = \{t(1,0,1) / t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2 = \{(0,1,0) + \lambda(0,0,3) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ **Rpta.** $L = \{(1,0,1) + t(1,-1,1) / t \in \mathbb{R}\}$

- 109** Tres vértices de un tetraedro regular se encuentra sobre el plano $\pi: 5x - 7y + z + 2 = 0$ y el cuarto vértice sobre la recta $L = \{(1+t, 2+t, -3+2t) / t \in \mathbb{R}\}$. Hallar el volumen de dicho tetraedro. **Rpta.** $V = \frac{1}{3}u^3$

- 110** Dados los puntos A(1,2,3), B(4,5,6) y C(7,8,8). Hallar el conjunto M de puntos O de \mathbb{R}^3 tal que A,B,C y P sean los vértices de un tetraedro de volumen igual a 6 unidades cuadradas. **Rpta.** $M: x - y + 13 = 0$ ó $M: x - y - 11 = 0$

- 111** Hallar la ecuación del plano P que pasa por los puntos A(-2,-3,5) y B(4,6,-10) y que es perpendicular al plano XZ. **Rpta.** $P: 5x + 2z = 0$

- 112** Hallar las ecuaciones de cada uno de los planos que se hallan a 2 unidades del origen y tiene una normal que hace un ángulo de 60° con ambos eje X, eje Y.

Rpta. $x + y + \sqrt{2}z = -4$; $x + y - \sqrt{2}z = -4$

$x + y - \sqrt{2}z = 4$; $x + y + \sqrt{2}z = 4$

- 113** Determinar bajo que dirección debe ser lanzada rectilíneamente una partícula desde el punto A(2,2,3) hacia la recta $L = \{(0, 1 + r, -r) / r \in \mathbb{R}\}$ para que la alcance al cabo de 2 segundos, siendo su velocidad $V = \sqrt{3}u / \text{seg}$.

Rpta. $\vec{AB} = (-2, -2, -2)$

- 114** Una partícula comienza a moverse en la dirección en el punto A(15,-22,10) y se mueve con una velocidad constante $\vec{V} = (1,1,1)$ ¿Cuánto tarda la partícula en alcanzar al plano $\pi: x + 10y + 4z = -15$? **Rpta.** $t = 10 \text{ seg}$.

- 115** ¿En qué dirección debería moverse la partícula del problema anterior para alcanzar el plano en tiempo mínimo? si el módulo de la velocidad es el mismo del problema anterior ¿Cuál es el tiempo mínimo?

Rpta. $(1,10,4)$, $t_m = \frac{50}{39}\sqrt{39} \text{ seg}$.

- 116 Hallar el ángulo entre la recta de intersección de los planos $3x + y + 3z = 5$; $x - y + z = 2$ y la recta de intersección de los planos $8x - y + 7z = 3$; $x - y + z = 2$

Rpta. $\theta = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{172}}\right)$

- 117 Determinar una ecuación de la recta L que satisfaga a la vez las condiciones siguientes:

i) Esta contenido en el plano P determinado por los puntos $p_0(0,0,0)$, $p_1(2,2,0)$ y $p_2(0,1,-2)$.

ii) Sea perpendicular a la recta $L_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = 2z$.

iii) Para por $P \cap L_1$. Rpta. $L = \left\{ \left(-\frac{21}{5}, -\frac{19}{5}, -\frac{4}{5} \right) + t(2, -3, 10) / t \in R \right\}$

- 118 Demostrar que la intersección de la recta $L = \{Q_0 + t \cdot \vec{a} / t \in R\}$ y el plano

$$\pi: (p - p_0) \cdot \vec{N} = 0, \text{ es el punto } A(Q_0 + \frac{(p_0 - Q_0) \cdot \vec{N}}{\vec{a} \cdot \vec{N}}) \vec{a}.$$

- 119 Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $A(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela a los dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ se puede expresar

en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

- 120 Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se puede expresar en la

forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

- 121 Demostrar que la ecuación del plano que pasa por tres puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$ se puede expresar en la forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- 122 Demostrar que la ecuación del plano que pasa por el punto $p_0(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular a los dos planos $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ se puede representar en la forma siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0$$

- 123 Demostrar que la ecuación del plano que pasa por la recta $L: x = x_0 + ta$, $y = y_0 + tb$, $z = z_0 + tc$ y por el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ se puede expresar en la

forma:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

- 124 Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(1,3,2)$, es paralelo al plano $\pi = \{(1,4,0) + t(1,1,1) + \lambda(0,1,2) / t, \lambda \in R\}$ y forma un ángulo de 60° con la recta $L_1 = \{(1,-2,3) + t(1,0,1) / t \in R\}$.

Rpta. $L = \{(1,3,-2) + t(3 \pm 2\sqrt{2}, 2 \pm \sqrt{2}, 1) / t \in R\}$

- 125 Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $(1,3,0)$ y $(4,0,0)$ y que forma un ángulo de 30° con el plano $x + y + z - 1 = 0$.

- 126 Hallar en el eje x un punto equidistante de los dos planos $\pi_1: 12x - 16y + 15z + 1 = 0$ y $\pi_2: 2x + 2y - z - 1 = 0$
- 127 Hallar un punto C del plano $\pi: x - y + z - 3 = 0$, tal que con los puntos $A(2,1,1)$ y $B(1,6,4)$ sean los vértices de un triángulo equilátero.
- 128 Hallar la ecuación general del plano que contiene a la recta $L: \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$ y es ortogonal al plano $2x + y - z - 3 = 0$.
Rpta. $4x - 7y + z - 9 = 0$
- 129 Hallar la ecuación del plano paralelo al plano $2x - y + 2z + 4 = 0$ sabiendo que el punto $(3,2,-1)$ equidista de ambos planos. **Rpta.** $2x - y + 2z - 8 = 0$
- 130 Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3,4,-6)$ y es paralelo a los planos $x + 2y - z = 4$, $3x - y + 2z = -6$.
Rpta. $L = \{(3,4,-6) + t(-3,5,7) / t \in \mathbb{R}\}$
- 131 Hallar la ecuación de la proyección de la recta $L: \begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ sobre el plano $P: 3x + y + 3z - 1 = 0$
- 132 Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos P_1 y P_2 donde $P_1: 3x + 10y + 5z + 6 = 0$, $P_2: x + 4y + 3z + 4 = 0$ y sea paralela a la recta $L = \{(1,5,-1) + t(3,2,-3) / t \in \mathbb{R}\}$.
- 133 Determinar la ecuación vectorial de la recta que sea paralela a los planos $P_1: x + z - 4 = 0$ y $P_2: x + y = 2$ e intercepta a las rectas $L_1: \{t(1,0,1) + t \in \mathbb{R}\}$ y $L_2: \{(0,1,0) + \lambda(0,0,3) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

- 134 La proyección ortogonal de la recta L sobre el plano $P_1: x - 2y - 3z = 0$ es la recta $L_1: \{(1+5t, 2+t, t-1) / t \in \mathbb{R}\}$ y la proyección ortogonal de L sobre el plano $P_2: x + y + 2z = 6$ es la recta $L_2: \{(1+t, 1+t, 2-t) / t \in \mathbb{R}\}$. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta L .
- 135 Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(2,6,1)$ y contiene a la recta $L: \frac{x}{3} = \frac{z}{8}; y = -5$. **Rpta.** $88x - 13y - 65 = 0$
- 136 Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por $(3,4,1)$ y es perpendicular a los planos $x - y = 4$, $x + z = 6$. **Rpta.** $x + y - z - 6 = 0$
- 137 Hallar las ecuaciones de los planos paralelos que cortan en ángulo recto a los planos $P_1: x + z - 2 = 0$ y $P_2: x - y + 3 = 0$. Sabiendo que uno de ellos pasa por el punto $p(1,1,1)$ y el punto $q(2,-1,2)$ equidistan de ambos.
- 138 Hallar la ecuaciones del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $P_1: x + y - z = 0$, $P_2: x + 2y + z + 6 = 0$ y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $A(1,-1,1)$ y $B(2,1,2)$.
- 139 Dadas las rectas $L_1 = \{(3,4,5) + t(0,1,-2) / t \in \mathbb{R}\}$, $L_2 = \{(4,-2,1) + \lambda(1,2,3) / \lambda \in \mathbb{R}\}$ y $L_3 = \{(0,0,0) + \beta(2,1,0) / \beta \in \mathbb{R}\}$. Hallar la ecuación cartesiana de un plano que corta a estas rectas en los puntos A, B y C respectivamente de tal modo $\overline{AB} = \overline{BC}$, se sabe además que estos puntos están alineados y que al plano solicitado es paralelo a la recta $x = y = z$. **Rpta.** $19x - 20y + z - 81 = 0$
- 140 Encontrar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $2x - y - 5z = 4$ y $3x + y - z = 0$ y es paralelo al plano $12x - y - 17z = 14$
Rpta. $12x - y - 17z = 6$

- 141 Hallar la ecuación del plano P que pasa por los puntos $A(-1,2,0)$ y $B(3,-1,2)$ y que forma ángulo $\theta = \arccos(-\frac{1}{2})$ con el plano $P_1: x+y-4=0$.
- 142 La distancia del punto $Q(1,0,3)$ del plano P es 3. Si P pasa por la recta $L: \begin{cases} 5x-6y+2z+15=0 \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$. Hallar la ecuación del plano P .
- 143 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $M(3,0,1)$ y forma un ángulo de 60° con la intersección de los planos $P_1: 2x+y-2z-2=0$, $P_2: \{(3,2,2)+t(1,2,2)+\lambda(2,1,1)/t,\lambda \in R\}$.
- 144 Dadas las rectas no coplanares concurrentes en $0(1,-2,3)$ $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$, $L_2: \frac{x-1}{3} = \frac{3-z}{-4}$, $y = -2$, $L_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{2}$. Hallar la ecuación de un plano que pasa por el punto $M(-4,2,6)$ y forma ángulos iguales con estas rectas. **Rpta.** $3x - y - z + 20$
- 145 Hallar la ecuación del plano π que pasa por $A(1,4,-2)$, es paralela a la recta $L = \{(2,6,5)+t(1,-2,0)/t \in R\}$ y tal que la distancia de π a L sea igual a 1.
- 146 Consideremos las rectas $L_1: x = -1; \frac{3-y}{1} = \frac{z+3}{1}$ y $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{3-y}{1} = \frac{z-1}{1}$ de modo que L es una recta que corta ortogonalmente a L_1 y L_2 ; si π_1 es el plano que determina L_2 y L ; π_2 es el plano que determina L_2 y L . Determinar el ángulo formado por π_1 y π_2 .
- 147 Dados los planos $\pi_1: 3x+2y+5z+1=0$, $\pi_2: x-y+z+4=0$ y $\pi_3: 2x+3y-z-13=0$ y las rectas $L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{1}$, $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$. Determinar la ecuación del plano que pasa punto de intersección de dichos plano y es paralelo a ambas rectas.

- 148 Si $L = \{(t-1, 2-t, 0)/t \in R\}$ y $P: x+z-1=0$ un plano. Hallar la recta L_1 , contenida en P , tal que $\angle(L, L_1) = 60^\circ$.
- 149 Encontrar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $2x-y-5z=4$ y $3x+y-z=0$ y paralelo al plano $12x-y-17z=4$. **Rpta.** $12x - y - 17z = 12$
- 150 Hallar la ecuación del plano que pasa a través de la recta $L = \{(1,8,1)+t(1,-3,1)/t \in R\}$ y forma un ángulo de 60° con el plano $2x-y+z=7$. **Rpta.** $x+y+2z=11$; $11x+2y-5z-22=0$
- 151 Un rayo de luz parte del punto $(1,4,2)$ se refleja en el espejo plano YZ , este rayo reflejado, se refleja nuevamente en el espejo plano YZ y este último rayo reflejado pasa por $(5,1,4)$. Hallar la ecuación de este ultimo rayo reflejado. **Rpta.** $L = \{(\frac{19}{5}, 0, \frac{18}{5})+t(6,5,2)/t \in R\}$
- 152 Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por el punto $M(3,-2,-4)$ paralelamente al plano $\pi: 3x-2y-3z-7=0$ y que corta a la recta $L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. **Rpta.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+4}{9}$
- 153 La recta $L: \begin{cases} x-2z-3=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$, intercepta al plano $x+3y-z+4=0$, encontrar el punto de intersección p y encontrar la ecuación de la recta en éste plano que pasa por p y es perpendicular a L . **Rpta.** $(1,-2,-1)$, $\frac{x-1}{-5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$
- 154 Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de $L_1 = \{(9,5,4)+t(1,1,2)/t \in R\}$ y $L_2 = \{(1,2,3)+\lambda(2,1,1)/\lambda \in R\}$ siendo la distancia del plano al origen igual a $\sqrt{234}$ unidades. **Rpta.** $11(x-11)+7(x-7)+8(x-8)=0$

- 155 Un hombre se encuentra en $O(0,0,0)$, lanza una flecha desde $A(0,0,16)$ hacia un blanco en $B(50,12,16)$ que se encuentra sobre el plano $25x - 6y - 1178 = 0$, haciendo impacto a 0.1 unidades del blanco. Si la flecha fue lanzada con una trayectoria paralela al plano XY , hallar el ángulo que debió girar el hombre para no fallar.

Rpta. 3.62°

- 156 Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto $Q(3,-5,2)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $2x + 3y - z - 5 = 0$, $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

Rpta. $4x - 5y - 7z - 23 = 0$

- 157 Una puerta rotatoria de un centro comercial consta de dos planos $P_1: 5x + 3y - z - 9 = 0$ y $P_2: 3x - 2y + 5z - 6 = 0$, se quiere aumentar un plano mas a la puerta, tal que pase por la recta de intersección de ambos planos y que sea paralelo este plano a la columna que describe la ecuación de la recta $L_1 = \{(3,1,6) + t(1,1,0) / t \in \mathbb{R}\}$. Hallar la ecuación de dicho plano.

Rpta. $19x - 19y + 41z - 39 = 0$

- 158 Hallar la ecuación de una recta que pasa por $(3,1,2)$ y corta a las rectas

$$L_1 = \{(2,4,-1) + t(0,1,2) / t \in \mathbb{R}\}, \quad L_2 = \begin{cases} x - y + z = 4 \\ 2x + z = 6 \end{cases}$$

Rpta. $L = \{(3,1,2) + t(-1,10,11) / t \in \mathbb{R}\}$

- 159 Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al plano $2x + 3y - 5z = 0$, contiene al origen, y es paralelo a la recta que pasa por los puntos $(1,-1,3)$ y $(2,1,-2)$.

Rpta. $5x - 5y - z = 0$

- 160 Hallar una recta en el plano determinado por los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,2,0)$ y $C(0,1,-2)$ y que corta ortogonalmente a la recta $L: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = 2z$.

- 161 Dados los puntos $A(1,-3,4)$, $B(3,-2,2)$ y el plano $\pi: 2x - 2y + z = 12$. Hallar los puntos C y D del plano π tal que A,B,C y D son los vértices consecutivos de un cuadrado.

- 162 Hallar las ecuaciones de las proyecciones de la recta $L: \begin{cases} 5x - 4y - 2z = 5 \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ sobre el plano $P: 2x - y + z - 1 = 0$

- 163 Hallar la ecuación del plano que contiene a las siguientes rectas que se interceptan $L_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{3}$, $L_2: \begin{cases} 3x + 2y + z = -2 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$

Rpta. $4x + 7y - 3z + 7 = 0$

- 164 Cuáles son los puntos B y C de la recta $L: \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$ tales que junto con el punto $A(3,-2,4)$ determinan un triángulo equilátero.

- 165 Un rayo de luz parte un punto $(2,1,6)$, se refleja en el espejo plano XZ , este rayo reflejado se refleja nuevamente en el plano YZ , y este ultimo rayo reflejado pasa por $(3,8,2)$. Hallar la ecuación de este ultimo rayo reflejado.

Rpta. $L = \{(0, \frac{13}{5}, \frac{22}{5}) + t(5,9,-4) / t \in \mathbb{R}\}$

- 166 Dadas las rectas $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{5-z}{4}$, $L_2: x = -2, \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$ que se cruzan. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(-1,-2,0)$ que sea perpendicular a L_1 (en el espacio) y corte a L_2 .

Rpta. $L = \{(-1,-2,0) + t(-1,6,4) / t \in \mathbb{R}\}$

- 167 Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta $L: x - y - 1 = 0$, $x + y + z - 2 = 0$ y que es ortogonal al plano coordenado XZ .

- 168 Por el punto $A(1,0,1)$ se traza una perpendicular al plano $P: 2x + y - z = 7$. Si B es el pie de dicha perpendicular, determinar un punto C , en la recta: $L = \{(-1,1,0) + t(0,1,5) / t \in \mathbb{R}\}$ de modo que el volumen del tetraedro cuyos vértices son A,B,C y D , es igual a $4u^3$. D es el punto de intersección de la recta L con el plano P .

Rpta. $c_1(-1,0,-5)$ ó $c_2(-1,-\frac{3}{2},-\frac{25}{2})$

- 169 Una puerta rotatoria de un centro comercial consta de dos planos $P_1: 5x + 3y - z - 9 = 0$ y $P_2: 3x - 2y + 5z - 6 = 0$. Se quiere aumentar un plano mas a la puerta, tal que pase por la recta de intersección de ambos planos y que sea paralelo este plano a la columna que describe la ecuación de la recta $L_1 = \{(3,1,6) + t(1,1,0) / t \in \mathbb{R}\}$. Hallar la ecuación de dicho plano.

Rpta. $19x - 19y + 41z - 39 = 0$

- 170 Una partícula comienza a moverse en el $A(15, -22, 10)$ y se mueve con una velocidad constante $v = (1, 1, 1)$. ¿Cuanto tarda la partícula en alcanzar al plano: $x + 10y + 4z = -15$?

Rpta. $t = 10$ seg.

- 171 ¿En que dirección debería moverse la partícula del problema anterior para alcanzar el plano en tiempo mínimo? si el módulo de la velocidad es el mismo que en el problema anterior. ¿Cual es el tiempo mínimo?

Rpta. $\vec{a} = (1, 10, 4), t_m = \frac{50}{39} \sqrt{39}$ seg.

- 172 Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $P = (3, 2, -1)$ y que corta a las rectas: $L_1: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ y $L_2: \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

- 173 Dados los planos $\pi_1: 3x + 2y + 5z + 1 = 0$, $\pi_2: x - y + z + 4 = 0$, $\pi_3: 2x + 3y - z - 13 = 0$ y las rectas $L_1: \frac{x-5}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z}{1}$; $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{z-1}{3} = \frac{z}{4}$. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto de intersección de dicho planos y es paralelo a ambas rectas.

Rpta. $5x - 4y + 3z + 13 = 0$

- 174 Se tiene dos túneles que parten de la superficie (Suponer que la superficie es lisa y es el plano XY) desde los puntos $p_{1A}(0, 5, 2, 0)$ y $p_{1B}(5, 2, 0)$ y llegan respectivamente, a los puntos $p_{2A}(-7, -1, -7)$ y $p_{2B}(-5, 3, -5)$. Hallar la mínima distancia que debe tener un túnel que debe quedar a nivel (paralelo al plano XY) y va a servir para interconectar a los túneles A y B. **Rpta.** $d = 2.457$

- 175 La unión consecutiva de los puntos A, B, C y D es un paralelogramo. Si las coordenadas de los tres puntos son $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 4)$, $C(-1, 2, 6)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos C y D.

Rpta. $L = \{(0, 5, 5) + t(-1, -3, 1) / t \in \mathbb{R}\}$

- 176 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -3, -4)$ y que intercepta en los ejes coordenados segmentos de igual magnitud y diferente de cero.

Rpta. $P: x + y + z + 5 = 0$

- 177 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M(3, -1, 4)$ y también por la recta de intersección de los planos $x + 2y - z = 4$; $2x - 3y + z = 6$.

Rpta. $3x - y - 10 = 0$

- 178 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x + y - 2z + 2 = 0$ y $x - 3y - z + 3 = 0$ y es perpendicular al plano XY.

Rpta. $x + 7y - 4 = 0$

- 179 Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $2x - y - 5z = 4$; $3x + y - z = 0$ y es paralelo al plano $12x - y - 17z + 14 = 0$.

Rpta. $12x - y - 17z - 12 = 0$

- 180 Hallar la ecuación de una recta que pasa por el punto $P(3, 4, -6)$ y es paralelo a los planos $x + 2y - z = 4$; $3x - y + 2z = -6$.

Rpta. $L = \{(3, 4, -6) + t(3, -5, -7) / t \in \mathbb{R}\}$

- 181 Determinar la proyección de la recta $L = \{(1, -2, 1) + t(1, -1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$ sobre el plano $\pi: 4x + 2y - 2z - 1 = 0$. **Rpta.** $L_\pi = \{(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{3}{4}) + t(1, -1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$

- 182 Hallar la proyección de la recta $L = \{(1, 2, -1) + t(2, 1, -1) / t \in \mathbb{R}\}$ sobre el plano $\pi: x + y - z - 8 = 0$. **Rpta.** $L_\pi = \{(3, 3, -2) + t(2, -1, 1) / t \in \mathbb{R}\}$

- 183 Un plano es paralelo al plano $P: 2x + 2y + z - 1 = 0$ y el punto $(2, 2, 2)$ es equidistante de ambos planos, hállese la ecuación del plano.

Rpta. $\pi: 2x + 2y + z - 19 = 0$

- 184 Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $M(1, 2, -3)$ y es paralelo a las

rectas $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3}$, $L_2: \frac{x+5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$.

Rpta. $9x + 11y + 5z - 16 = 0$

- 185 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $L: \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = 2t - 3 \end{cases}$ y por el punto $M(2, -2, 1)$.

Rpta. $4x + 6y + 5z - 1 = 0$

- 186 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $L: \begin{cases} 2x + y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ y es paralelo al segmento limitado por los puntos $P_1(2, 5, -3)$ y $P_2(3, -2, 2)$.

Rpta. $9x + 7y + 8z + 7 = 0$

- 187 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $L_1: \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 2t + 3 \\ z = -t - 2 \end{cases}$ y es paralelo a la recta $L_2: \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 5 = 0 \end{cases}$.

Rpta. $13x - 14y + 11z + 51 = 0$

- 188 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$ y es perpendicular al plano $P: 3x + 2y - z - 5 = 0$.

Rpta. $\pi: x - 8y - 13z + 9 = 0$

- 189 Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $3x + 2y + z - 3 = 0$, $x - 2z = 0$ y es perpendicular al plano $x + 2y + z + 5 = 0$.

Rpta. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

- 190 Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $x - y + z = 4$, $2x + y - 2z = 6$ y por el origen. **Rpta.** $x + 5y - 7z = 0$

- 191 Hallar la ecuación cartesiana de un plano que contenga a la recta $L = (1, 2, -3) + t(1, -4, 2) / t \in \mathbb{R}$ y se encuentra a una distancia de $\frac{8}{\sqrt{41}}$ unidades del punto $P(2, -4, -5)$. **Rpta.** $6x + 2y + z = 7$; $30x + 2y - 11z = 67$

CAPÍTULO II

2. CONCEPTOS BÁSICOS.-

2.1. PRODUCTO DE DOS CONJUNTOS.-

Sean X, Y dos conjuntos cualquiera, llamaremos producto cartesiano de X por Y al conjunto denotado por $X \times Y$ y definido así:

$$X \times Y = \{(x, y) / x \in X \wedge y \in Y\}$$

2.2. PROPIEDADES DEL PRODUCTO DE DOS CONJUNTOS.-

- | | |
|--|--|
| ① $A \times B \neq B \times A$ | ② $A \times \phi = \phi \times A = \phi$ |
| ③ $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$ | ④ $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$ |
| ⑤ $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$ | ⑥ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ |
| ⑦ Si $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C, \forall C$ | |
| ⑧ Si $A \subset C$ y $B \subset D \Rightarrow A \times B \subset C \times D$ | |

2.3. RELACIÓN BINARIA.-

Dados X, Y dos conjuntos; diremos que R es una relación binaria de X en Y , si y solo si, R es un subconjunto de $X \times Y$.

2.4. APLICACIÓN DE X EN Y .-

Diremos que f es una aplicación ó función de X en Y , si y solo si, para cada $x \in X$, existe un único $y \in Y$, tal que $y = f(x)$.

NOTACIÓN.- A la aplicación f de X en Y denotaremos por: $f: X \rightarrow Y$, donde $D_f = X$.

Ejemplo.- $f: [-4, 4] \rightarrow [0, 4]$ tal que $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

2.5. CLASES DE FUNCIONES.-

Sea $f: X \rightarrow Y$, una función, entonces:

a) f es inyectiva, si y sólo si se cumple:

$$x_1, x_2 \in X \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

b) f es suryectiva, si y sólo si para todo $y \in Y$, $\exists x \in X$ tal que $y = f(x)$.

c) f es biyectiva si y sólo si, es inyectiva y suryectiva.

2.6. CONJUNTO IMAGEN Y CONJUNTO IMAGEN INVERSA.-

i) **DEFINICIÓN.-** Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y $A \subset X$ llamaremos imagen de A según f al conjunto denotado por:

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} \subset Y$$

Que viene a ser el conjunto de todas las imágenes correspondientes a los elementos del conjunto $A \subset D_f = X$.

ii) **PROPIEDADES DEL CONJUNTO IMAGEN.-**

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y A, B subconjuntos del dominio X entonces:

$$\textcircled{1} A \subset X, B \subset X, A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

$$\textcircled{2} A \subset X, B \subset X \Rightarrow f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\textcircled{3} \quad A \subset X, B \subset X \Rightarrow f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$$

la igualdad se cumple cuando f es inyectiva.

$$\textcircled{4} \quad A \subset X, B \subset X \Rightarrow f(A) - f(B) \subseteq f(A - B)$$

la igualdad se cumple cuando f es inyectiva.

iii) **DEFINICIÓN.-** Sea $f: X \rightarrow Y$ y $B \subset Y$, llamaremos pre-imagen o imagen inversa de B según f , al conjunto denotado por:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D_f / f(x) \in B\}$$

Que viene a ser el conjunto de contra imagen correspondiente a elementos del conjunto $B \subset Y$.

iv) **PROPIEDADES DE LA IMAGEN INVERSA DE UN CONJUNTO.-**

Sea $f: X \rightarrow Y$ una función y $A \subset Y$, $B \subset Y$ entonces:

$$\textcircled{1} \quad \text{Si } A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$$

$$\textcircled{2} \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$\textcircled{3} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$\textcircled{4} \quad f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))'$$

$$\textcircled{5} \quad f^{-1}(A - B) = f^{-1}(A) - f^{-1}(B)$$

2.7. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.-

Sean $f: X \rightarrow Y$, y $g: Y \rightarrow W$, dos funciones, llamaremos función composición de g con f o f seguido de g , a la función denotada por $\text{gof}: X \rightarrow W$, tal que:

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in D_{\text{gof}}$$

2.8. LEYES DE COMPOSICIÓN INTERNA Y EXTERNA.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea $A \neq \emptyset$, un conjunto, llamaremos ley de composición interna definida en A , a toda aplicación de $A \times A$ en A .

es decir:

$$\begin{aligned} F: A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &\rightarrow F(a, b) = aFb \end{aligned}$$

b) **DEFINICIÓN.-** Sea A , k dos conjuntos (k se denomina conjunto de operadores o escalares).

Llamaremos ley de composición externa definida en A y con operadores en k , a toda aplicación de $k \times A$ en A , es decir:

$$\begin{aligned} \bullet: k \times A &\rightarrow A \\ (\lambda, a) &\rightarrow \bullet(\lambda a) = \lambda \bullet a \end{aligned}$$

2.9. CAMPO O CUERPO.-

A un conjunto $k \neq \emptyset$ le llamaremos campo o cuerpo si en k están definidas dos leyes de composición interna (suma y producto) y además verifican las siguientes propiedades.

1ra. Suma: $+: k \times k \rightarrow k$

$$(a, b) \rightarrow +(a, b) = a + b$$

i) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in k$, conmutativa.

ii) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in k$, asociativa

iii) Existe $0 \in k$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in k$ "0" es llamado el elemento nulo o cero.

- iv) $\forall a \in k, \exists -a \in k$, llamado opuesto o inverso aditivo tal que:
 $a + (-a) = (-a) + a = 0$

2do. Producto: $\cdot : k \times k \rightarrow k$

$$(a, b) \rightarrow a \cdot b = a \cdot b$$

- i) $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in k$, conmutativa.
 ii) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \forall a, b, c \in k$, asociativa.
 iii) Existe $1 \in k$ llamado elemento identidad tal que: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in k$.
 iv) $\forall a \in k, a \neq 0$, existe un elemento a^{-1} llamado el inverso de a , tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.
 v) Propiedad distributiva del producto respecto a la suma.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad - \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Ejemplo.- Son campos o cuerpos los conjuntos siguientes:

R = conjunto de los números reales.

Q = conjunto de los números racionales.

C = conjunto de los números complejos.

Ejemplo.- Consideremos el conjunto siguiente:

$Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Q\}$. Demostrar que $(Q(\sqrt{2}), +, \cdot)$ es un cuerpo.

Demostración

Primero definiremos las operaciones siguientes:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2}$$

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}$$

probaremos solamente la parte iv) del producto que es $\forall a \in k, \exists a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$, los demás axiomas son inmediatos de verificar.

Sea $a + b\sqrt{2} \neq 0, (b \neq 0)$ debemos probar que existe $c + d\sqrt{2}$ tal que $(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = 1$

$$\text{Pero } (a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} = 1$$

$$\text{De donde } \begin{cases} ac + 2bd = 1 & \dots (1) \\ bc + ad = 0 & \dots (2) \end{cases}$$

De (1) y (2) despejamos c , es decir: $c = \frac{1 - 2bd}{a}, c = -\frac{ad}{b}$ de donde

$$\frac{1 - 2bd}{a} = -\frac{ad}{b} \Rightarrow b - 2b^2d = -a^2d$$

$$(2b^2 - a^2)d = b \quad \text{de donde } d = \frac{b}{2b^2 - a^2}, c = -\frac{a}{2b^2 - a^2}$$

$$\text{Luego } c + d\sqrt{2} = -\frac{a}{2b^2 - a^2} + \frac{b}{2b^2 - a^2}\sqrt{2}$$

$\therefore Q(\sqrt{2})$ es un campo.

Ejercicio.-

- ① El conjunto $Z(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in Z\}$ con las operaciones de adición y multiplicación definidas en el ejemplo anterior no es un campo.

- ② Dado el conjunto $Q(\sqrt{-5}) = \{a + b\sqrt{-5} / a, b \in Q\}$. Probar que es un cuerpo con las operaciones de C .
- ③ Si α es una raíz de la ecuación $x^2 + x + 2 = 0$ entonces $Q(\alpha) = \{a + b\alpha / a, b \in Q\}$, es un cuerpo.
- ④ Sea $\alpha = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$, probar que el conjunto $Q(\alpha) = \{a + b\alpha / a, b \in Q\}$, es un cuerpo.

CAPÍTULO III

3. ESPACIOS VECTORIALES.-

3.1. DEFINICIÓN.-

Sean $V \neq \emptyset$ un conjunto, k un campo y dos operaciones una de suma (+) y la otra de producto (.), entonces diremos que el objeto $(V, +, k, .)$ es un espacio vectorial si se verifican las siguientes condiciones.

A) EXISTE UNA APLICACIÓN SUMA.

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (x, y) &\rightarrow +(x, y) = x + y \end{aligned}$$

Llamado ley de composición interna (la suma de dos vectores es un vector) y cumple los axiomas siguientes:

$$A_1.- \quad x + y = y + x, \quad \forall x, y \in V \text{ axioma conmutativa.}$$

$$A_2.- \quad x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in V, \text{ axioma asociativa.}$$

$$A_3.- \quad \forall x \in V, \text{ existe } 0 \in V \text{ tal que } x + 0 = 0 + x = x \text{ donde "0" se denomina elemento neutro aditivo o cero.}$$

$$A_4.- \quad \forall x \in V, \text{ existe } -x \in V, \text{ tal que } x + (-x) = (-x) + x = 0, \text{ donde } -x \text{ se denomina opuesto de } x.$$

B) EXISTE UNA APLICACIÓN PRODUCTO.-

$$\begin{aligned} \cdot : k \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, x) &\rightarrow \cdot(\lambda, x) = \lambda x \end{aligned}$$

Llamado ley de composición externa (el producto de un escalar por un vector es un vector) y cumple con los axiomas siguientes:

$$B_1.- \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x, \alpha, \beta \in k$$

$$B_2.- (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in V, \alpha, \beta \in k$$

$$B_3.- \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in V, \alpha \in k$$

$$B_4.- \forall x \in V, \text{ existe } 1 \in k \text{ elemento idéntico multiplicativo tal que } 1 \cdot x = x.$$

OBSERVACIÓN.-

- ① Los elementos de V se llaman vectores y los elementos de k se llaman escalares.
- ② Como V está definido sobre los elementos de k , se dice que V es un k espacio vectorial.
- ③ Si $k = \mathbb{R}$, V se llama espacio vectorial real.
- ④ Si $k = \mathbb{C}$, V se llama espacio vectorial complejo.
- ⑤ Un conjunto $V \neq \emptyset$ para que sea un espacio vectorial sobre un campo k debe tener definidas dos operaciones "suma" y "multiplicación por un escalar" y que cumple las ocho axiomas mencionados, en caso que no cumpla con alguno de dichas axiomas no es un espacio vectorial.
- ⑥ Al conjunto de los polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes complejos denotaremos por $k[x]$ es decir:

$$k[x] = \{P(x) / P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0; a_i \in k = \mathbb{C}\}$$

3.2. EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES.-

- ① El conjunto $V = \mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto de \mathbb{R} es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
- ② El conjunto $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ y $k = \mathbb{R}$ (el cuerpo) con la suma de pares ordenados $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ y el producto por un escalar: $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
- ③ En \mathbb{R}^2 cualquier recta que pase por el origen, es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
Por ejemplo el conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - 2y = 0\}$ con las operaciones de suma y producto de un escalar con las de \mathbb{R}^2 .
- ④ El conjunto $V = \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) / x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones de un escalar por un elemento de \mathbb{R}^3 es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
- ⑤ En \mathbb{R}^3 cualquier plano que pasa por el origen es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .
Por ejemplo $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$
- ⑥ El conjunto $V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. Con las operaciones usuales de suma, es decir:
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
y el producto por un escalar $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- 7 En el conjunto $V = R^2$, definimos las siguientes operaciones:

$$(a,b) + (c,d) = (b+d, a+c)$$

$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

comprobar que $(V, +, R, \cdot)$ no es un espacio vectorial.

En efecto: i) Si $u, v \in V \Rightarrow u = (a,b), v = (c,d)$

Probaremos que $u + v = v + u, \forall u, v \in V$

$$u + v = (a,b) + (c,d) = (b+d, a+c) = (d+b, c+a)$$

$$= (c,d) + (a,b) = v + u \text{ se cumple}$$

ii) Si $u, v, w \in V \Rightarrow u = (a,b), v = (c,d), w = (e,f)$

$$u + (v + w) = (u + v) + w$$

$$u + (v + w) = (a,b) + [(c,d) + (e,f)] = (a,b) + (d+f, c+e)$$

$$= (b+c+e, a+d+f) \quad \dots (1)$$

$$(u+v)+w = [(a,b) + (c,d)] + (e,f) = (b+d, a+c) + (e,f)$$

$$= (a+c+f, b+d+e) \quad \dots (2)$$

de (1) y (2) se tiene: $u + (v + w) \neq (u + v) + w$

por lo tanto $(V, +, R, \cdot)$ no es un espacio vectorial

- 8 El conjunto $V = \{(x,y) \in R^2 / x+y \leq 1\}$, no es un espacio vectorial con las operaciones de R^2 en este caso falla el opuesto, pues $(3,-9) \in V$ sin embargo $-(3,-9) = (-3,9) \notin V$ puesto que $-3+9 \neq 1$.

- 9 El conjunto R no es un espacio vectorial sobre $k = C$, pues si $z \in C$ y $a \in R$ entonces $az \notin R$, es decir no es una ley de composición externa.

- 10 Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales,

$$P[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, n \in N, a_0, a_1, \dots, a_n \in R\} \text{ es un}$$

espacio de suma y producto por un escalar del álgebra elemental.

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \text{ donde}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ y } q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_n x^n$$

Solución

Ahora probaremos las axiomas

1ro. La suma de polinomios es conmutativa.

Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ dos elementos de $P[x]$

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \dots + (b_n + a_n)x^n = q(x) + p(x)$$

2do. La suma de polinomios es asociativa

Consideremos polinomios de $P[x]$

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

$$p_3(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

$$(p_1(x) + (p_2(x) + p_3(x))) = (p_1(x) + p_2(x)) + p_3(x) \text{ se verifica.}$$

3er. Elemento neutro para la suma.

El elemento neutro es el polinomio nulo $q(x) = 0$, puesto que para cualquier $p(x) \in P[x]$ se verifica que: $p(x) + q(x) = p(x) + 0 = p(x)$

4to. El elemento opuesto para la suma.

Dado cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ de $P[x]$ se verifica que el polinomio $p(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_nx^n$ es su elemento opuesto, puesto que $p(x) + p(x) = q(x) = 0$

5to. El producto por un escalar verifica la propiedad distributiva respecto a la suma de polinomios.

Es decir: Si $p_1(x), p_2(x) \in P[x]$ y $\alpha \in R$

$$\alpha[P_1(x) + P_2(x)] = \alpha P_1(x) + \alpha P_2(x)$$

6to. La propiedad distributiva respecto de la suma de escalares.

Es decir: $\alpha, \beta \in R$ y $p(x) \in P[x]$.

$$(\alpha + \beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x) \text{ puesto que}$$

$$(\alpha + \beta)p(x) = (\alpha + \beta)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$$

$$\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + \beta(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$$

$$= \alpha p(x) + \beta p(x)$$

7mo. El producto de un escalar verifica la propiedad asociativa.

Es decir: si $\alpha, \beta \in R$ y $p(x) \in P[x]$

$$(\alpha\beta)p(x) = (\alpha\beta)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)$$

$$= \alpha[\beta a_0 + \beta a_1x + \beta a_2x^2 + \dots + \beta a_nx^n] = \alpha(\beta p(x))$$

8vo. Existe un elemento unidad $1 \in R$, tal que $1 \cdot p(x) = p(x)$ para todo polinomio $p(x)$ de $P[x]$ con lo cual se ha probado que el conjunto $P[x]$ de polinomios de coeficientes reales es un espacio vectorial sobre R .

3.3. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES.-

Sea $(V, +, R, \cdot)$ un espacio vectorial, entonces se tiene:

i) El elemento "0" de la propiedad A_3 es único.

Demostración

Supongamos $\exists \theta' \in V$ tal que $\theta' + u = u$, $\forall u, v \in V$

Por la propiedad A_3 tenemos que: $u + \theta = u$, $\forall u \in V$

Se cumple: $\left. \begin{array}{l} \theta + \theta' = \theta \\ \theta' + \theta = \theta \end{array} \right\}$ pues $\theta, \theta' \in V$ son elementos neutros de V .

Y por la propiedad conmutativa se cumple:

$$\theta' = \theta + \theta' = \theta' + \theta = \theta \Rightarrow \theta' = \theta \text{ por lo tanto "0" es único.}$$

ii) El producto del escalar 0 por cualquier vector es el vector nulo, es decir:

$\forall u \in V$ se tiene $0 \cdot u = \theta$.

Demostración

$0 \cdot u + u = 0 \cdot u + 1 \cdot u = (0 + 1)u = 1 \cdot u = u$; sumando $(-u)$ a cada miembro tenemos:

$(0 \cdot u + u) + (-u) = u + (-u)$, por la propiedad asociativa tenemos:

$0 \cdot u + (u + (-u)) = u + (-u)$, por lo tanto: $0 \cdot u + \theta = \theta$ de donde $0 \cdot u = \theta$.

iii) Si el producto de un escalar por un vector es el vector nulo entonces el escalar es "0" o el vector es nulo es decir: Si $\lambda x = \theta \Rightarrow \lambda = 0$ o $x = \theta$

Demostración

1er. caso) Suponiendo que $x \neq \theta$ y $\lambda x = \theta \Rightarrow \lambda = 0$

En efecto si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1} \cdot \lambda = 1, \forall \lambda \in k$

Si $\lambda x = \theta \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}\theta = \theta$

$\Rightarrow (\lambda^{-1} \lambda)x = \theta \Rightarrow 1 \cdot x = \theta \Rightarrow x = \theta$

lo cual es una contradicción entonces $\lambda = 0$ puesto que $x \neq \theta$.

2do. caso) Suponiendo que $\lambda \neq 0$ y $\lambda x = \theta \Rightarrow x = \theta$

en efecto si $\lambda \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda^{-1} \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}\theta$

$\Rightarrow (\lambda^{-1} \lambda)x = \theta \Rightarrow 1 \cdot x = \theta \Rightarrow x = \theta$

iv) El opuesto de cualquier escalar por un vector es igual al opuesto de su producto es decir: si $\lambda \in k, x \in V, (-\lambda)x = -(\lambda x)$

Demostración

Teniendo en cuenta A_4 de 2.1., la suma de opuesto en k y B_4 de 2.1 se tiene:

$$-(\lambda x) + \lambda x = \theta = 0, x = (-\lambda + \lambda)x$$

$$-(\lambda x) + \lambda x = (-\lambda)x + \lambda x \Rightarrow -(\lambda x) = (-\lambda)x$$

$$\text{por lo tanto } (-\lambda)x = -(\lambda x)$$

3.4. ESPACIO VECTORIAL DE FUNCIONES.

Al conjunto de todas las funciones f con dominio un conjunto $X \neq \emptyset$ y rango un cuerpo k , denotaremos por k^X , es decir:

$$k^X = \{f / f: X \rightarrow k\}$$

un elemento que pertenece a k^X es una función $f: X \rightarrow k$ ahora en k^X definimos la suma de funciones y el producto de un escalar por funciones.

i) Si $f, g \in k^X$ entonces $f+g: X \rightarrow k$ es tal que $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$

ii) Si $\lambda \in k$ y $f \in k^X$, entonces $\lambda f: X \rightarrow k$ es tal que: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in X$

Luego el conjunto $(k^X, +, \cdot)$, provisto de dos operaciones suma (+) y producto (.) es un espacio vectorial sobre k , para esto probaremos los axiomas.

A_1 : Sean $f, g \in k^X \Rightarrow f, g: X \rightarrow k$ y $f+g: X \rightarrow k$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x), \forall x \in X$$

de donde $f+g = g+f$, pues $f(x), g(x) \in k = (R, Q, C)$ donde la adición es conmutativa.

A_2 : Sean $f, g, h \in k^X \Rightarrow f, g, h: X \rightarrow k$, por probar que $(f+g)+h = f+(g+h)$

$$\text{Sea } x \in X, [(f+g)+h](x) = [(f+g)(x)] + h(x)$$

$$= [f(x) + g(x)] + h(x), \forall x \in X \quad \dots (*)$$

$$[f+(g+h)](x) = f(x) + [(g+h)(x)] = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

$$\Rightarrow [f+(g+h)](x) = f(x) + [g(x) + h(x)], \forall x \in X \quad \dots (**)$$

como $f(x), g(x), h(x) \in k = (R, Q, C)$ entonces de (*) y (**) se tiene:

$$[(f+g)+h](x) = [f+(g+h)](x), \forall x \in X$$

$$\therefore (f+g)+h = f+(g+h)$$

A_3 : Sea "0" la función cero, $0: X \rightarrow k$ tal que $0(x) = 0, \forall x \in X$

$\Rightarrow \forall f \in k^X, f: X \rightarrow k$ se tiene:

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x), \forall x \in X$$

$$\Rightarrow (f+0)(x) = f(x), \forall x \in X$$

$$\Rightarrow f+0 = f \Rightarrow \forall f \in k^X, \exists f \in k^X / f+0 = f$$

A_4 : $\forall f \in k^X$ sea $-f: X \rightarrow k$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$

$$\Rightarrow [f+(-f)](x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x) \quad \forall x \in X$$

de donde se tiene: $f+(-f) = 0$

$$\therefore \forall f \in k^X, \exists (-f) \in k^X / f+(-f) = 0$$

B_1 : Sean $f, g \in k^X$ y $\lambda \in k \Rightarrow [\lambda(f+g)](x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x))$

$$\Rightarrow [\lambda(f+g)](x) = \lambda[f(x)+g(x)] \quad \dots (*)$$

$$(\lambda f + \lambda g)(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) \quad \dots (**)$$

$\lambda[f(x)+g(x)] = \lambda f(x) + \lambda g(x)$ pues $\lambda, f(x), g(x) \in k = (R, Q, C)$ la multiplicación es distributiva respecto a la adición \Rightarrow de (*) y (**) se tiene:

$$[\lambda(f+g)](x) = (\lambda f + \lambda g)(x), \quad \forall x \in X \quad \text{entonces} \quad \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$

B_2 : Sea $f \in k^X$ y $\lambda, \beta \in k$ entonces se tiene:

$$[(\lambda + \beta)f](x) = (\lambda + \beta)f(x) = \lambda f(x) + \beta f(x)$$

$$= (\lambda f)(x) + (\beta f)(x) = (\lambda f + \beta f)(x), \quad \forall x \in X$$

$$\text{entonces} \quad (\lambda + \beta)f = \lambda f + \beta f$$

B_3 : Sea $f \in k^X$ y $\lambda, \beta \in k$ entonces se tiene:

$$[(\lambda\beta)f](x) = (\lambda\beta)f(x) = \lambda(\beta f(x)) = \lambda(\beta f)(x) = [\lambda(\beta f)](x), \quad \forall x \in X$$

$$\text{entonces} \quad [(\lambda\beta)f](x) = [\lambda(\beta f)](x)$$

$$\therefore (\lambda\beta)f = \lambda(\beta f)$$

B_4 : Sea $f \in k^X$ y $1 \in k$ entonces $(1.f)(x) = 1.f(x) = f(x), \quad \forall x \in X$

entonces $1.f = f$ por lo tanto $V = k^X$ es un espacio vectorial sobre k .

CASOS PARTICULARES. $k^X = \{f/f: X \rightarrow k\}$

i) Si $X = R$ y $k = R \Rightarrow k^X = \{f/f: R \rightarrow R\}$ espacio vectorial sobre R .

ii) Si $X = [a, b]$ y $k = R \Rightarrow k^X = \{f/f: [a, b] \rightarrow R\}$ espacio vectorial sobre R .

iii) $X = R, k = R, f$ es continua, entonces

$k^X = \{f/f: R \rightarrow R \text{ es continua}\}$ espacio vectorial sobre R .

3.5. ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES $m \times n$.

a) **DEFINICIÓN.** Sean m, n enteros positivos fijos $X = \{(i, j) / 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ donde i, j son enteros y sea $k = R, k^X = \{f/f: X \rightarrow k\}$

Si $f \in k^X \Rightarrow f: X \rightarrow k$

$(i, j) \rightarrow f(i, j) = f_{ij}$; f es una matriz de orden $m \times n$ sobre R .

Casos particulares: $m = 3$, $n = 2$ entonces

$X = \{(i, j) / 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2\}$ i, j enteros

$\Rightarrow X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Si $f \in k^X \Rightarrow f: X \rightarrow k$

$(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = f_{11}$

$(1, 2) \rightarrow f(1, 2) = f_{12}$

$(2, 1) \rightarrow f(2, 1) = f_{21}$

$(2, 2) \rightarrow f(2, 2) = f_{22}$

$(3, 1) \rightarrow f(3, 1) = f_{31}$

$(3, 2) \rightarrow f(3, 2) = f_{32}$

Luego se tiene:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Ahora para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$ se tiene: $f =$

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

b) **IGUALDAD DE MATRICES.** Sea $f, g \in k^X$, entonces:

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix}$$

$f = g \Leftrightarrow f_{ij} = g_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

es decir: $f_{11} = g_{11}, f_{12} = g_{12}, \dots, f_{mn} = g_{mn}$

c) **SUMA DE MATRICES:**

$$f + g = \begin{bmatrix} f_{11} + g_{11} & f_{12} + g_{12} & \dots & f_{1n} + g_{1n} \\ f_{21} + g_{21} & f_{22} + g_{22} & \dots & f_{2n} + g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} + g_{m1} & f_{m2} + g_{m2} & \dots & f_{mn} + g_{mn} \end{bmatrix}$$

d) **MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ.**

Sean $f \in k^X$ y $\lambda \in k = R$ entonces

$$\lambda f = \begin{bmatrix} \lambda f_{11} & \lambda f_{12} & \dots & \lambda f_{1n} \\ \lambda f_{21} & \lambda f_{22} & \dots & \lambda f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda f_{m1} & \lambda f_{m2} & \dots & \lambda f_{mn} \end{bmatrix}$$

Luego el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre $k = R$ denotado por $k^{X \times Y} = R^{m \times n}$ está provisto de dos operaciones suma (+) y producto (\cdot).

Probaremos que $(k^{X \times Y}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $R = k$.

A_1 : Sea $f, g \in R^{X \times Y} \Rightarrow f, g: X \rightarrow R$ de donde

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix}$$

$$f + g = \begin{bmatrix} f_{11} + g_{11} & f_{12} + g_{12} & \dots & f_{1n} + g_{1n} \\ f_{21} + g_{21} & f_{22} + g_{22} & \dots & f_{2n} + g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} + g_{m1} & f_{m2} + g_{m2} & \dots & f_{mn} + g_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} + f_{11} & g_{12} + f_{12} & \dots & g_{1n} + f_{1n} \\ g_{21} + f_{21} & g_{22} + f_{22} & \dots & g_{2n} + f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} + f_{m1} & g_{m2} + f_{m2} & \dots & g_{mn} + f_{mn} \end{bmatrix} = g + f$$

por lo tanto $f + g = g + f$

A_2 : Sean $f, g, h \in R^{X \times Y} \Rightarrow f, g, h: X \rightarrow R$

$$f + (g + h) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_{11} + h_{11} & g_{12} + h_{12} & \dots & g_{1n} + h_{1n} \\ g_{21} + h_{21} & g_{22} + h_{22} & \dots & g_{2n} + h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} + h_{m1} & g_{m2} + h_{m2} & \dots & g_{mn} + h_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{11} + (g_{11} + h_{11}) & f_{12} + (g_{12} + h_{12}) & \dots & f_{1n} + (g_{1n} + h_{1n}) \\ f_{21} + (g_{21} + h_{21}) & f_{22} + (g_{22} + h_{22}) & \dots & f_{2n} + (g_{2n} + h_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} + (g_{m1} + h_{m1}) & f_{m2} + (g_{m2} + h_{m2}) & \dots & f_{mn} + (g_{mn} + h_{mn}) \end{bmatrix}$$

asociando los $f_{ij} + (g_{ij} + h_{ij})$ y descomponiendo como suma de dos matrices se tiene:

$$f + (g + h) = (f + g) + h$$

$$A_3$$
: Sea la matriz $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ tal que $\forall f \in R^{X \times Y}$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = f$$

$$\therefore \forall f \in R^X, \exists 0 \in R^X / f+0=f$$

$$A_4: \forall f \in R^X \text{ sea } -f = \begin{bmatrix} -f_{11} & -f_{12} & \dots & -f_{1n} \\ -f_{21} & -f_{22} & \dots & -f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_{m1} & -f_{m2} & \dots & -f_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$f+(-f) = \begin{bmatrix} f_{11}-f_{11} & f_{12}-f_{12} & \dots & f_{1n}-f_{1n} \\ f_{21}-f_{21} & f_{22}-f_{22} & \dots & f_{2n}-f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1}-f_{m1} & f_{m2}-f_{m2} & \dots & f_{mn}-f_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Luego } \forall f \in R^X, \exists -f \in R^X / f+(-f)=0$$

$$B_1: \text{ Sea } f \in R^X, \lambda, \beta \in R \text{ se tiene: } (\lambda\beta)f = \lambda(\beta f)$$

$$B_2: \text{ Sea } f \in R^X, \lambda, \beta \in R \text{ se tiene: } (\lambda + \beta)f = \lambda f + \beta f$$

$$B_3: \text{ Sean } f, g \in R^X, \lambda \in R \text{ se tiene } \lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$$

$$B_4: \forall f \in R^X, \exists I \in R^X \text{ tal que } fI = f$$

estas propiedades se prueban en forma similar a las primeras propiedades.

Por lo tanto se tiene que el conjunto de matrices R^X de orden $m \times n$ provisto de las dos operaciones de suma y producto es un espacio vectorial sobre R .

3.6. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1) Averiguar si los siguientes conjuntos son o no espacios vectoriales:

a) $V = \{(x, y) \in R^2 / x+y=1\}$ con las operaciones de R^2 .

b) $V = \{(x, y) \in R^2 / x \leq y\}$ con las operaciones de R^2 .

c) $W = \{(x, y) \in R^2 / x-y \in Z\}$ con las operaciones de R^2 .

d) $V = \{(t, 2t, e^t) / t \in R\}$ con las operaciones de R^3 .

e) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x+y=z\}$ con las operaciones de R^3 .

Rpta. a) No es espacio vectorial

b) No es espacio vectorial.

c) No es espacio vectorial

d) No es espacio vectorial

e) Es espacio vectorial

1) Sea $V = \{\lambda x + \beta e^x / \lambda, \beta \in R\}$, de donde $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ son funciones reales, probar que V es un espacio vectorial sobre R .

1) Sea V un espacio vectorial sobre k y F un sub-conjunto de k , demostrar que V también es un espacio vectorial sobre F .

1) Sean U y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo k . Sea $V = \{(u, w) / u \in U, w \in W\}$. Demostrar que: V es un espacio vectorial sobre k .

1) Probar que $V = \{(x, y, z) \in R^3 / -2x+3y-z=0\}$ es un espacio vectorial con las operaciones de R^3 .

- 6 Sean $V = R^2$, $k = R$, la adición definida en R^2 por $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ y el producto de un número real por un elemento de R^2 definido mediante $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$. Probar que $(R^2, +, R, \cdot)$ es un espacio vectorial.
- 7 Sean $V = R^2$, $k = R$, la adición en R^2 definida por $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ y el producto definido mediante $\lambda(a,b) = (a,a)$, averiguar si $(R^2, +, R, \cdot)$ es o no espacio vectorial.
- 8 Sea $V = R^2$ y $k = R$, la adición en R^2 definida por $(a,b) + (c,d) = (\frac{a}{2} + \frac{c}{2}, \frac{b}{2} + \frac{d}{2})$ y el producto definido mediante $\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$. Determinar si $(R^2, +, R, \cdot)$ es un espacio vectorial.
- 9 Considerando $V = R^R$ o sea el conjunto de las funciones reales con variable real y $k = R$, investigar si son espacios vectoriales sobre R los conjuntos siguientes:
- El conjunto de las funciones continuas.
 - El conjunto de las funciones derivables.
 - El conjunto de las funciones pares, o sea las funciones $f \in R^R$ tales que $f(x) = f(-x)$.
 - El conjunto de las funciones impares, es decir, las funciones $f \in R^R$ tales que $f(-x) = -f(x)$.
 - El conjunto de las funciones constantes.
 - El conjunto de las funciones positivas.

- 10 Probar que $V = \{A \in R^{2 \times 2} / T_r(A) = 0\}$ es un espacio vectorial con las operaciones de $R^{2 \times 2}$.
- 11 Probar que $V = \{A \in R^{2 \times 2} / A^t = -A\}$ es un espacio vectorial con las operaciones de $R^{2 \times 2}$.
- 12 Probar que $V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} / x, y, z \in R \right\}$ es un espacio vectorial con las operaciones de $R^{2 \times 2}$.
- 13 Probar que $V = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} / a, b, c \in R \right\}$ es un espacio vectorial con las operaciones de $R^{3 \times 3}$.
- 14 En cada uno de los conjuntos siguientes no son espacios vectoriales indicar las propiedades que no se cumplen:
- $V = \{(x, y) \in R^2 / y \leq 3\}$ con las operaciones de R^2 .
 - $V = \{(x, y) \in R^2 / xy = 0\}$ con las operaciones de R^2 .
 - $V = \{(x, y) \in R^2 / |x| + |y| \leq 1\}$ con las operaciones de R^2 .
- 15 Determinar si $(C^2, +, C, \cdot)$ es un espacio vectorial, definiendo $(Z_1, Z_2) + (Z_1, Z_2) = (Z_1 + Z_1, Z_2 + Z_2)$
 $Z(Z_1, Z_2) = (ZZ_1, ZZ_2)$
- 16 Si $V \subset R^n$ es un conjunto no vacío, probar que $V^\perp = \{u \in R^n / u \cdot v = 0, \text{ para todo } v \in V\}$ es un R -espacio vectorial.

3.7. SUB-ESPACIOS VECTORIALES.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial cualquiera, diremos que $W \neq \emptyset$, $W \subset V$ es un sub espacio vectorial de V si y sólo si $(W, +, k, \cdot)$ con las operaciones definidas por V es un espacio vectorial.

OBSERVACIÓN.-

- ① Fijado un espacio vectorial V , los subconjuntos \emptyset y V son subespacios llamados sub espacios triviales.
- ② Cualquier sub espacios diferente de los triviales se denomina sub espacio propio.
- ③ Un espacio vectorial tiene muchos sub espacios por ejemplo todas las rectas que pasan por el origen en el plano R^2 .
- ④ Para probar que un sub conjunto W de un espacio vectorial V sea un sub espacio es suficiente probar las operaciones de suma y producto, las demás axiomas definidas en V también se cumplen en W y esto veremos en el siguiente teorema.

b) **TEOREMA.-** Sean $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial, y $W \neq \emptyset$, $W \subset V$, diremos que $(W, +, k, \cdot)$ es un sub espacio vectorial de $(V, +, k, \cdot)$ si y sólo si:

$$\text{i)} \quad \forall x, y \in W \Rightarrow x + y \in W \quad \text{ii)} \quad \forall \lambda \in k, \forall x \in W \Rightarrow \lambda x \in W$$

Demostración

\Rightarrow) Si w es un sub-espacio de V entonces se cumple (i), (ii) esto es inmediato de verificar

\Leftarrow) Por hipótesis tenemos que si se cumple (i), (ii) probaremos que $(w, +, k, \cdot)$ es un espacio vectorial.

A_1 : $x + y = y + x$, $\forall x, y \in W$ esto se verifica, pues $x, y \in W \subset V$ y en V se cumple A_1 .

A_2 : $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in W$, esto se verifica pues $x, y, z \in W \subset V$ y en V se cumple A_2 .

A_3 : $\forall x \in W, \exists \theta \in W$ tal que $x + \theta = \theta + x = x$,

En efecto $x \in W \Rightarrow (-1)x = -x \in W$ por (ii) entonces $x + (-x) = \theta \in W$ por (i)

A_4 : $\forall x \in W, \exists (-x) \in W$ tal que $x + (-x) = \theta$ en virtud de (i), (ii).

En forma similar se puede verificar que $(W, +, k, \cdot)$ cumple las condiciones restantes de espacio vectorial.

c) EJEMPLO DE SUBESPACIOS VECTORIALES.-

① Sea $(R^3, +, R, \cdot)$ un espacio vectorial, averiguar ¿Cuál de los siguientes sub conjuntos son sub espacios vectoriales?

a) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y - z = 0\}$

Solución

i) $W \neq \emptyset$ puesto que $(1, -1, 1) \in W$ verificar $2(1) - 1 - 1 = 0$

ii) $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$

(por verificar)

$$\begin{aligned} \text{Si } \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) \in W \\ (x_2, y_2, z_2) \in W \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ 2x_2 + y_2 - z_2 = 0 \end{cases} \text{ sumando} \\ &2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = 0 \\ &\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W \\ &\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W \end{aligned}$$

iii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in W \Rightarrow \lambda(x, y, z) \in W$, por probar:

$$\text{Si } (x, y, z) \in W \Rightarrow 2x - y + z = 0$$

$$\lambda(2x - y + z) = \lambda(0)$$

$$2(\lambda x) - (\lambda y) + (\lambda z) = 0$$

$$(ii) \Rightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in W$$

$$\Rightarrow \lambda(x, y, z) \in W$$

Luego de (ii), (iii) se concluye que W es un sub espacio de \mathbb{R}^3 .

$$b) W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z\}$$

Solución

$$i) W \neq \emptyset \text{ pues } (1, 0, 1) \in W$$

$$ii) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$$

(por verificar)

$$\text{Si } \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) \in W \\ (x_2, y_2, z_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \end{cases} \text{ sumando}$$

$$x_1 + x_2 = z_1 + z_2$$

$$iii) \text{ Sea } \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in W \Rightarrow \lambda(x, y, z) \in W \text{ (por verificar)}$$

$$\text{Si } (x, y, z) \in W \Rightarrow x = z \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$$

$$iii) \text{ Sea } \lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in W \Rightarrow \lambda(x, y, z) \in W \text{ (por verificar)}$$

$$\text{Si } (x, y, z) \in W \Rightarrow x = z$$

$$\lambda x = \lambda z$$

$$\Rightarrow (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in W \Rightarrow \lambda(x, y, z) \in W$$

por lo tanto W es un sub espacio de \mathbb{R}^3 .

$$c) W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + 2\}$$

Solución

$$i) W \neq \emptyset \text{ puesto que } (1, 2, 3) \in W$$

$$ii) (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$$

(por verificar)

$$\text{Si } \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) \in W \\ (x_2, y_2, z_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = x_1 + 2 \\ z_2 = x_2 + 2 \end{cases} \text{ sumando}$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + 2 + 2$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \notin W$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \notin W$$

Por lo tanto W no es un sub espacio de \mathbb{R}^3 .

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |x| = |y|\}$

Solución

i) $W \neq \emptyset$ puesto que $(1, -1, 4) \in W$

ii) $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in W$

Si $\begin{cases} (x_1, y_1, z_1) \in W \\ (x_2, y_2, z_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_1| = |y_1| \\ |x_2| = |y_2| \end{cases}$ sumando

$$|x_1| + |x_2| = |y_1| + |y_2|$$

$|x_1 + x_2| \neq |y_1 + y_2|$ por desigualdad triangular

$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \notin W$ por definición de W

$\Rightarrow (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \notin W$

Por lo tanto W no es un sub espacio de \mathbb{R}^3 .

2

Sea $V = \mathbb{R}^2$ un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y $W = \{(x, y) / x \in \mathbb{Z}\}$ ¿ W es un sub espacio de V ?

Solución

i) $W \neq \emptyset$ puesto que $(2, a) \in W$, $a \in \mathbb{R}$

ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$ (por verificar)

Si $\begin{cases} (x_1, y_1) \in W \\ (x_2, y_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \in \mathbb{Z} \\ x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$
 $x_1 + x_2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$ por definición de W

$\Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$ se cumple

iii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in W \Rightarrow \lambda(x, y) \in W$ (por verificar)

Si $(x, y) \in W \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \lambda x \notin \mathbb{Z}$ por ejemplo $\lambda = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{2} \notin \mathbb{Z}$

Por lo tanto W no es un sub espacio de V .

1

Sea $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$ probar que W es un subespacio de V .

Solución

i) $W \neq \emptyset$ puesto que $(0, 0) \in W \Rightarrow 0 + 0 = 0$

ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$ (por comprobar)

Si $\begin{cases} (x_1, y_1) \in W \\ (x_2, y_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$ sumando

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$$

$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W$ por definición de W

$\Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$ se cumple

iii) $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in W \Rightarrow \lambda(x, y) \in W$

Si $(x, y) \in W \Rightarrow x + y = 0$

$\Rightarrow \lambda x + \lambda y = 0$

$\Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in W$ por definición de W

$\Rightarrow \lambda(x, y) \in W$

por lo tanto W es un subespacio de V .

- 4) Sea $V = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 3\}$ probar que W no es un subespacio de V .

Solución

- i) $W \neq \emptyset$ puesto que $(2, 1) \in W \Rightarrow 2 + 1 = 3$
 ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$ (por verificar)

$$\text{Si } \begin{cases} (x_1, y_1) \in W \\ (x_2, y_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 3 \\ x_2 + y_2 = 3 \end{cases} \text{ sumando}$$

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 6 \neq 3$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin W \text{ por definición de } W$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \notin W$$

por lo tanto W no es un subespacio de V .

- 5) Demostrar que el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

Solución

- i) $W \neq \emptyset$ puesto que $(0, 0) \in W$ ya que $0 = m(0) = 0$

- ii) $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in W \Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$

(por probar)

$$\text{Si } \begin{cases} (x_1, y_1) \in W \\ (x_2, y_2) \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = mx_1 \\ y_2 = mx_2 \end{cases} \text{ sumando}$$

$$y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in W \text{ por definición de } W$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in W$$

- iii) $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y) \in W \Rightarrow \lambda(x, y) \in W$ (por probar)

$$\text{Si } (x, y) \in W \Rightarrow y = mx$$

$$\Rightarrow \lambda y = m(\lambda x)$$

$$\Rightarrow (\lambda x, \lambda y) \in W \text{ por definición de } W$$

$$\Rightarrow \lambda(x, y) \in W$$

por lo tanto W es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

NOTA.- W geoméricamente es el conjunto de rectas en \mathbb{R}^2 que pasan por el origen de lo cual se puede afirmar que toda recta que pasa por el origen es un subespacio vectorial.

- 6) Sea $P[x]$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a tres, indicar si el conjunto $W = \{p \in P / p(2) = p(-2) = p(0) = 0\}$ es un subespacio de P .

Solución

- i) $W \neq \emptyset$ es inmediato

- ii) Si $p, q \in W \Rightarrow p + q \in W$ (por probar)

$$\text{Si } \begin{cases} p \in W \\ q \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(2) = p(-2) = p(0) = 0 \\ q(2) = q(-2) = q(0) = 0 \end{cases} \text{ sumando}$$

$$p(2) + q(2) = p(-2) + q(-2) = p(0) + q(0) = 0$$

$$(p + q)(2) = (p + q)(-2) = (p + q)(0) = 0$$

$$\Rightarrow p + q \in W \text{ por definición de } W$$

- iii) $\lambda \in \mathbb{R}, p \in W \Rightarrow \lambda p \in W$ (por probar)

$$\text{Si } p \in W \Rightarrow p(2) = p(-2) = p(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda p(2) = \lambda p(-2) = \lambda p(0) = \lambda 0$$

$$\Rightarrow (\lambda p)(0) = (\lambda p)(-2) = (\lambda p)(2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda p \in W \text{ por definición de } W.$$

por lo tanto W es un subespacio de P .

- 7) Sea $P[x]$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a tres, indicar si el conjunto $W = \{p \in P / p(0) = 1\}$ es un subespacio de $P[x]$.

Solución

i) $W \neq \emptyset$ es inmediato

ii) Si $p, q \in W \Rightarrow p + q \in W$ (por probar)

$$\text{Si } \begin{cases} p \in W \\ q \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(0) = 1 \\ q(0) = 1 \end{cases} \text{ sumando}$$

$$p(0) + q(0) = 2$$

$$(p + q)(0) = 2 \neq 1$$

$$\Rightarrow p + q \notin W \text{ por definición de } W$$

por lo tanto W no es un subespacio de $P[x]$.

- 8) Sea $V = F$ espacio vectorial de todas las funciones de variable real, averiguar si el conjunto definido por: $W = \{f \in F / f(a+b) = f(a) + f(b) \wedge f(\lambda a) = \lambda f(a)\}$ es un subespacio de V .

Solución

i) $W \neq \emptyset$ puesto que la función cero pertenece a W

ii) $f, g \in W \Rightarrow f + g \in W$ (por probar)

$$\text{Si } \begin{cases} f \in W \\ g \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a+b) = f(a) + f(b) \\ g(a+b) = g(a) + g(b) \end{cases} \wedge \begin{cases} f(\lambda a) = \lambda f(a) \\ g(\lambda a) = \lambda g(a) \end{cases} \text{ sumando}$$

$$f(a+b) + g(a+b) = (f(a)+g(a)) + (f(b)+g(b)) \wedge f(\lambda a) + g(\lambda a) = \lambda f(a) + \lambda g(a)$$

$$(f+g)(a+b) = (f+g)(a) + (f+g)(b) \wedge (f+g)(\lambda a) = \lambda(f+g)(a)$$

$$\Rightarrow f + g \in W \text{ por definición de } W$$

iii) $\lambda \in R, f \in W \Rightarrow \lambda f \in W$ (por probar)

$$\text{Si } f \in W \Rightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) \wedge f(\lambda a) = \lambda f(a)$$

$$\Rightarrow \alpha f(a+b) = \alpha f(a) + \alpha f(b) \wedge \alpha f(\lambda a) = \alpha(\lambda f(a))$$

$$\Rightarrow (\alpha f)(a+b) = (\alpha f)(a) + (\alpha f)(b) \wedge \lambda(\alpha f(a)) = \lambda(\alpha f(a))$$

entonces $\alpha f \in W$ por definición

por lo tanto W es un subespacio de F .

- 9) Sea $V = C = \{f / f : R \rightarrow E \text{ es continua}\}$ y consideremos los siguientes:

$$W_1 = \{f \in C / \int_0^1 f(t) dt = 0\} ; \quad W_2 = \{f \in C / \int_0^1 f(t) dt = 1\}$$

averiguar si los subconjuntos W_1 y W_2 son subespacios de V .

Solución

Analizando al conjunto W_1 .

i) $W_1 \neq \emptyset$ puesto que $W_1 \subset V$

ii) $f, g \in W_1 \Rightarrow f + g \in W_1$ (por probar)

$$\text{Si } \begin{cases} f \in W_1 \\ g \in W_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(t)dt = 0 \\ \int_0^1 g(t)dt = 0 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = 0$$

$$\int_0^1 (f(t) + g(t))dt = 0$$

$$\int_0^1 (f+g)(t)dt = 0 \Rightarrow f+g \in W_1$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in W_1 \Rightarrow \lambda f \in W_1$ por probar

$$\text{Si } f \in W_1 \Rightarrow \int_0^1 f(t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \int_0^1 f(t)dt = \lambda(0)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\lambda f)(t)dt = 0 \Rightarrow \lambda f \in W_1$$

por lo tanto W_1 es un subespacio de V .

ahora analizaremos al conjunto W_2 .

i) $W_2 \neq \emptyset$ puesto que $W_2 \subset V$

ii) $f, g \in W_2 \Rightarrow f+g \in W_2$ (por probar)

$$\text{Si } \begin{cases} f \in W_2 \\ g \in W_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 f(t)dt = 1 \\ \int_0^1 g(t)dt = 1 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt = 2$$

$$\int_0^1 (f+g)(t)dt = 2 \neq 1 \Rightarrow f+g \notin W_2$$

por lo tanto W_2 no es un subespacio de V .

10) Sea $V = R^{n \times n}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden $n \times n$ sobre el campo R , definimos los conjuntos:

$$T = \{A \in R^{n \times n} / a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j\} ; \quad S = \{A \in R^{n \times n} / a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j\}$$

Determinar si los conjuntos T y S son subespacios de V .

Solución

Analizando al conjunto T .

i) $T \neq \emptyset$ puesto que la matriz nula es un elemento.

ii) $A, B \in T \Rightarrow A+B \in T$ (por verificar)

$$\text{Si } \begin{cases} A \in T \\ B \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \\ b_{ij} = b_{ji} \end{cases} \quad \forall i, j \quad \text{sumando}$$

$$a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$$

$$\Rightarrow [a_{ij} + b_{ij}] \in T \Rightarrow [a_{ji} + b_{ji}] \in T$$

$$\Rightarrow A+B \in T$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, A \in T \Rightarrow \lambda A \in T$ (por verificar)

$$\text{Si } A \in T \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

$$\Rightarrow \lambda a_{ij} = \lambda a_{ji}, \forall i, j$$

$$\Rightarrow [\lambda a_{ji}] \in T \text{ por definición de } T$$

$$\Rightarrow \lambda[a_{ij}] \in T, \text{ de donde } \lambda A \in T$$

por lo tanto T es un subespacio de V .

ahora analizaremos al conjunto S .

i) $S \neq \emptyset$ pues contiene al vector nulo.

ii) $A, B \in S \Rightarrow A + B \in S$ (por comprobar)

$$\text{Si } \begin{cases} A \in S \\ B \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} \\ b_{ij} = -b_{ji} \end{cases} \forall i, j \text{ sumando}$$

$$a_{ij} + b_{ij} = -(a_{ji} + b_{ji})$$

$$\Rightarrow [a_{ij} + b_{ij}] \in S \text{ por definición de } S$$

$$\Rightarrow [a_{ij}] + [b_{ij}] \in S$$

$$\Rightarrow A + B \in S$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, A \in S \Rightarrow \lambda A \in S$ (por verificar)

$$\text{Si } A \in S \Rightarrow a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j$$

$$\Rightarrow \lambda a_{ij} = -\lambda a_{ji}, \forall i, j$$

$$\Rightarrow [\lambda a_{ji}] \in S \text{ por definición de } S$$

$$\Rightarrow \lambda[a_{ij}] \in S, \text{ de donde } \lambda A \in S$$

por lo tanto S es un subespacio de V .

11

Sea $V = \{f : f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}\}$ un espacio vectorial real y sean

$$T = \{f \in V / f(0) + f(1) = 0\} \text{ y } H = \{f \in V / f(x) \geq 0\}$$

Determinar si los conjuntos T y H son subespacios de V .

Solución

Analizando el conjunto T .

i) $T \neq \emptyset$ puesto que $T \subset V$

ii) $f, g \in T \Rightarrow f + g \in T$ (por verificar)

$$\text{Si } \begin{cases} f \in T \\ g \in T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) + f(1) = 0 \\ g(0) + g(1) = 0 \end{cases} \forall i, j \text{ sumando}$$

$$f(0) + g(0) + f(1) + g(1) = 0$$

$$(f + g)(0) + (f + g)(1) = 0$$

$$\Rightarrow f + g \in T \text{ por definición de } T.$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in T \Rightarrow \lambda f \in T$ (por verificar)

$$\text{Si } f \in T \Rightarrow f(0) + f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda f(0) + \lambda f(1) = \lambda(0)$$

$$\Rightarrow (\lambda f)(0) + (\lambda f)(1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda f \in T \text{ por definición de } T.$$

por lo tanto T es un subespacio de V .

Ahora analizaremos el conjunto H.

i) $H \neq \emptyset$ por lo menos contiene a la función cero.

ii) $f, g \in H \Rightarrow f + g \in H$ por verificar

$$\text{Si } \begin{cases} f \in H \\ g \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$f(x) + g(x) \geq 0$$

$$(f + g)(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow f + g \in H \quad \text{por definición de H}$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in H \Rightarrow \lambda f \in H$ por verificar

$$\text{Si } f \in H \Rightarrow f(x) \geq 0$$

$$\lambda f(x) \geq 0 \quad \text{si } \lambda > 0$$

$$\lambda f(x) \leq 0 \quad \text{si } \lambda < 0, \text{ de donde } \lambda f \notin H$$

por lo tanto H no es un subespacio de V.

12

Si $V = F$ conjuntos de todas las funciones definidas en \mathbb{R} . demostrar que el conjunto de todas las funciones f que satisface la ecuación diferencial $f''(x) + 5f(x) = 0$ es un subespacio de $V = F$.

Solución

$$\text{Sea } H = \{f \in V / f''(x) + 5f(x) = 0\}$$

Probaremos que H es un subespacio de V

i) $H \neq \emptyset$ pues contiene a la función cero.

ii) $f, g \in H \Rightarrow f + g \in H$ por verificar

$$\text{Si } \begin{cases} f \in H \\ g \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) + f(x) = 0 \\ g''(x) + g(x) = 0 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$(f''(x) + g''(x)) + (f(x) + g(x)) = 0$$

$$(f + g)''(x) + (f + g)(x) = 0$$

$$\Rightarrow f + g \in H \quad \text{por definición de H.}$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in H \Rightarrow \lambda f \in H$ por verificar

$$\text{Si } f \in H \Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda f''(x) + \lambda f(x) = \lambda(0)$$

$$\Rightarrow (\lambda f)''(x) + (\lambda f)(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda f \in H \quad \text{por definición de H}$$

por lo tanto H es un subespacio de V.

13

Sea $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

donde a, b son reales cualquiera es un subespacio de V.

Solución

$$\text{Sea } H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Probaremos que H es subespacio de V.

i) $H \neq \emptyset$ pues por lo menos tiene a la matriz nula.

ii) $A, B \in H \Rightarrow A + B \in H$ por verificar

$$\text{Si } \begin{cases} A \in H \\ B \in H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & \beta \\ \beta & \lambda \end{bmatrix} \in H \Rightarrow A+B \in H \text{ por definición de } H.$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, A \in H \Rightarrow \lambda A \in H$ por verificar

$$\text{Si } A \in H \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \in H \text{ por definición de } H$$

Por lo tanto H es un subespacio de $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

14

Sea $V = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es una función}\}$ el espacio vectorial de las funciones reales, analizar si el conjunto $W = \{f \in V / f(\frac{1}{2}) = \frac{f(0)+f(1)}{2}\}$ es un subespacio de V .

Solución

i) $W \neq \emptyset$, puesto que contiene por lo menos la función cero.

ii) $f, g \in W \Rightarrow f+g \in W$ por verificar

$$\text{Si } \begin{cases} f \in W \\ g \in W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{2}) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \\ g(\frac{1}{2}) = \frac{g(0)+g(1)}{2} \end{cases} \text{ sumando}$$

$$f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \frac{g(0)+g(1)}{2}$$

$$(f+g)(\frac{1}{2}) = \frac{(f+g)(0) + (f+g)(1)}{2}$$

$$\Rightarrow f+g \in W \text{ por definición de } W$$

iii) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in W \Rightarrow \lambda f \in W$ por verificar

$$\text{Si } f \in W \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$$

$$\lambda f(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda f(0) + \lambda f(1)}{2}$$

$$(\lambda f)(\frac{1}{2}) = \frac{(\lambda f)(0) + (\lambda f)(1)}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda f \in W \text{ por definición de } W.$$

Por lo tanto W es un subespacio de V .

15

Dado el espacio vectorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ investigar si el conjunto

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \sum_{i=1}^4 x_i = 1\}$$
 es un subespacio de \mathbb{R}^4 .

Solución

i) $S \neq \emptyset$ puesto que $(1,0,0,0) \in S$

ii) $X = (x_1, x_2, x_3, x_4), Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S \Rightarrow x + y \in S$

por comprobar si se cumple

$$\text{Si } \begin{cases} X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S \\ Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^4 x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^4 y_i = 1 \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 y_i = 1 + 1$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = 2 \neq 1$$

$$\Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \notin S$$

$$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) \notin S$$

$$\Rightarrow x + y \notin S, \text{ por lo tanto } S \text{ no es subespacio de } R^4.$$

d) EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1 Analizar si W es un subespacio de R^3 en cada uno de los siguientes casos:

a) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x = 2y\}$

b) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x \leq y \leq z\}$

c) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x \cdot y = 0\}$

d) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y = z\}$

e) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y^3\}$

f) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / k_1 x + k_2 y + k_3 z = 0, k_i \in R\}$

1 Consideremos $S = \{(x, y) \in R^2 / x \geq y\}$, investigar si S es un subespacio de $(R^2, +, R, \cdot)$.

1 Consideremos el espacio vectorial $(R^2, +, R, \cdot)$ y los subconjuntos $W = \{(x, y) \in R^2 / y = 2x\}$ y $T = \{(x, y) \in R^2 / y = x + 1\}$ averiguar si son subespacio de R^2 .

4 Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios de R^2 .

$$T = \{(x, y) \in R^2 / (x - y)^2 = (x + y)^2\} \quad ; \quad S = \{(x, y) \in R^2 / \frac{x}{2} + y = x - \frac{y}{2}\}$$

5 Determinar si los siguientes conjuntos son subespacios de R^3 , donde:

a) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / z = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / z = 3x + y\}$

c) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z \wedge y = 3\}$

d) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x + 3y + z = 2\}$

6 Probar que $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n / \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0, a_i \in R\}$ es un subespacio de R^n .

7 Demostrar que el siguiente subconjunto, definido en la forma: $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y - z = 0 \wedge x + 2y + 3z = 0\}$ es un subespacio de R^3 .

8 Considérese el espacio vectorial $(R^3, +, R, \cdot)$ analizar cual de los siguientes conjuntos son subespacios de R^3 .

a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + z\}$ b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / |x + z| = z\}$

c) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / xz = 0\}$

9) Sea $V = \mathbb{R}^R = \{f \in \mathbb{R}^R / f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ espacio vectorial sobre \mathbb{R} :

a) Probar que $W = \{f \in V / f \text{ es acotada}\}$ es un subespacio vectorial de V .

b) Probar que $W = \{f \in V / f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V .

c) Probar que $W = \{f \in V / f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de V .

d) Probar que $W = \{f \in V / f \text{ es continua}\}$ es un subespacio de V .

10) ¿Cuál de los siguientes conjuntos dados son subespacios de \mathbb{R}^n ($n > 3$)?

a) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 > 0\}$

b) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 + 3x_2 = x_3\}$

c) $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_2 = x_1^2\}$

11) Analizar si $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n \in \mathbb{Z}\}$ es un subespacio de \mathbb{R}^n .

12) Sea $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ espacio vectorial de matrices cuadradas sobre \mathbb{R} y sean

$$W_1 = \{[a_{ij}] \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a_{11} + a_{12} = 0\}, \quad W_2 = \{[a_{ij}] \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / a_{11} + a_{21} = 0\}$$

Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V .

13) Dado el espacio vectorial $(M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +, \mathbb{R}, \cdot)$. Diga Ud. si los siguientes

subconjuntos: $S = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\}$

$T = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) / A = \begin{bmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$. Son subespacios de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

14) Analizar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^4 son subespacios de \mathbb{R}^4 .

$$S = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 \geq 0, \quad x^2 + u^2 \leq 0\}$$

$$T = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 / 2x - y = u \vee x - 2y = z\}$$

15) Determinar si los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^4 son subespacios.

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \text{por lo menos en } x_i \text{ es cero}\}$$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 x_4 = 0\}$$

16) Demuestre que los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^4 son subespacios.

a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 0, \quad z - t = 0\}$

b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / 2x + y - t = 0, \quad z = 0\}$

17) Analizar cuales de los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de \mathbb{R}^4 .

a) $W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 / |u| \geq u, \quad x = u\}$

b) $W = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 / x^2 + y^2 + u^2 = 0\}$

18) Sea $V = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$ el espacio vectorial de las funciones

continuas analizar si $S = \{f \in V / \int_a^b f(x) dx \neq 0\}$ es un subespacio de V .

19) Demostrar que $(S, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n \times n}$, siendo S el conjunto de las matrices triangular superior.

20) Sea el espacio vectorial $(\mathbb{R}^R, +, \mathbb{R}, \cdot)$ donde $\mathbb{R}^R = \{f \in \mathbb{R}^R / f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$.

Averiguar cual de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^R son subespacios vectoriales.

a) $W = \{f \in R^R / f(0) + f(1) = 0\}$ b) $W = \{f \in R^R / f(0) = f(1)\}$

c) $W = \{f \in R^R / f(x) \geq 0\}$

d) $W = \{f \in R^R / f(x^2) = (f(x))^2\}$

e) $W = \{f \in R^R / f(3) = 1 + f(-5)\}$

21) Demostrar que $S = \{(z, w) \in C^2 / Z = iw\}$ es un subespacio de $(C^2, +, C, \cdot)$.

22) Considerando $(C^2, +, R, \cdot)$ el espacio vectorial de los pares ordenados de números complejos sobre el cuerpo de los reales, investigar si los siguientes conjuntos son subespacios del mismo.

a) $S = \{(z, u) \in C^2 / z^2 + u^2 = 0\}$ b) $S = \{(z, u) \in C^2 / z + 2u \in R\}$

c) $S = \{(z, u) \in C^2 / \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(u)\}$

d) $S = \{(z, u) \in C^2 / \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z - u) = \operatorname{Im}(z)\}$

23) Sean \vec{V}_1 y \vec{V}_2 dos vectores en R^2 . Demuestre que $H = \{\vec{V} / \vec{V} = a\vec{V}_1 + b\vec{V}_2; a, b \in R\}$ es un subespacio de R^2 .

24) Sean $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_n$ vectores arbitrarios en un espacio vectorial en V . Sea $H = \{\vec{V} \in V / \vec{V} = a_1\vec{V}_1 + a_2\vec{V}_2 + \dots + a_n\vec{V}_n; a_1, a_2, \dots, a_n \in R\}$ Demuestre que H es un subespacio de V .

25) Sea $H = \{(x, y, z, w) \in R^4 / ax + by + cz + dw = 0\}$ donde a, b, c y d son números reales no todos nulos. Demuestre que H es un subespacio propio de R^4 (a H se le conoce como un hiperplano en R^4).

16) Sea $H = \{x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n / a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0\}$ donde a_1, a_2, \dots, a_n son números reales, no todos nulos. Demuestre que H es un sub-espacio propio de R^n (a H se le conoce como un hiperplano en R^n).

17) Si A es una matriz de orden $n \times m$ y $H = \{x \in R^m / Ax = 0\}$ Demuestre que H es un subespacio de R^m (a H se le conoce como el núcleo de la matriz A).

18) Indicar si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales de los espacios vectoriales que se indican en cada caso.

a) $W = \{(x, y) \in R^2 / x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ de R^2

b) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x^2 + y^2 - z = 0\}$ de R^3

c) $W = \{(x, y) \in R^2 / e^x + y = 0\}$ de R^2

Rpta. No son subespacios vectoriales.

3.8. OPERACIONES CON SUBESPACIOS.-

a) **INTERSECCIÓN DE SUB-ESPACIOS.-** Sea $\{S_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios del espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$, a la intersección de dicha familia de subespacios denotaremos por $S = \bigcap_{i \in I} S_i$.

TEOREMA.- La intersección de toda familia $\{S_i\}_{i \in I}$ de subespacios del espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$ es un subespacio de V .

Demostración

Sea $S = \bigcap_{i \in I} S_i$ la intersección de la familia de subespacios de V .

Probaremos que $(S, +, k, \cdot)$ es subespacio de $(V, +, k, \cdot)$

i) $0 \in S_i, \forall i$ por ser subespacios de V entonces $0 \in \bigcap_{i=1}^n S_i = S$ por

definición de intersección de donde $S \neq \emptyset$.

ii) $x, y \in S = \bigcap_{i=1}^n S_i \Rightarrow x + y \in S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ por probar

$$\text{Si } x \in S \wedge y \in S \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^n S_i \wedge y \in \bigcap_{i=1}^n S_i, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow x \in S_i \wedge y \in S_i, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow x + y \in S_i, \forall i \text{ por ser subespacios}$$

$$\Rightarrow x + y \in \bigcap_{i=1}^n S_i = S \text{ definiendo } \cap$$

Luego $x + y \in S$

iii) $\lambda \in k, x \in S = \bigcap_{i=1}^n S_i \Rightarrow \lambda x \in S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ por probar

$$\text{Si } x \in S = \bigcap_{i=1}^n S_i, \forall i \Rightarrow x \in S_i, \forall i, \text{ definiendo } \cap$$

$$\Rightarrow \lambda x \in S_i \text{ por ser subespacios}$$

$$\Rightarrow \lambda x \in \bigcap_{i=1}^n S_i = S \text{ definiendo } \cap$$

por lo tanto $\lambda x \in S$

Luego $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ es subespacio de V

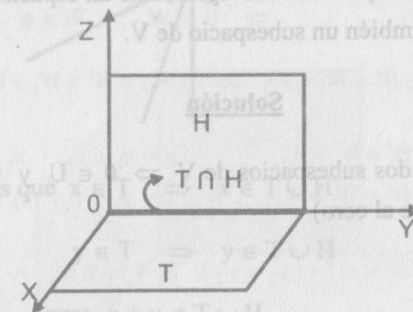
Ejemplo.- En el espacio vectorial $(R^3, +, R, \cdot)$ consideremos los subespacios

$$T = \{(x, y, z) \in R^3 / z = 0\} \text{ y } H = \{(x, y, z) \in R^3 / x = 0\}, \text{ la}$$

intersección de estos subespacios es: $T \cap H = \{(x, y, z) \in R^3 / x = 0 \wedge z = 0\}$

esto significa que los puntos genéricos de $T \cap H$ es $(0, y, 0)$ es decir

$$T \cap H = \{(0, y, 0) \in R^3 / y \in R\} = \text{eje } Y$$



Ejemplo.- W es un subespacio de $V \Leftrightarrow$

i) $0 \in W$ ($W \neq \emptyset$) y

ii) $v, w \in W \Rightarrow av + bw \in W, \forall a, b \in k$

Solución

\Rightarrow Como W es un subespacio de $V \Rightarrow 0 \in W$ por que todo subespacio contiene al cero $v, w \in W$ y $a, b \in k \Rightarrow av \in W, bw \in W$ (por la condición (ii) de subespacio) entonces $av + bw \in W$.

\therefore se cumple (i), (ii)

\Leftrightarrow Supongamos que W cumple i) y ii) \Rightarrow

i) $0 \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$, Si $v, w \in W \Rightarrow v + w = 1.v + 1.w \in W$ por (ii) $\Rightarrow v + w \in W$

Si $v \in W$ y $\lambda \in k \Rightarrow \lambda v = \lambda v + 0v \in W$ por (ii) $\Rightarrow \lambda v \in W$

Luego W es un subespacio de V .

Ejemplo.- Sean U y W dos subespacios de un espacio vectorial $V \Rightarrow U \cap W$ es también un subespacio de V .

Solución

Como U y W son dos subespacios de $V \Rightarrow 0 \in U$ y $0 \in W$ (por que todo subespacio contiene al cero)

$$\Rightarrow 0 \in U \cap W$$

... (1)

Sean $v, w \in U \cap W \Rightarrow v, w \in U \wedge v, w \in W$

$$\Rightarrow av + bw \in U \wedge av + bw \in W, \forall a, b \in k$$

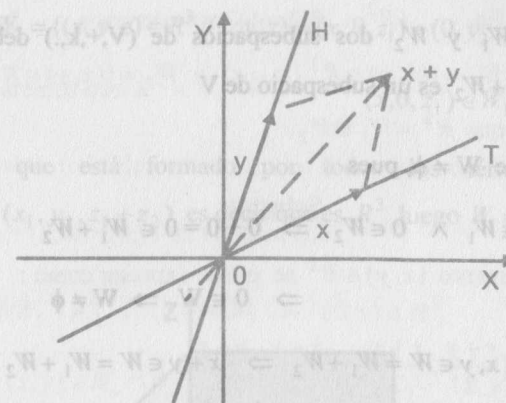
puesto que U y W son subespacios

$$\Rightarrow au + bw \in U \cap W, \text{ por lo tanto}$$

$U \cap W$ es un subespacio de V .

b) UNIÓN DE SUBESPACIOS.-

Si T y H son dos subespacios de $(V, +, k, \cdot)$ entonces $T \cup H$ no necesariamente es subespacio de V , esto la ilustraremos con el siguiente ejemplo, consideremos el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}, \cdot)$ y los subespacios T y H que se muestran en la figura.



Tenemos que $x \in T \Rightarrow x \in T \cup H$

$$y \in T \Rightarrow y \in T \cup H$$

pero $x + y \notin T \cup H$

con el cual se tiene que $T \cup H$ no necesariamente es un subespacio.

c) SUMA Y SUMA DIRECTA DE SUB-ESPACIOS.-

DEFINICIÓN.- Sean W_1 y W_2 dos subespacios de $(V, +, k, \cdot)$.

Se llama la suma de los subespacios W_1 y W_2 al conjunto definido por:

$$W = W_1 + W_2 = \{x \in V / x = x_1 + x_2, x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2\}$$

TEOREMA.- La suma de dos subespacios de $(V, +, k, \cdot)$ es un subespacio de V .

Demostración

Sean W_1 y W_2 dos subespacios de $(V, +, k, \cdot)$ debemos probar que $W = W_1 + W_2$ es un subespacio de V

i) Que $W \neq \emptyset$, pues

$$0 \in W_1 \wedge 0 \in W_2 \Rightarrow 0 + 0 = 0 \in W_1 + W_2$$

$$\Rightarrow 0 \in W \Rightarrow W \neq \emptyset$$

ii) Si $x, y \in W = W_1 + W_2 \Rightarrow x + y \in W = W_1 + W_2$

$$\text{Si } \begin{cases} x \in W = W_1 + W_2 \\ y \in W = W_1 + W_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2, & x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2 \\ y = y_1 + y_2, & y_1 \in W_1 \wedge y_2 \in W_2 \end{cases}$$

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), \quad x_1 + y_1 \in W_1 \wedge x_2 + y_2 \in W_2$$

$$\text{por lo tanto } x + y \in W = W_1 + W_2$$

iii) $\lambda \in k, x \in W = W_1 + W_2 \Rightarrow \lambda x \in W = W_1 + W_2$

$$\lambda \in k \wedge x \in W \Rightarrow \lambda \in k \wedge x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in W_1 \wedge x_2 \in W_2$$

$$\Rightarrow \lambda x = \lambda x_1 + \lambda x_2, \quad \lambda x_1 \in W_1 \wedge \lambda x_2 \in W_2$$

$$\Rightarrow \lambda x \in W = W_1 + W_2$$

Luego $W = W_1 + W_2$ es un subespacio de $(V, +, k, \cdot)$

Ejemplo.- En el espacio vectorial $(R^3, +, R, \cdot)$ consideremos los subespacios

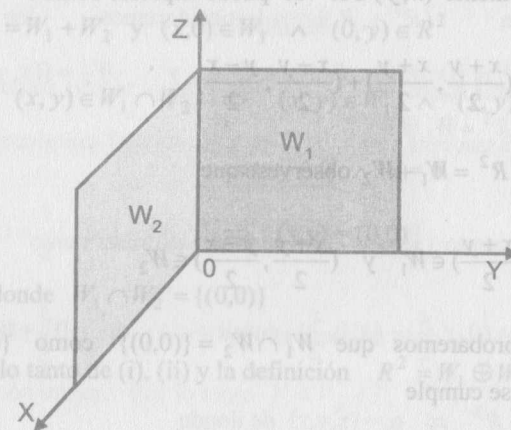
$$W_1 = \{(x_1, 0, z_1) \in R^3 / x_1, z_1 \in R\} \text{ y } W_2 = \{(0, y_2, z_2) \in R^3 / y_2, z_2 \in R\}$$

entonces el subespacio suma:

$$W = W_1 + W_2 = \{(x, y, z) \in R^3 / (x, y, z) = (x_1, 0, z_1) + (0, y_2, z_2) \in W\}$$

$$(x, 0, z_1) \in W_1 \text{ y } (0, y_2, z_2) \in W_2\}$$

es decir que está formado por todos los términos de la forma $(x, y, z) = (x_1, y_2, z_1 + z_2)$ es decir que es R^3 luego $W = W_1 + W_2 = R^3$



DEFINICIÓN.- Sea V un espacio vectorial sobre k , W_1 y W_2 dos subespacios de V , diremos que V es la suma directa de W_1 y W_2 si:

$$i) \quad V = W_1 + W_2$$

$$ii) \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

y denotaremos por $W_1 \oplus W_2 = V$. En resumen:

$$V = W_1 \oplus W_2 = \{u + v / u \in W_1 \wedge v \in W_2\} \text{ y } W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

En general $V \neq W_1 \oplus W_2$

Ejemplo.- En $(R^2, +, R, \cdot)$ consideremos los subespacios
 $W_1 = \{(x, y) \in R^2 / y = x\}$, y $W_2 = \{(x, y) \in R^2 / y = -x\}$ probar
 que $R^2 = W_1 \oplus W_2$.

Solución

i) Todo elemento $(x, y) \in R^2$ se puede expresar como :

$$(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

es decir: $R^2 = W_1 + W_2$ obsérvese que

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \in W_1 \text{ y } \left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right) \in W_2$$

ii) Ahora probaremos que $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$ como $\{(0, 0)\} \subset W_1 \cap W_2$
 siempre se cumple

$$\begin{aligned} \text{sea } (x, y) \in W_1 \cap W_2 &\Rightarrow (x, y) \in W_1 \wedge (x, y) \in W_2 \\ &\Rightarrow y = x \wedge y = -x \end{aligned}$$

$$\text{de donde } x = y = 0 \Rightarrow (x, y) \in \{(0, 0)\}$$

$$\text{Luego } W_1 \cap W_2 \subset \{(0, 0)\} \quad \therefore W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$$

por la parte (i), (ii) y la definición se tiene: $R^2 = W_1 \oplus W_2$

Ejemplo.- En $(R^2, +, R, \cdot)$ consideremos los subespacios
 $W_1 = \{(x, y) \in R^2 / y = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y) \in R^2 / x = 0\}$ probar
 que $R^2 = W_1 \oplus W_2$.

Solución

i) Probaremos que $R^2 = W_1 + W_2$

para esto, todo elementos $(x, y) \in R^2$, se expresa como

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) \text{ se observa que:}$$

$$R^2 = W_1 + W_2 \text{ y } (x, 0) \in W_1 \wedge (0, y) \in W_2$$

ii) Sea $(x, y) \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow (x, y) \in W_1 \wedge (x, y) \in W_2$

$$\Rightarrow y = 0 \wedge x = 0$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{de donde } W_1 \cap W_2 = \{(0, 0)\}$$

por lo tanto de (i), (ii) y la definición $R^2 = W_1 \oplus W_2$

Ejemplo.- En $(R^3, +, R, \cdot)$ consideremos los subespacios
 $W_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / y = 0\}$ y $W_2 = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z = 0\}$.

Demostrar que $R^3 = W_1 \oplus W_2$.

Solución

i) Todo elemento $(x, y, z) \in R^3$ se puede expresar como

$$(x, y, z) = (x, 0, z) + (0, y, 0) \text{ donde } (x, 0, z) \in W_1 \wedge (0, y, 0) \in W_2$$

$$\therefore R^3 = W_1 + W_2$$

ii) Sea $(x, y, z) \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow (x, y, z) \in W_1 \wedge (x, y, z) \in W_2$

$$\text{Si } \begin{cases} (x, y, z) \in W_1 \\ (x, y, z) \in W_2 \end{cases} \Rightarrow (x, 0, z) = (0, y, 0) \Rightarrow x = y = z = 0$$

$$\text{Luego } (x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0)\}$$

por la parte (i), (ii) y la definición. $\therefore R^3 = W_1 \oplus W_2$

Ejemplo.- En $(R^3, +, R, \cdot)$ consideremos los subespacios

$$W_1 = \{(x, y, z) \in R^3 / x = 0\} \quad \text{y} \quad W_2 = \{(x, y, z) \in R^3 / y = 0\}$$

$$¿R^3 = W_1 \oplus W_2?$$

Solución

i) Todo elemento $(x, y, z) \in R^3$ se puede expresar como

$$(x, y, z) = (0, y, \frac{z}{2}) + (x, 0, \frac{z}{2}) \quad \text{donde} \quad \therefore R^3 = W_1 + W_2$$

ii) Sea $\alpha \in R^3 \Rightarrow \alpha = (x, y, z)$ de donde

$$\alpha \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow \alpha \in W_1 \wedge \alpha \in W_2$$

$$\text{Si } \begin{cases} \alpha \in W_1 \\ \alpha \in W_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = (0, y, \frac{z}{2}) \\ \alpha = (x, 0, \frac{z}{2}) \end{cases} \quad \text{de donde}$$

$$(0, y, \frac{z}{2}) = (x, 0, \frac{z}{2}) \Rightarrow x = y = 0, z = z$$

$$\text{Luego } \alpha = (0, 0, z) = z(0, 0, 1) \Rightarrow \forall z \neq 0$$

$$\alpha \neq (0, 0, 0) \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \{(0, 0, 0)\} \quad \text{por lo tanto} \quad R^3 \neq W_1 \oplus W_2$$

Ejemplo.- Sea $V = \{f / f: R \rightarrow R\}$ el espacio vectorial de todas las funciones de R en R . Sea $V_p = \{f \in V / f(-x) = f(x)\}$ el subespacio de todas las funciones pares y $V_i = \{f \in V / f(-x) = -f(x)\}$ el subespacio de todas las funciones impares. Comprobar que $V = V_p \oplus V_i$

Solución

i) Debemos probar que $V = V_p + V_i$, esta condición se cumple del hecho que cualquier función de R en R se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

donde $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ es una función par, y $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ es una función impar. Por lo tanto $V = V_p + V_i$

ii) Probaremos que $V_p \cap V_i = \{\theta\}$

$$\text{Sea } f \in V_p \cap V_i \Rightarrow f \in V_p \wedge f \in V_i$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x), \quad \forall x \in R \quad \wedge \quad f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow 2f(-x) = 0, \quad \forall x \in R \Rightarrow f = \theta$$

$$\text{por lo tanto} \quad V_p \cap V_i = \{\theta\}$$

Luego de (i) y (ii) y la definición $V = V_p \oplus V_i$

Ejemplo.- Sea $V = \{A = [a_{ij}]_{n \times n} / a_{ij} \in R\}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas sobre el campo R y consideremos $U = \{A \in V / A = A'\}$, el espacio de las matrices simétricas y $W = \{A \in V / A = -A'\}$ el subespacio de las matrices antisimétricas. Demostrar que $V = U \oplus W$

Solución

i) Demostremos que $V = U + W$

Sea A una matriz arbitraria de orden n , a la matriz A es posible expresarla como

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

donde probaremos que $\frac{1}{2}(A + A') \in U$ y $\frac{1}{2}(A - A') \in W$ es decir

$$\left[\frac{1}{2}(A + A')\right]' = \frac{1}{2}[A' + (A')'] = \frac{1}{2}(A + A')$$

$$\text{Luego } \frac{1}{2}(A + A') \text{ es simétrica} \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A') \in U$$

$$\left[\frac{1}{2}(A - A')\right]' = \frac{1}{2}[A' - (A')'] = -\frac{1}{2}(A - A')$$

$$\text{Luego } \frac{1}{2}(A - A') \text{ es antisimétrica} \Rightarrow \frac{1}{2}(A - A') \in W \text{ de donde } V = U + W$$

ii) Demostraremos que $U \cap W = \{\theta\}$

$$\text{Sea } A \in U \cap W \Rightarrow A \in U \wedge A \in W$$

$$\Rightarrow A = A' \wedge A = -A'$$

$$\Rightarrow A = A' \wedge A = -A'$$

$$\Rightarrow A = \theta \text{ Luego } U \cap W = \{\theta\}$$

Luego de (i) y (ii) y la definición: $V = U \oplus W$

NOTA.- Extenderemos la definición de la suma de subespacios al caso en que $n > 2$.

DEFINICIÓN.- La suma de los subespacios W_1, W_2, \dots, W_n de $(V, +, k, \cdot)$ es el conjunto

$$W = W_1 + W_2 + \dots + W_n = \sum_{i=1}^n W_i = \{x \in V / x = \sum_{i=1}^n x_i \wedge x_i \in W_i\}$$

Luego resulta que $W = \sum_{i=1}^n W_i$ un subespacio de $(V, +, k, \cdot)$ además, si tales

subespacios son disjuntos dos a dos, ósea $i \neq j \Rightarrow W_i \cap W_j = \{\theta\}$ entonces

diremos que W es la suma directa de ellos, y escribiremos $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus \dots \oplus W_n$

TEOREMA.- Sean V un espacio vectorial sobre k , V_1 y V_2 subespacios si y sólo si para todo $\alpha \in V$, se puede expresar de modo único en la forma $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ donde $\alpha_1 \in V_1 \wedge \alpha_2 \in V_2$.

Demostración

\Rightarrow Supongamos que $V = V_1 \oplus V_2 \Rightarrow$ i) $V = V_1 + V_2$, ii) $V_1 \cap V_2 = \{\theta\}$

Sea $\alpha \in V_1 + V_2 \Rightarrow \exists \alpha_1 \in V_1 \wedge \alpha_2 \in V_2$ tal que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
 deseamos demostrar que $\alpha = \alpha'_1 + \alpha'_2$ donde $\alpha'_1 \in V_1 \wedge \alpha'_2 \in V_2$

$$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha'_1 + \alpha'_2 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha'_1 = \alpha'_2 - \alpha_2$$

como $\alpha_1, \alpha'_1 \in V_1 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha'_1 \in V_1$ (pues V_1 es un subespacio de V)

$\alpha_2, \alpha'_2 \in V_2 \Rightarrow \alpha'_2 - \alpha_2 \in V_2$ (pues V_2 es un subespacio de V)

$$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha'_1 = 0 \wedge \alpha'_2 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha'_1 \wedge \alpha'_2 = \alpha_2$$

Luego $\alpha \in V = V_1 + V_2$ tiene una representación única.

\Leftrightarrow Sea $\alpha \in V \Rightarrow \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ donde $\alpha_1 \in V_1 \wedge \alpha_2 \in V_2$ esto se representa de modo único.

$v = v + 0$ donde $v \in V_1 \wedge 0 \in V_2 \wedge v = 0 + v$ donde

$0 \in V_1 \wedge v \in V_2 \Rightarrow$ como una suma para v es única $\Rightarrow v = 0 \Rightarrow$

$V_1 \cap V_2 = \{0\}$ entonces $V = V_1 \oplus V_2$

Ejemplo. Sean

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}, V = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z\},$$

$W = \{(0, 0, z) \in R^3 / z \in R\}$ sub espacios de R^3 .

Probar que i) $R^3 = U + W$ ii) $R^3 = V + W$ iii) $R^3 = U + V$

$$¿R^3 = U \oplus W? \quad ¿R^3 = V \oplus W? \quad ¿R^3 = U \oplus V?$$

Solución

$$i) U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}, W = \{(0, 0, z) \in R^3 / z \in R\}$$

Sea $\alpha \in R^3 \Rightarrow \alpha = (x, y, z)$ que se puede expresar como:

$$\alpha = (x, y, z) = (x, y, -x - y) + (0, 0, x + y + z) \text{ y como}$$

$$(x, y, -x - y) \in U \wedge (0, 0, x + y + z) \in W \text{ entonces } R^3 = U + V$$

$$\text{Sea } \alpha \in U \cap W \Rightarrow \alpha \in U \wedge \alpha \in W \Rightarrow x + y + z = 0 \wedge x = y = 0 \\ \Rightarrow 0 + 0 + z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = (0, 0, 0) \text{ luego } U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$$

$$\therefore R^3 = U \oplus W$$

$$ii) V = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z\} \text{ y } W = \{(0, 0, z) \in R^3 / z \in R\}$$

$$\text{sea } \alpha \in R^3 \Rightarrow \alpha = (x, y, z) = (x, y, x) + (0, 0, z - x)$$

$$\text{donde } (x, y, x) \in V \wedge (0, 0, z - x) \in W \text{ entonces } R^3 = V + W$$

$$\text{Sea } \alpha \in V \cap W \Rightarrow \alpha \in V \wedge \alpha \in W \text{ de donde}$$

$$x = z \wedge x = y = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$$

$$\text{entonces } \alpha = (0, 0, 0) \text{ luego } V \cap W = \{(0, 0, 0)\}$$

$$\therefore R^3 = V \oplus W$$

$$iii) U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\} \text{ y } V = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z\}$$

$$\text{Sea } \alpha \in R^3 \Rightarrow \alpha = (x, y, z) = (0, x - z, z - x) + (x, y - x + z, x)$$

$$\text{Donde } (0, x - z, z - x) \in U \wedge (x, y - x + z, x) \in V$$

$$\text{Entonces } R^3 = U + V$$

$$\text{Sea } \alpha \in U \cap V \Rightarrow \alpha \in U \wedge \alpha \in V$$

$$\Rightarrow x+y+z=0 \wedge x=z$$

$$\Rightarrow 2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$$

$$\text{como } \alpha = (x, y, z) = (x, -2x, x) = x(1, -2, 1)$$

$$\forall x \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq (0, 0, 0) \Rightarrow U \cap V \neq \{(0, 0, 0)\}$$

$$\text{por lo tanto } R^3 \neq U \oplus V$$

Ejemplo.- Supongamos que U , V y W son subespacios de un espacio vectorial, probar que: $(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$

Solución

$$(U \cap V) + (U \cap W) = \{u+v \mid u \in U \cap V \wedge v \in U \cap W\}$$

$$\text{sea } \alpha \in (U \cap V) + (U \cap W) \Rightarrow \exists u \in U \cap V \text{ y } v \in U \cap W / \alpha = u+v$$

$$\text{como } \begin{cases} u \in U \cap V \\ v \in U \cap W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \in U \wedge u \in V \\ v \in U \wedge v \in W \end{cases} \Rightarrow u+v \in U \wedge u+v \in V+W$$

$$\Rightarrow u+v \in U \cap (V+W) \Rightarrow \alpha \in U \cap (V+W)$$

$$\text{de donde } (U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V+W)$$

3.9. COMBINACIONES LINEALES.-

DEFINICIÓN.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial y $A \neq \emptyset$ donde $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ una familia o conjunto de vectores de V , llamaremos combinación lineal de elementos de A , a todo vector de la

$$\text{forma } \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n, \alpha_i \in k, v_i \in A$$

DEFINICIÓN.- Diremos que el vector $v \in V$ es una combinación lineal de los elementos de A , si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k$,

tal que

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_i \in A$$

Ejemplo.- Sea $(R^2, +, R, \cdot)$ un espacio vectorial, expresar en cada caso, si es posible, el vector v como combinación lineal de v_1, v_2 donde:

$$1) v = (\sqrt{2}, -1), v_1 = (\sqrt{3}, 2), v_2 = (-\sqrt{6}, 2)$$

Solución

v es combinación lineal de v_1 y v_2 si existen $\alpha, \beta \in R$ tal que

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 \text{ ó sea}$$

$$(\sqrt{2}, -1) = \alpha(\sqrt{3}, 2) + \beta(-\sqrt{6}, 2)$$

$$(\sqrt{2}, -1) = (\sqrt{3}\alpha - \sqrt{6}\beta, 2\alpha + 2\beta) \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\alpha - \sqrt{6}\beta = \sqrt{2} \\ 2\alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{6})} \\ \beta = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{6})} \end{cases}$$

Luego el vector v se puede expresar como combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 .

$$v = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{6})} v_1 + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + \sqrt{6})} v_2$$

2) $v = (2, 4)$, $v_1 = (-1, 3)$, $v_2 = (2, -6)$

Solución

v es combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$ ó sea: $(2, 4) = \alpha(1, -3) + \beta(2, -6)$

$$(2, 4) = (-\alpha + 2\beta, 3\alpha - 6\beta) \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 2 \\ 3\alpha - 6\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + 6\beta = 6 \\ 3\alpha - 6\beta = 4 \end{cases}$$

$$0 \neq 10$$

Luego $\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$

Por lo tanto v no se puede expresar en combinación lineal de los vectores v_1 y v_2 .

Ejemplo.- Sea $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de orden 2,

y consideremos las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar todas las combinaciones lineales de A, B y C que den la matriz nula N.

Solución

Debemos de obtener α, β y γ en \mathbb{R} , tales que: $\alpha A + \beta B + \gamma C = N$ o sea

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ efectuando la multiplicación}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ efectuando la suma}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ \beta + \gamma & \alpha + \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ por igualdad de matrices}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \text{ de donde } \alpha = \beta = 0$$

Luego la única combinación lineal que satisface la relación propuesta es la trivial

3.10. CONJUNTO DE COMBINACIONES LINEALES.-

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto de vectores de $(V, +, \cdot, \mathbb{R})$ ahora formaremos el subconjunto de V cuyos elementos sean todas las combinaciones lineales de los vectores de A , a este conjunto denotaremos con el símbolo \bar{A} , que se lee "A raya"

Si $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de vectores de V entonces \bar{A} se escribe así:

$$\bar{A} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i / \alpha_i \in \mathbb{R} \wedge v_i \in A \right\}$$

Ejemplo.- El conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores

$v_1 = (1, -2, 0)$ y $v_2 = (2, -2, -1)$ de \mathbb{R}^3 es

$$\bar{A} = \{ \alpha(1, -2, 0) + \beta(2, -2, -1) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{O sea } \bar{A} = \{ (\alpha + 2\beta, -2\alpha - 2\beta, -\beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

Como $\bar{A} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x, y, z) \in \bar{A}$ de donde $(x, y, z) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha - 2\beta, -\beta)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x \\ -2\alpha - 2\beta = y \\ -\beta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 4\beta = 2x \\ -2\alpha - 2\beta = y \\ -\beta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 2x + y \\ -2z = 2x + y \\ -\beta = z \end{cases}$$

de donde $2x + y + 2z = 0$ por lo tanto $\bar{A} = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y + 2z = 0\}$

TEOREMA.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial y $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$; demostrar que el conjunto de las combinaciones lineales de la familia de vectores de A es un subespacio del mismo es decir $(\bar{A}, +, k, \cdot)$ es un subespacio de V.

Demostración

i) Siendo $v_1 = 1.v_1 + 0.v_2 + \dots + 0.v_n$ es decir $v_1 \in \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \neq \emptyset$.

ii) Por definición se tiene:

$$v \in \bar{A} \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k / v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \wedge v_i \in A$$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \wedge \alpha_i \in k \wedge v_i \in V, \text{ puesto que } A \subset V$$

Luego $v \in \bar{A} \Rightarrow v \in V$, Por lo tanto $\bar{A} \subset V$.

iii) Si $u, v \in \bar{A} \Rightarrow u + v \in \bar{A}$ por probar

$$\text{Si } \begin{cases} u \in \bar{A} \\ v \in \bar{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \\ v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \end{cases} \text{ entonces:}$$

$$u + v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \Rightarrow u + v \in \bar{A}$$

iv) Si $\alpha \in k, v \in \bar{A} \Rightarrow \alpha v \in \bar{A}$ por probar

$$\text{Si } \alpha \in k \wedge v \in \bar{A} \Rightarrow \alpha \in k \wedge v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow \alpha v = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \alpha_i) v_i$$

$$\Rightarrow \alpha v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \Rightarrow \alpha v \in \bar{A}$$

por lo tanto $(\bar{A}, +, k, \cdot)$ es un subespacio de V.

3.11. SUB-ESPACIO GENERADO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea V un espacio vectorial sobre k y $A \subset V$ un subconjunto de V no vacío, el conjunto de todas las combinaciones lineales de un número finito de elementos de A es un subespacio de V y se denomina el subespacio generado por A y se denota por:

$$L(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i / \alpha_i \in k, v_i \in A \right\}$$

Si A es finito, por ejemplo $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ decimos que $U = L(A)$ es un subespacio finitamente generado.

Ejemplo.- En el espacio vectorial $(R^3, +, R, \cdot)$ consideremos $A = \{(1, 2, -1), (3, 0, 1)\}$, hallar el subespacio $L(A)$.

Solución

Sea $A = \{v_1, v_2\}$ donde $v_1 = (1, 2, -1)$, $v_2 = (3, 0, 1)$

$$L(A) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \alpha, \beta \in R\} = \{\alpha(1, 2, -1) + \beta(3, 0, 1) / \alpha, \beta \in R\}$$

como $L(A) \subset R^3$ entonces $(x, y, z) \in L(A)$

$$\Rightarrow (x, y, z) = \alpha(1, 2, -1) + \beta(3, 0, 1) = (\alpha + 3\beta, 2\alpha, -\alpha + \beta) \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = x \\ 2\alpha = y \\ -\alpha + \beta = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} + 3\beta = x \\ -\frac{y}{2} + \beta = z \end{cases} \Rightarrow x - 2y - 3z = 0$$

$$\text{Luego } L(A) = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y - 3z = 0\}$$

Ejemplo.- Determinar el subespacio de $(R^3, +, R, \cdot)$ generado por la familia A cuyos elementos son los vectores $v_1 = (2, 1, 2)$ y $v_2 = (1, 2, 1)$.

Solución

$$L(A) = \{\alpha v_1 + \beta v_2 / \alpha, \beta \in R\} = \{\alpha(2, 1, 2) + \beta(1, 2, 1) / \alpha, \beta \in R\}$$

como $L(A) \subset R^3 \Rightarrow (x, y, z) \in L(A)$ entonces:

$$(x, y, z) = \alpha(2, 1, 2) + \beta(1, 2, 1) = (2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta) \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \beta \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow x = z, y \in R$$

Luego el espacio generado por los elementos A es:

$$L(A) = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z\}$$

Ejemplo.- Demostrar que los siguientes conjuntos de vectores de R^3 generan el mismo subespacio $A = \{(1, 0, -1), (0, -2, 1)\}$, $B = \{(1, -2, 0), (2, -2, -1)\}$

Solución

Por demostrar que $L(A) = L(B)$

A genera el subespacio $L(A)$ de R^3 entonces:

$$L(A) = \{\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, -2, 1) / \alpha, \beta \in R\}$$

Como $L(A) \subset R^3 \Rightarrow (x, y, z) \in L(A)$ de donde $(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, -2, 1)$

$(x, y, z) = (\alpha, -2\beta, -\alpha + \beta)$ por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -2\beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ -\frac{y}{2} = \beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego } L(A) = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y + 2z = 0\} \quad \dots(1)$$

B genera el subespacio $L(B)$ de R^3 entonces

$$L(B) = \{\alpha(1, -2, 0) + \beta(2, -2, -1) / \alpha, \beta \in R\}$$

Como $L(B) \subset R^3 \Rightarrow (x, y, z) \in L(B)$ entonces

$$(x, y, z) = \alpha(1, -2, 0) + \beta(2, -2, -1) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha - 2\beta, -\beta), \text{ por igualdad se tiene:}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha - 2\beta \\ z = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ \frac{y}{2} = \alpha - \beta \\ z = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego } L(B) = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y + 2z = 0\} \quad \dots(2)$$

$$\text{Por lo tanto de (1) y (2) se tiene: } L(A) = L(B)$$

Ejemplo.- Hallar un vector en R^3 que genera la intersección de U y W donde U es el plano XY: $U = \{(x, y, 0) \in R^3 / x, y \in R\}$ y W es el espacio generado por los vectores (1,2,3) y (1,-1,1)

Solución

$$\text{Sea } (x, y, z) \in U \wedge W \Rightarrow (x, y, z) \in U \wedge (x, y, z) \in W \Rightarrow z = 0 \text{ y como}$$

$$(x, y, z) = (x, y, 0) \in W \Rightarrow (x, y, 0) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, -1, 1)$$

$$(x, y, 0) = (\alpha + \beta, 2\alpha - \beta, 3\alpha + \beta) \text{ de donde}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = 2\alpha - \beta \\ 0 = 3\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3\alpha \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{3} = \alpha \\ \beta = -3\alpha \end{cases}$$

$$(x, y, 0) = \frac{x+y}{3}(1, 2, 3) - (x+y)(1, -1, 1)$$

$$= \left(\frac{x+y}{3} - x - y, \frac{2}{3}(x+y) + x + y, x + y - x - y\right)$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(x+y), \frac{5}{3}(x+y), 0\right] = \frac{x+y}{3}(-2, 5, 0) = \alpha(-2, 5, 0)$$

El vector que genera la intersección de U y W es (2,-5,0).

b) **PROPOSICIÓN.-** Sea el espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$, $A \neq \emptyset$, $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ y $\{w_i\}_{i \in I}$ una familia de subespacios tales que $A \subset w_i$, para todo $i \in I$, entonces: $L(A) = \bigcap_{i \in I} w_i$

Demostración

i) Probaremos que $L(A) = \bigcap_{i \in I} w_i$

sea $v \in L(A)$, entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k$ tal que:

$$v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, v_j \in A, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

pero como $A \subset w_i, \forall i \in I, \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j; v_1, v_2, \dots, v_n \in w_i, \forall i \in I$$

$$\Rightarrow v \in w_i, \forall i \in I \Rightarrow v \in \bigcap_{i \in I} w_i \Rightarrow L(A) \subset \bigcap_{i \in I} w_i$$

ii) Ahora verificaremos que $\bigcap_{i \in I} w_i \subset L(A)$

$A \subset L(A)$, en efecto, para $v_j \in A, j=1, \dots, n$ se puede escribir siempre:

$$v_j = 0.v_1 + \dots + 0.v_{j-1} + 1.v_j + 0.v_{j+1} + \dots + 0.v_n, \forall j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow A \subset L(A) \Rightarrow L(A) = w_{i_0} \text{ para algún } i_0 \in I$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i \in I} w_i \subset w_i = L(A) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} w_i \subset L(A)$$

Luego de (i) y (ii) se tiene:
$$L(A) = \bigcap_{i \in I} w_i$$

OBSERVACIÓN.- A la proposición que se demuestra también podemos enunciar diciendo que $L(A)$ es el menor de todos los subespacios que contiene a A .

3.12. INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL.-

a) **DEFINICIÓN.-** Un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \neq \emptyset$ de un espacio vectorial V sobre un campo k , diremos que es

linealmente (l.i) si y sólo si $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \theta \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ no cumple esta condición diremos que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente (l.d) es decir:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \theta \text{ y } \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i \text{ entre } 1 \text{ y } n.$$

Ejemplo.- Determinar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores:

1) $V = R^2, k = R, v_1 = (2, 4), v_2 = (0, 3)$

Solución

Sea $av_1 + bv_2 = (0, 0)$, la combinación lineal

$$a(2, 4) + b(0, 3) = (0, 0), \text{ de donde } (2a, 4a + 3b) = (0, 0)$$

por igualdad se tiene:
$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$$

como $a = b = 0$ por lo tanto $v_1 = (2, 4), v_2 = (0, 3)$ son l.i

2) $V = R^3, k = R, v_1 = (1, 3, \sqrt{2}), v_2 = (0, 0, 0), v_3 = (\frac{1}{2}, 0, 10)$

Solución

$av_1 + bv_2 + cv_3 = (0, 0, 0)$ la combinación lineal

$$a(1, 3, \sqrt{2}) + b(0, 0, 0) + c(\frac{1}{2}, 0, 10) = (0, 0, 0), \text{ de donde}$$

$$(a + \frac{c}{2}, 3a, \sqrt{2}a + 10c) = (0, 0, 0), \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} a + \frac{c}{2} = 0 \\ 3a = 0 \\ \sqrt{2}a + 10c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

como $a = c = 0$ y $b \neq 0$ por lo tanto: v_1, v_2, v_3 son l.d.

OBSERVACIÓN.- Toda combinación lineal que contiene al vector cero es l.d.

3) $V = R^3, k = R, v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (2, -1, 1) \text{ y } v_3 = (-1, 8, -11)$

Solución

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0,0,0)$ la combinación lineal:

$\alpha(1,2,-3) + \beta(2,-1,1) + \gamma(-1,8,-11) = (0,0,0)$, de donde:

$(\alpha + 2\beta - \gamma, 2\alpha - \beta + 8\gamma, -3\alpha + \beta - 11\gamma) = (0,0,0)$, por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + 8\gamma = 0 \\ -3\alpha + \beta - 11\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10\alpha + 15\beta = 0 \\ -3\alpha + \beta - 11\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{2}\beta \\ \gamma = \frac{\beta}{2} \end{cases}$$

para $\beta = -2$, $\alpha = 3$, $\gamma = -1$ luego $3v_1 - 2v_2 - v_3 = (0,0,0)$

por lo tanto son l.d.

- 4) $V = C^2$, $k = C$, $\alpha_1 = (i,0)$, $\alpha_2 = (0,i)$, $i^2 = -1$

Solución

Sea $\alpha \in V = C^2 \Rightarrow \alpha = (u,v)$ pero $u,v \in C$ entonces

$u = a + bi$ y $v = c + di$ con $a,b,c,d \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha = (a + bi, c + di)$ como

$\alpha_1 = (i,0)$, $\alpha_2 = (0,i) \in C^2 \Rightarrow \alpha_1 = (0+i, 0+0i)$ y $\alpha_2 = (0+0i, 0+i)$

$0 \in C^2 \Rightarrow 0 = (0+0i, 0+0i)$

Sea la combinación lineal: $a\alpha_1 + b\alpha_2 = (0,0)$, con $a,b \in C$

$$\Rightarrow (a_1 + b_1i)(i,0) + (a_2 + b_2i)(0,i) = (0+0i, 0+0i)$$

$$\Rightarrow (a_1i - b_1, 0) + (0, a_2i - b_2) = (0+0i, 0+0i)$$

$$\Rightarrow (a_1i - b_1, a_2i - b_2) = (0+0i, 0+0i)$$

$$\Rightarrow a_1i - b_1 = 0+0i \wedge a_2i - b_2 = 0+0i$$

$a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$ de donde α_1, α_2 son l.i

Ejemplo.- En el espacio vectorial de funciones $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, k, \cdot)$ el conjunto de funciones es $\{e^t, e^{2t}\}$, determinar si son linealmente independiente.

Solución

$\alpha e^t + \beta e^{2t} = 0$, la combinación lineal

como $\alpha e^t + \beta e^{2t} = 0$, derivando se tiene: $\alpha e^t + 2\beta e^{2t} = 0$

resolviendo el sistema $\alpha = \beta = 0$

por lo tanto $\{e^t, e^{2t}\}$ son linealmente independiente.

Ejemplo.- En $(\mathbb{R}^I, +, R, \cdot)$ donde $I = [0,1]$ determinar si los vectores $v_1 = \sin t$ y $v_2 = \cos t$ son linealmente independiente.

Solución

$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$, la combinación lineal $\begin{cases} \alpha \sin t + \beta \cos t = 0 \\ \alpha \cos t - \beta \sin t = 0 \end{cases}$, derivando

ahora resolviendo el sistema se tiene:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos t \\ 0 & -\sin t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}} = \frac{0-0}{-\sin^2 t - \cos^2 t} = 0$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix}} = \frac{0-0}{-\sin^2 t - \cos^2 t} = 0$$

Luego la única solución es: $\alpha = \beta = 0$

Por lo tanto $\{\sin t, \cos t\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo.- Sabiendo que dos vectores v_1 y v_2 son linealmente independiente en $(V, +, k, \cdot)$ demostrar que $v_1 + v_2$ y v_2 son linealmente independiente.

Solución

Consideremos la combinación lineal de la familia de vectores $\{v_1 + v_2, v_2\}$ que sea igual al vector nulo con escalares α y β que determinaremos.

$$\alpha(v_1 + v_2) + \beta v_2 = \theta, \text{ por distributividad respecto de la suma en } k$$

$$\alpha v_1 + (\alpha + \beta)v_2 = \theta, \text{ como } v_1, v_2 \text{ son l.i. entonces } \alpha = 0 \wedge \alpha + \beta = 0$$

de donde $\alpha = \beta = 0$

por consiguiente $v_1 + v_2, v_2$ son linealmente independiente.

b) PROPOSICIÓN.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial:

- ① Un vector $v \in V$ es l.i. si y sólo si $v \neq \theta$.
- ② Si v_1, v_2, \dots, v_n son l.i. entonces v_1, v_2, \dots, v_m donde $1 \leq m \leq n$ también son l.i.

Solución

① \Rightarrow) asumamos que V es l.i. en V .

por el absurdo supongamos que $v = \theta$ entonces $av = \theta, \forall a \in k$, en particular si elegimos $a = 1$, tenemos que $1.v = \theta$ lo cual es una contradicción con el hecho que V es l.i. Luego $v \neq \theta$

\Leftrightarrow) Ahora asumiendo que $v \neq \theta$

$$av = \theta \Rightarrow a = 0 \vee v = \theta$$

pero como $v \neq \theta$ por hipótesis, resulta que $a=0$ y en consecuencia V es l.i.

$$\textcircled{2} \quad \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n a_i v_i + \sum_{i=m+1}^n a_i v_i = \theta$$

$\Rightarrow a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ por ser v_1, v_2, \dots, v_n linealmente independiente

$\Rightarrow a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$ pues $m < n$

$\therefore v_1, v_2, \dots, v_m$ son linealmente independiente.

c) Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial, $S \subset V$, diremos que S es linealmente independiente, si todo subconjunto finito de S es linealmente independiente.

En caso contrario diremos que S es linealmente dependiente.

d) PROPOSICIÓN.- Sea S y S' subconjuntos de V tal que $S \subset S'$, entonces

- ① Si S' es linealmente independiente, entonces S también lo es.
- ② Si S es linealmente dependiente, también lo es S' .

Demostración

Ejercicio para el lector

3.13. SISTEMA DE GENERADORES.-

- a) **DEFINICIÓN.-** Consideremos un espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$ la familia $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \neq \emptyset$ de vectores de V es un sistema de generadores de V si y sólo si todo vector de V puede expresarse como combinación lineal de los vectores de A , o bien A es un sistema de generadores de V si y sólo si el subespacio generado por A es V .

NOTACIÓN.-

La abreviatura de "sistema de generadores" es "S.G."

La abreviatura de "combinación lineal" es "C.L."

Expresando en forma simbólica la definición se tiene:

$$A \text{ es un S.G. de } V \Leftrightarrow v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \text{ o bien:}$$

$$A \text{ es un S.G. de } V \Leftrightarrow L(A) = V$$

Ejemplo.- Determinar si el conjunto de vectores $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ de $(R^3, +, R, \cdot)$ constituye un sistema de generadores de R^3 .

Solución

Veremos si se cumple $L(A) = R^3$ para que sea S.G.

$$(x, y, z) \in R^3 \Rightarrow (x, y, z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) \quad \dots (1)$$

$$(x, y, z) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta, \alpha) \text{ de donde } \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = y - z \\ \gamma = x - y \end{cases}$$

reemplazando los valores de α, β y γ en (1)

$$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0)$$

Luego $(x, y, z) \in R^3$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $(1,1,0)$, $(1,1,0)$ u $(1,0,0)$

Por lo tanto genera a R^3 es decir $L(A) = R^3$

Entonces $A = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ es S.G.

OBSERVACIÓN.- El concepto de sistema de generadores de un espacio vectorial es independiente de la independencia o dependencia lineal del sistema, ósea un sistema de generadores puede ser linealmente independiente o no.

- b) **PROPOSICIÓN.-** Si la familia $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un S.G., L.D. de V entonces existe $v_j \in A$ tal que $A - \{v_j\}$ es un S.G. de V .

Demostración

Por ser A un sistema de generadores de V , se define

$$v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \dots (1)$$

como A es linealmente dependiente entonces algún vector de A , digamos v_j , es combinación lineal de los restantes, ósea

$$\exists v_j \text{ tal que } v_j = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \quad \dots (2)$$

teniendo en cuenta (1) y (2) se puede escribir

$$v = \alpha_j v_j + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i = \alpha_j \sum_{i \neq j} \beta_i v_i + \sum_{i \neq j} \alpha_i v_i = \sum_{i \neq j} (\alpha_j \beta_i + \alpha_i) v_i = \sum_{i \neq j} \gamma_i v_i$$

En consecuencia, $A - \{v_j\}$ es un sistema de generadores de V .

3.14. BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL.-

a) **DEFINICIÓN.-** Una base de un espacio vectorial V es un conjunto

$A \subset V$, $A \neq \emptyset$ tal que:

i) A es un conjunto linealmente independiente.

ii) A genera a V es decir $L(A) = V$.

Ejemplo.- Probar que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de $(R^3, +, R, \cdot)$

Solución

Probaremos que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es linealmente independiente

$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$ la combinación lineal

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Luego $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es un conjunto linealmente independiente

Ahora probaremos que $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ genera a R^3

Es decir que $L\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = R^3$ pero $L\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset R^3$

esto siempre es cierto y para probar $R^3 \subset L\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$\text{sea } (x, y, z) \in R^3 \Rightarrow (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$

entonces $(x, y, z) \in L\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

de donde $R^3 \subset L\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

por lo tanto $R^3 = L\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

Luego $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de R^3 .

Ejemplo.- Hallar una base para $A = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y + 2z = 0\}$ subespacios de $(R^3, +, R, \cdot)$

Solución

Sea $(x, y, z) \in A \Rightarrow 2x + y + 2z = 0 \Rightarrow y = -2x - 2z$, luego

$$(x, y, z) = (x, -2x - 2z, z) = (x, -2x, 0) + (0, -2z, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -2, 1), \quad x, z \in R$$

$$A = L\{(1, -2, 0), (0, -2, 1)\}$$

El conjunto $\{(1, -2, 0), (0, -2, 1)\}$ es una base, pues:

i) $\{(1, -2, 0), (0, -2, 1)\}$ es linealmente independiente.

ii) $A = L\{(1, -2, 0), (0, -2, 1)\}$

b) PROPOSICIÓN.- Un conjunto de elementos $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ del espacio vectorial V sobre un campo k forma una base si y sólo si $\forall v \in V$, v puede ser expresado de una única forma como combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

Demostración

\Rightarrow Asumamos que v_1, v_2, \dots, v_n es una base, sabemos que $\forall v \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_n .

Supongamos que v se puede expresar de dos formas es decir:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n b_i v_i, \text{ entonces: } \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) v_i = 0, \text{ pero como}$$

v_1, v_2, \dots, v_n son l.i. entonces $a_i - b_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ de donde $a_i = b_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$

\Leftrightarrow Recíprocamente. Asumamos que v_1, v_2, \dots, v_n tiene la propiedad que $\forall v \in V, v$ puede ser expresado de una única forma como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_n por lo tanto es $L\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$, nos resta probar que v_1, v_2, \dots, v_n son l.i.

Supongamos que $\sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i$, entonces, por la unicidad

$a_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Luego $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forma una base.

c) **LEMA.** Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de generadores para el espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$.

Sea $v \neq \theta, v \in V$ tal que $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ si $a_i \neq 0$ para algún i , entonces

$V = L\{S_i\}$ donde $S_i = S \cup \{v\} \cup \{v_i\}, S_i = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n\}$

Demostración

Sea $u \in V$ un elemento arbitrario, mostraremos que u se puede expresar como una combinación lineal de elementos de S_i .

$$\text{Por hipótesis } v = L\{S\} \Rightarrow u = \sum_{i=1}^n b_i v_i \quad \dots (1)$$

Además tenemos que: $\theta \neq v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \Rightarrow v = \sum_{j \neq i} a_j v_j + a_i v_i$

$$\Rightarrow v_i = \frac{v}{a_i} + \sum_{j \neq i} \left(-\frac{a_j}{a_i}\right) v_j \dots (2)$$

reemplazando (2) en (1) se tiene:

$$\begin{aligned} u &= b_1 v_1 + \dots + b_i \left(\frac{v}{a_i} + \sum_{j \neq i} \left(-\frac{a_j}{a_i}\right) v_j\right) + \dots + b_n v_n \\ &= \left(b_1 - \frac{b_i a_1}{a_i}\right) v_1 + \left(b_2 - \frac{b_i a_2}{a_i}\right) v_2 + \dots + \left(\frac{b_i}{a_i}\right) v_3 + \dots + \left(b_n - \frac{b_i a_n}{a_i}\right) v_n \end{aligned}$$

$$\text{denotando } c_1 = b_1 - \frac{b_i a_1}{a_i}, c_2 = b_2 - \frac{b_i a_2}{a_i}, \dots, c_n = b_n - \frac{b_i a_n}{a_i}$$

de donde se tiene $u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_i v + \dots + c_n v_n$

$$\therefore V = L\{S_i\}$$

d) **PROPOSICIÓN.** Sean $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ y $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset L\{S\}$. Si S' es linealmente independiente, entonces $m \leq n$.

Demostración

Consideremos $v_i = L\{S\}$

$$\text{Sea } u_i \in v_i \Rightarrow u_i = \sum_{j=1}^n a_j v_j$$

Supongamos que $a_1 \neq 0$ (reordenando si fuera necesario) y por el lema anterior $L\{u_1, v_2, \dots, v_n\} = V_1$

ahora sea $\theta \neq u_2 \in V_1 \Rightarrow u_2 = b_1 u_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n \Rightarrow b_1 \neq 0, i \geq 2$, pues de suponer lo contrario resultaría $u_2 = b_2 u_1$ que es una contradicción ya que u_2 es linealmente independiente.

Suponemos que $b_2 \neq 0$ (reordenando si fuera necesario) y aplicando nuevamente el lema anterior tenemos que:

$$L = \{u_1, u_2, v_3, \dots, v_n\} = v_1 \quad \text{afirmación } m \leq n$$

por el absurdo, supongamos que $m > n$, entonces el proceso anterior se podría seguir inductivamente hasta obtener $L\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = v_1$

pero si $m > n \Rightarrow m \geq n + 1 \Rightarrow u_{n+1}$ por estar en V_1 sería combinación lineal de u_1, u_2, \dots, u_n , lo que es una contradicción con el hecho de que $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ es l.i., dicha contradicción proviene de a ver supuesto que $m > n$.

e) COROLARIO.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial. Si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $S' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ son bases del espacio vectorial V , entonces $n=m$.

Demostración

i) S base de $V \Rightarrow L\{S\} = V$ por otra parte, $S' \subset V = L\{S\}$, y S' linealmente independiente por ser base de V , en virtud de la proposición (d) $m \leq n$.

ii) Análogamente, S' base de $V \Rightarrow L\{S'\} = V$ como $S \subset V = L\{S'\}$ y S linealmente independiente por ser base de V , aplicando nuevamente la proposición (d) resulta que $n \leq m$.

Luego de i) y ii) se sigue que $m = n$.

OBSERVACIÓN.-

- ① Del corolario podemos observar que si V tiene una base infinita, entonces cualquier otra base tiene un número infinito de números.
- ② Todo espacio vectorial posee una base finita o infinita.
- ③ Todas las bases de un mismo espacio vectorial son coordinables, quiere decir que existe una bisección $B_1 \leftrightarrow B_2$

1.15. DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL.

a) DEFINICIÓN.- El espacio vectorial V se denomina finita dimensional (o de dimensión finita) si posee una base constituida por un número finito de vectores (es decir si tiene una base finita).

Ejemplo.- 1) $V = k^n$, $S = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$

$$2) V = M_{2 \times 2}(R), k=R, S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) DEFINICIÓN.- Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo k de dimensión finita y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V , entonces por definición la dimensión del espacio vectorial V es el número "n" lo cual denotamos por $\dim_k V = n$ (donde "n" es número de vectores que constituyen una de las bases de V)

OBSERVACIÓN.-

- ① Si V tiene como único elemento el vector nulo, convenimos que la dimensión de V es cero, es decir $\dim_k \{\theta\} = 0$.
- ② Si V tiene una base infinita, la dimensión de V denotamos por $\dim_k V = \infty$.

Ejemplo.-

- 1) Una base de R^3 es $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ entonces su dimensión es: $\dim_R R^3 = 3$.
- 2) Si $V = k^n$ un espacio vectorial sobre k donde $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ es una base de k^n entonces $\dim_k k^n = n$.
- 3) Si $V = M_{2 \times 2}(R)$ el espacio vectorial de matrices cuadradas, $k = R$ y $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ una base de $M_{2 \times 2}(R)$ entonces $\dim_k M_{2 \times 2}(R) = 4$.

Ejemplo.- Determinar una base del espacio vectorial $V = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y = 0, x, y \in R\}$ de dimensión finita.

Solución

Calculando una base de V .

$$\text{Si } (x, y, z) \in V \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow y = x$$

$$(x, y, z) = (x, x, z) = (x, x, 0) + (0, 0, z)$$

$$(x, y, z) = x(1, 1, 0) + y(0, 0, 1)$$

como $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ son l.i. entonces es una base de V y $\dim_R V = 2$.

c) **PROPOSICIÓN.-** Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial finito dimensional (asumamos que $\dim_k V = n$) se cumple:

- i) Si $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset V$, donde $m > n$, entonces S es l.d. sobre k .
- ii) Si $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\} \subset V$ donde $m < n$ entonces $L\{S\} \subsetneq V$.
- iii) Si $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es l.i. sobre k , entonces S es una base para V .
- iv) Si $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ genera V , entonces S es una base para V .

Demostración (Queda como ejercicio)

d) **LEMA.-** Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ un subconjunto l.i. de un espacio vectorial V sobre un campo k , si $\theta \neq v \in V$ es un vector que $v \notin L\{S\}$ entonces $S' = \{v_1, \dots, v_m, v\}$ es también l.i. sobre k .

Demostración

Sea $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m + \alpha v = \theta$, la combinación lineal afirmamos que $\alpha = 0$, pues si suponemos que $\alpha \neq 0$ tenemos

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} v_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha} v_m \Rightarrow v \in L\{S\}, \text{ lo cual es una}$$

contradicción ya que por hipótesis se tiene $v \notin L\{S\}$ entonces $\alpha = 0$ y como $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ resulta que S' es l.i.

e) **TEOREMA.- (Complementación de Bases)**

Sea V un espacio vectorial sobre un campo k , tal que: $\dim_k V = n$, W subespacio de V y $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es base de W , entonces se cumple:

i) $m \leq n$

ii) Si $m < n$, entonces existen $v_{m+1}, \dots, v_n \in V$ tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es una base para V .

Demostración

i) Sea $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base para V entonces $V = L\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ para $L\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \supset \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ y en virtud de la proposición

(d) de (3.14.) se tiene que $m \leq n$ pues como $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es base en l.i.

ii) Si $m < n$, entonces $W \subsetneq V$, luego existe $v_{m+1} \in V$ tal que:

$v_{m+1} \notin W \Rightarrow v_{m+1} \notin L\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \Rightarrow$ por el lema (d) se tiene $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ es l.i.

Si $L\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\} = V$, entonces la prueba finaliza.

En caso contrario, esto es si $L\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\} \subsetneq V$, existe

$v_{m+2} \in V$ tal que $v_{m+2} \notin L\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}\}$ entonces nuevamente en virtud del lema d) se tiene $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}\}$

es l.i.

Si $L\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, v_{m+2}\} = V$, entonces la demostración concluye, en caso contrario seguimos el proceso anterior pero por hipótesis la $\dim_k V = n$, entonces existirán solo un número finito

$v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+p} \in V$ tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+p}\}$ es

una base cuando $m+p = n$ ya que para $n = m+p$,

$\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_{m+p}\}$ es l.i. y además genera V .

1.16. COLORARIO.- Sea W un subespacio de un espacio vectorial V sobre k entonces se verifica que:

$$V = W \Leftrightarrow \dim_k V = \dim_k W$$

Demostración

i) Si el subespacio W es el mismo V , entonces es obvio que $\dim_k W = \dim_k V$.

ii) Supongamos que W es un subespacio de V y que verifica $\dim_k W = \dim_k V$.

Si la dimensión común es 0, entonces tanto W como V tienen un único elemento al vector nulo y son idénticos.

Si la $\dim_k W = \dim_k V = n > 0$ entonces consideremos una base de W , $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ estos n vectores son l.i. en V y de acuerdo al corolario (e) de (3.14.) constituye una base de V entonces son un S.G. de V lo cual nos dice que todo vector de V pertenece a W , o sea $V \subset W$ y por la definición de subespacios $W \subset V$, resulta que $W = V$.

1.16. DIMENSIÓN DE LA SUMA.-

TEOREMA.- Sean U y W dos subespacios de $(V, +, k)$ y la dimensión de V es finita, entonces se verifica que:

$$\dim_k (U + W) = \dim_k U + \dim_k W - \dim_k (U \cap W)$$

Demostración

Como V es de dimensión finita sobre k , sea $\dim_k U = p$, $\dim_k W = q$ y $\dim_k (U \cap W) = r$.

Consideremos $U \cap W \neq \emptyset$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ una base para $U \cap W$, como $U \cap W$ es un subespacio de U y W respectivamente, por el teorema de complementación de bases, completamos la base $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ a bases para U y W . Sean: $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}\}$ base para U y $\{v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{q-r}\}$ base para W .

AFIRMACIÓN.- El conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}, w_1, \dots, w_{q-r}\}$ es una base para $U + W$.

La demostración de esta afirmación es:

i) Que sea linealmente independiente.

Consideremos la combinación lineal

$$\sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i + \sum_{i=1}^{q-r} c_i w_i = \theta \quad \dots (1)$$

$$\sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i = - \sum_{i=1}^{q-r} c_i w_i \quad \dots (2)$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{q-r} c_i w_i \in U \cap W$, pues de la relación (2), por un lado por ser igual a una combinación lineal de elementos de $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}\}$, está en U y por otro lado por una combinación lineal de elementos de $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{q-r}\}$, está en W .

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{q-r} c_i w_i = \sum_{i=1}^r d_i v_i \quad \dots (3)$$

entonces reemplazando (3) en (1) tenemos

$$\sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i + \sum_{i=1}^r d_i v_i = \theta \Rightarrow \sum_{i=1}^r (a_i + d_i) v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i = \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_i + d_i = 0 \\ b_i = 0 \end{cases}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad \dots (4)$$

pues $\{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}\}$ es una base para $U \Rightarrow$ como $b_i = 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, p-r$ en (1) se tiene:

$$\sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^{q-r} c_i w_i = \theta \Rightarrow \begin{cases} a_i = 0 \\ b_i = 0 \end{cases}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad \dots (5)$$

$$\begin{cases} a_i = 0 \\ b_i = 0 \end{cases}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, q-r \quad \dots (6)$$

pues $\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{q-r}\}$ es una base para W .

\Rightarrow de (4), (5) y (6) resulta que:

$$a_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, r, \quad b_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, p-r, \quad c_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, q-r$$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}, w_1, \dots, w_{q-r}\}$ es l.i.

ii) Que genera a $U + W$.

Sea $v \in U + W$, por definición de subespacio suma:

$v = u + w$, donde $u \in U$ y $w \in W$

$$\text{pero } u = \sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i \quad \text{y} \quad w = \sum_{i=1}^r c_i v_i + \sum_{i=1}^{q-r} d_i w_i$$

$$\Rightarrow v = \left(\sum_{i=1}^r a_i v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i \right) + \left(\sum_{i=1}^r c_i v_i + \sum_{i=1}^{q-r} d_i w_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^r (a_i + c_i) v_i + \sum_{i=1}^{p-r} b_i u_i + \sum_{i=1}^{q-r} d_i w_i$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}, w_1, \dots, w_{q-r}\}$ genera a $U + W$ de (i) y (ii) la afirmación queda demostrada como

$\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{p-r}, w_1, \dots, w_{q-r}\}$ es una base de $U + W$ resulta que:

$$\begin{aligned} \dim_k(U + W) &= r + (p-r) + (q-r) = p + q - r \\ &= \dim_k U + \dim_k W - \dim_k(U \cap W) \end{aligned}$$

Ejemplo.- Determinar la dimensión de la suma de los siguientes subespacios de $(R^3, +, \cdot)$, $U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y - z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x - z = 0\}$

Solución

Por calcular $\dim(U + W) = ?$

Como $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Calculando una base para U , si $(x, y, z) \in U$ entonces $x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$

Luego $(x, y, z) = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$

como $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es linealmente independiente entonces $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de U de donde $\dim U = 2$

Calculando una base para W , si $(x, y, z) \in W$ entonces $x - z = 0 \Rightarrow z = x$

Luego $(x, y, z) = (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0)$

Como $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ es linealmente independiente entonces $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ es una base de W de donde $\dim W = 2$

Ahora calculando una base para $U \cap W$

$$\text{Si } (x, y, z) \in U \cap W \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

$$\text{Si } (x, y, z) \in U \cap W \Rightarrow (x, y, z) = (x, 0, x) = x(1, 0, 1)$$

Luego $\{(1, 0, 1)\}$ es una base de $U \cap W \Rightarrow \dim U \cap W = 1$

Por lo tanto se tiene: $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 2 + 2 - 1 = 3$

$$\therefore \dim(U + W) = 3$$

1.17. DIMENSIÓN DE LA SUMA DIRECTA.-

Si U y W son dos subespacios del espacio vectorial $(V, +, \cdot)$. Si $U \cap W = \{0\}$ (conjuntos disjuntos) entonces $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Es decir que la dimensión de la suma directa es igual a la suma de las dimensiones de U y W .

En este caso $U \cap W = \{0\}$, entonces $\dim U \cap W = 0$

Ejemplo.- Si $A = \{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1)\}$ es un sistema de generadores de U de $V_4(R)$ y $B = \{(3, 0, 2, 1)\}$ es un sistema de generadores de W de $V_4(R)$. Probar que $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$

Solución

Como $U = L\{A\} = \{\alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1, 1) / \alpha, \beta \in R\}$

Como $U \subset V_4(R) \Rightarrow (x, y, z, w) = \alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(1, 0, 1, 1)$

$(x, y, z, w) = (\alpha + \beta, 0, \alpha + \beta, \alpha)$ por igualdad

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = 0 \\ w = \alpha \end{cases} \Rightarrow x = y, z = 0, w \in \mathbb{R}$$

$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x = y, z = 0\}$, calculando una base de U

Si $(x, y, z, w) \in U \Rightarrow (x, y, z, w) = (x, x, 0, w) = x(1, 1, 0, 0) + w(0, 0, 0, 1)$

Luego una base de U es $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, de donde $\dim U = 2$

Como $W = L\{B\} = \{\alpha(3, 0, 2, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

Si $(x, y, z, w) \in W \Rightarrow (x, y, z, w) = \alpha(3, 0, 2, 1)$

$$\begin{cases} x = 3\alpha \\ y = 0 \\ z = 2\alpha \\ w = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3w \\ y = 0 \\ z = 2w \end{cases}$$

Luego $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / w = \frac{x}{3} = \frac{z}{2}, y = 0\}$ una base de W será:

Si $(x, y, z, w) = (3w, 0, 2w, w) = w(3, 0, 2, 1)$ entonces una base de W es: $\{(3, 0, 2, 1)\}$, de donde $\dim W = 1$

Calculando $U \cap W$ es decir: $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x = y, z = 0\}$

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / z = 2w, x = 3w, y = 0\}$$

como $z = 0, w = 0, y = 0, x = 0$ entonces

$$U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\} \Rightarrow \dim U \cap W = 0$$

$$\therefore \dim U \oplus W = \dim U + \dim W = 2 + 1 = 3$$

Ejemplo.- Sean los subespacios vectoriales de $V_4(\mathbb{R})$

$$A = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x + y - z + w = 0\} \text{ y}$$

$$B = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / x - y - z - w = 0\}$$

Determinar a) Una base de A y $\dim A$

b) Una base de B y $\dim B$

c) Una base de $A \cap B$ y $\dim A \cap B$

d) Calcular $\dim(A + B)$

Solución

a) Calculando una base para el subespacio A

$$x + y - z + w = 0 \Rightarrow z = x + y + w$$

Si $(x, y, z, w) \in A$ entonces

$$(x, y, z, w) = (x, y, x + y + w, w) = (x, 0, x, 0) + (0, y, y, 0) + (0, 0, w, w)$$

$$(x, y, z, w) = x(1, 0, 1, 0) + y(0, 1, 1, 0) + w(0, 0, 1, 1)$$

Luego $A = L\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ es decir que:

$\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ es un sistema de generadores y además es linealmente independiente (probarlo)

Por lo tanto una base de A es $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ y $\dim A = 3$

b) Calculando una base para el subespacio $B = L\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$

$$x - y - z - w = 0 \Rightarrow x = y + z + w$$

Si $(x, y, z, w) \in B$ entonces $= W \text{ mib} + U \text{ mib} = W \oplus U \text{ mib} \therefore$

$$(x, y, z, w) = (y + z + w, y, z, w) = (y, y, 0, 0) + (z, 0, z, 0) + (w, 0, 0, w)$$

$$(x, y, z, w) = y(1, 1, 0, 0) + z(1, 0, 1, 0) + w(1, 0, 0, 1)$$

Luego $B = L = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$, es decir que:

$\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ es un sistema de generadores y además son linealmente independiente (probarlo)

Por lo tanto una base para B es $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ y su $\dim B = 3$

c) Calculando una base para el subespacio $A \cap B$

$$\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ x - y - z - w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ w = -y - z \end{cases}$$

$$\text{Si } (x, y, z, w) \in A \cap B \Rightarrow (x, y, z, w) = (0, y, z, -y - z) = (0, y, 0, -y) + (0, 0, z, -z)$$

$$(x, y, z, w) = y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1)$$

Luego $A \cap B = L\{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$, es decir que $\{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ es un sistema de generadores y además linealmente independiente (probarlo)

Por lo tanto una base para $A \cap B$ es $\{(0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1)\}$ y su $\dim A \cap B = 2$

d) Calculando $\dim(A + B)$

$$\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B) = 3 + 3 - 2 = 4 \quad (\text{por la parte a, b, c})$$

$$\therefore \dim(A + B) = 4$$

Ejemplo.- Si U está generado por $\{(1, 2, 1), (0, 1, 2)\}$ y W está generado por $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$

a) Hallar una base para $U \cap W$

b) Determinar $\dim(U + W)$

Solución

Calculando los subespacios generados

$$U = L\{(1, 2, 1), (0, 1, 2)\} = \{\alpha(1, 2, 1) + \beta(0, 1, 2) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Si } (x, y, z) \in U \Rightarrow (x, y, z) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(0, 1, 2)$$

$$(x, y, z) = (\alpha, 2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta) \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha + \beta \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \beta \\ \frac{z - x}{2} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = \frac{z - x}{2} \\ 2y - 4x = z - x \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego } U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y + z = 0\}$$

$$\text{Calculando una base de } U: 3x - 2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y - 3x$$

$$(x, y, z) \in U \Rightarrow (x, y, 2y - 3x) = (x, 0, -3x) + (0, y, 2y) = x(1, 0, -3) + y(0, 1, 2)$$

Luego $U = L\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$ es decir que $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$ es un sistema de generadores y además es linealmente independiente por lo tanto una base U es $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$ y $\dim U = 2$

$$W = L\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Si } (x, y, z) \in W \Rightarrow (x, y, z) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$$

$$(x, y, z) = (\alpha, \beta, 0) \Rightarrow x = \alpha, y = \beta, z = 0$$

$W = \{(x, y, z) \in R^3 / z = 0\}$ es el plano XY luego una base para W es

$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ y $\dim W = 2$

a) Calculando una base para $U \cap W$

$$\text{como } 3x - 2y + z = 0 \text{ y } z = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

$$\text{si } (x, y, z) \in U \cap W \Rightarrow y = \frac{3}{2}x, z = 0$$

$$(x, y, z) = (x, \frac{3}{2}x, 0) = \frac{x}{2}(2, 3, 0)$$

Luego $U \cap W = L\{(2, 3, 0)\} \Rightarrow$ una base de $U \cap W$ es $L\{(2, 3, 0)\}$ y $\dim U \cap W = 1$

b) Calculando $\dim(U + W)$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$\therefore \dim(U + W) = 3$$

Ejemplo.- Sean $V = \{ax^2 + bx + c / a, b, c \in R\}$, $S = L\{x^2, (x-1)^2\}$ y

$$T = L\{(x+1)^2\}. \text{ Demostrar que: } V = L\{S\} \oplus L\{T\}$$

Demostración

i) La inclusión $L\{S\} + L\{T\} \subset V$ es fácil de ver

ii) Probaremos la inclusión $V \subset L\{S\} + L\{T\}$

$$ax^2 + bx + c = \alpha x^2 + \beta(x-1)^2 + \gamma(x+1)^2, \text{ donde}$$

$$\alpha x^2 + \beta(x-1)^2 \in S \wedge \gamma(x+1)^2 \in T$$

$$ax^2 + bx + c = (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (2\gamma - 2\beta)x + \beta + \gamma$$

por igualdad de polinomios tendremos que:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = a \\ 2\gamma - 2\beta = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases} \text{ resolviendo el sistema hallamos los valores de } \alpha, \beta \text{ y } \gamma:$$

$$\alpha = a - c, \quad \beta = \frac{b+c}{4}, \quad \gamma = \frac{3c-b}{4}$$

por lo tanto se tiene $V = S + T$ de (i) y (ii)

iii) Ahora veremos que $S \cap T = \{\emptyset\}$

$$\text{sea } P(x) \in (S \cap T) \Rightarrow P(x) \in S \wedge P(x) \in T$$

$$\Rightarrow \alpha x^2 + \beta(x-1)^2 = \gamma(x+1)^2 \Rightarrow (\alpha + \beta)x^2 - 2\beta x + \beta = \gamma x^2 + 2\gamma x + \gamma$$

$$\text{de donde } \begin{cases} \alpha + \beta = \gamma \\ -2\beta = 2\gamma \\ \beta = \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \text{ por lo tanto } S \cap T = \{\emptyset\}$$

Luego como $V = S + T$ y $S \cap T = \{\emptyset\}$ entonces se tiene $V = S \oplus T$

Ejemplo.- Sea $V = R^3$ es el espacio vectorial sobre R.

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + 2y - z = 0\} \text{ y } W = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y = -3z\}$$

calcular $\dim(U \cap W)$

Solución

$$U \cap W = \{(x, y, z) \in V / x + 2y - z = 0 \wedge x - y = -3z\}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow 3y = 4z \Rightarrow x = y - 3z$$

$$3x = 3y - 9z = -5z \Rightarrow x = -\frac{5z}{3}$$

$$U \cap W = \{(x, y, z) \in V / 3y = 4z \wedge x = -\frac{5z}{3}\}$$

Calculando una base de $U \cap W$

$$(x, y, z) \in (U \cap W) \Rightarrow 3y = 4z \wedge 3x = -5z$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3}z \wedge x = -\frac{5}{3}z$$

$$(x, y, z) = (-\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z) = \frac{z}{3}(-5, 4, 3)$$

Luego $U \cap W = L\{(-5, 4, 3)\}$ es decir que $U \cap W$ es generado por $(-5, 4, 3)$ y que es l.i.

Luego $\{(-5, 4, 3)\}$ es una base de $U \cap W$ de donde $\dim(U \cap W) = 1$

Ejemplo.- Sea el espacio vectorial $(R^2, +, R, \cdot)$ y $W = \{(2t, -t) / t \in R\}$, encontrar $U \subseteq R^2$ tal que $R^2 = W \oplus U$

Solución

Como $W = \{(2t, -t) / t \in R\} = \{t(2, -1) / t \in R\}$

$W = L\{(2, -1)\} \Rightarrow \{(2, -1)\}$ es una base para $W \subset R^2$

Completando dicha base para R^2 y sea $\{(2, -1), (2, 1)\}$ definimos $U = L\{(2, 1)\}$ y $R^2 = W \oplus U$

Ejemplo.- Sea el espacio vectorial $(R^3, +, R, \cdot)$ y $W = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x - y + z = 0\}$

a) Hallar una base para W .

b) Encontrar un subespacio U de R^3 tal que $R^3 = W \oplus U$

Solución

a) $W = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x - y + z = 0\}$

Calculando una base para el subespacios de W .

$$\text{Si } (x, y, z) \in W \Rightarrow 3x - y + z = 0 \Rightarrow y = 3x + z$$

$$(x, y, z) = (x, 3x + z, z) = (x, 3x, 0) + (0, z, z) = x(1, 3, 0) + z(0, 1, 1)$$

Luego una base de W es $\{(1, 3, 0), (0, 1, 1)\}$

b) Ahora completaremos la base $\{(1, 3, 0), (0, 1, 1)\}$ de W a una base de R^3 y sea $\{(1, 3, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$ definimos $U = L\{(1, 0, 0)\}$ y $R^3 = W \oplus U$

Ejemplo.- En el espacio vectorial $(R^{2 \times 2}, +, R, \cdot)$ consideremos

$$W = \{A \in R^{2 \times 2} / T_r(A) = 0\}$$

a) Hallar una base para W .

b) Construir un subespacio de $R^{2 \times 2}$ tal que $R^{2 \times 2} = W \oplus U$

Solución

a) Calculando una base para W

$$\text{Si } A \in R^{2 \times 2} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in W \Rightarrow a_{11} + a_{22} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & -a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $W = L\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ de donde

$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ es una base de W y su dimensión es: $\dim W = 3$

- b) Se conoce que $\dim R^{2 \times 2} = 4$, luego completaremos la base de W con una matriz mas de $R^{2 \times 2}$, que sea linealmente independiente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{2 \times 2}$$

$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ es una base para $R^{2 \times 2}$ definiremos

$$U = L\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \text{ y se cumple que } R^{2 \times 2} = W \oplus U$$

3.18. TEOREMA.-

Sea V un espacio vectorial sobre k de dimensión finita, si W es un subespacio propio de V , entonces:

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

Demostración

Sean $\dim V = n$ y $\dim W = m$, donde $m < n$

Consideremos $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ una base para W , entonces por el teorema de complementación de bases, extenderemos dicha base para V , esto es existen v_{m+1}, \dots, v_n elementos de V tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es una base para V .

AFIRMACIÓN: $\{v_{m+1} + w, \dots, v_n + w\}$ es una base de $\frac{V}{W}$ prueba de la afirmación.

- i) Que sea linealmente independiente.

Sea $a_{m+1}(v_{m+1} + w) + \dots + a_n(v_n + w) = \theta + w = w$ (w es el caso de $\frac{V}{W}$)

$$(a_{m+1}v_{m+1} + w) + \dots + (a_nv_n + w) = w \quad (\text{def. de } (\bullet) \text{ en } \frac{V}{W})$$

$$\Rightarrow (a_{m+1}v_{m+1} + \dots + a_nv_n) + w = w \quad (\text{def. de } (+) \text{ en } \frac{V}{W})$$

$$\Rightarrow a_{m+1}v_{m+1} + \dots + a_nv_n \in W \quad \text{de donde}$$

$$a_{m+1}v_{m+1} + \dots + a_nv_n = a_1v_1 + \dots + a_mv_m \quad (\text{por ser } \{v_1, v_2, \dots, v_m\})$$

$$a_1v_1 + \dots + a_mv_m - a_{m+1}v_{m+1} - \dots - a_nv_n = \theta \quad \text{entonces}$$

$a_1 = \dots = a_m = a_{m+1} = \dots = a_n = 0$ puesto que $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es base de V y por lo tanto es linealmente independiente.

Luego como $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = 0$ se tiene que $\{v_{m+1}, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente

- ii) Que genera a $\frac{V}{W}$

Sea $v+w \in \frac{V}{W}$, como $v \in W$ se puede expresar

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^m a_i v_i + \sum_{i=m+1}^n a_i v_i$$

$$\Rightarrow v+w = \left(\sum_{i=1}^m a_i v_i + \sum_{i=m+1}^n a_i v_i \right) + w = \left(\sum_{i=1}^m a_i v_i + w \right) + \left(\sum_{i=m+1}^n a_i v_i + w \right)$$

$$= w + \left(\sum_{i=m+1}^n a_i v_i + w \right) \text{ pues } \sum_{i=1}^m a_i v_i \in W$$

$$= \sum_{i=m+1}^n a_i v_i + w, \text{ puesto que } w \text{ es el caso de } \frac{V}{W}$$

$$= (a_{m+1} v_{m+1} + w) + \dots + (a_n v_n + w)$$

$$= a_{m+1} (v_{m+1} + w) + \dots + a_n (v_n + w)$$

entonces, para todo $v+w \in \frac{V}{W}$, se tiene que

$$v+w = a_{m+1} (v_{m+1} + w) + \dots + a_n (v_n + w)$$

Luego $\frac{V}{W} = L\{v_{m+1} + w, \dots, v_n + w\}$ de (i) y (ii) la afirmación queda probada

De la afirmación se tiene que: $\dim \frac{V}{W} = n - m = \dim V - \dim W$

Ejemplo.- En el espacio vectorial $(R^4, +, R, \cdot)$, consideremos los subespacios $U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x + y - z = t\}$ y

$$W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x - y + z = 0 \wedge x = 2t\}.$$

Hallar: a) $\dim(U + W)$

b) Una base para $\frac{R^4}{U}, \frac{R^4}{W}, \frac{R^4}{U \cap W}$

Solución

a) Calculando $\dim U$, $\dim W$ y $\dim(U \cap W)$

Para U: Como $U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x + y - z = t\}$ entonces

$$(x, y, z, t) \in U \Rightarrow 2x + y - z = t \text{ de donde se tiene}$$

$$(x, y, z, t) = (x, y, z, 2x + y - z) = (x, 0, 0, 2x) + (0, y, 0, y) + (0, 0, z, -z)$$

$$= x(1, 0, 0, 2) + y(0, 1, 0, 1) + z(0, 0, 1, -1)$$

Luego $U = L\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ de donde

$$\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\} \text{ es una base de } U \Rightarrow \dim U = 3$$

Para W: Como $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x - y + z = 0 \wedge x = 2t\}$

$$\text{Si } (x, y, z, t) \in W \Rightarrow x - y + z = 0 \wedge x = 2t \Rightarrow y = x + z = 2t + z$$

$$(x, y, z, t) = (2t, 2t + z, z, t) = (2t, 2t, 0, t) + (0, z, z, 0) = t(2, 2, 0, 1) + z(0, 1, 1, 0)$$

Luego $W = L\{(2, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$, de donde $\{(2, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$, es una base para W $\Rightarrow \dim W = 2$

Para $U \cap W$:

$$U \cap W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x + y - z = t \wedge x - y + z = 0 \wedge x = 2t\}$$

$$= \{(x, y, z, t) \in R^4 / x = t = 0 \wedge y = z\}$$

$$\text{si } (x, y, z, t) \in R^4 \Rightarrow (x, y, z, t) = (0, z, z, 0) = z(0, 1, 1, 0)$$

Luego $U \cap W = L\{(0, 1, 1, 0)\}$, de donde $\{(0, 1, 1, 0)\}$ es una base de $U \cap W \Rightarrow \dim U \cap W = 1$

$$\text{Como } \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 2 - 1 = 4$$

b) Calculando una base para $\frac{R^4}{W}$

de la parte (a) se sabe que $\{(2, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ es una base para W , entonces el teorema de complementación de bases, existen $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1) \in R^4$, tal que $\{(2, 2, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base para R^4 .

Luego por el teorema (3.18) $\{(1, 0, 0, 0) + w, (0, 0, 0, 1) + w\}$ es una base

$$\text{para } \frac{R^4}{W} \text{ y } \dim \frac{R^4}{W} = 2$$

Calculando una base para $\frac{R^4}{U}$ de la parte (a) se sabe que $\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1)\}$ es una base para U , completando dicha base para R^4 ,

Entonces por el teorema de completamiento de bases existe $(0, 1, 1, 1) \in R^4$ tal que $\{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1)\}$ es una base para R^4 .

Luego en virtud del teorema (2.18) $\{(0, 1, 1, 1) + u\}$ es una base para $\frac{R^4}{U}$ y

$$\dim\left(\frac{R^4}{U}\right) = 1$$

Calculando una base para $\frac{R^4}{U \cap W}$

De la parte a) $\{(0, 1, 1, 0)\}$ es una base de $U \cap W$

Completaremos para una base de R^4 entonces $\{(0, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ base de R^4 entonces por el teorema (3.18.) se tiene:

$\{(1, 1, 0, 0) + U \cap W, (1, 0, 0, 0) + U \cap W, (0, 0, 0, 1) + U \cap W\}$ es una base para $\frac{R^4}{U \cap W}$ y $\dim \frac{R^4}{U \cap W} = 3$

1.19. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

1) Dado U, W, T subespacios de un espacio vectorial V . Demostrar que:

$$(U \cap T) + (U \cap W) \subset U \cap (T + W)$$

1) Dado U y W subespacios de V . Demostrar que:

$$U \cup W \text{ es un subespacio de } V \Leftrightarrow U \subset W \text{ ó } W \subset U$$

1) Dados los subespacios $U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y - z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x - 3y + 4z = 0\}$ de R^3 .

a) Hallar $U \cap W$

b) Probar que $R^3 = U + W$

- 4 Sean $U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x + y = 0 ; z - t = 0\}$ y $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x - y - z + t = 0\}$ subespacios de R^4 .

a) Determinar $U \cap W$ b) ¿ $U + W$ es suma directa?

c) ¿ $U + W = R^4$? Justifique

- 5 Sea V el espacio vectorial de las matrices cuadradas sobre el campo R y sean $U = \{A \in V / A = A^t\}$ conjunto de matrices simétricas y $W = \{A \in V / A = -A^t\}$ conjunto de matrices antisimétricas, demuestre que $V = U \oplus W$

- 6 Sean U, V y W subespacios de $(R^3, +, R, \cdot)$, donde $U = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y\}$ y $W = \{(0, 0, z) / z \in R\}$.

a) Calcular $U + V$, $U + W$ y $V + W$
b) Decir en cual de los tres casos anteriores de la parte (a) la suma es directa.

- 7 Dada la recta $L_1 = \{(x, y) \in R^2 / y = 5x\}$, hallar otra recta L_2 tal que $R^2 = L_1 \oplus L_2$.

- 8 Dado el subespacio $T = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x - 3y - 2z = 0\}$ de $(R^3, +, R, \cdot)$. Hallar todos los subespacios S de R^3 tal que $S \oplus T = R^3$.

- 9 Determinar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

a) $V = R^2$, $k = R$, $v_1 = (2, 4)$, $v_2 = (0, 3)$

b) $V = R^3$, $k = R$, $v_1 = (1, 3, \sqrt{2})$, $v_2 = (0, 0, 0)$, $v_3 = (\frac{1}{2}, 0, 10)$

c) $V = C^2$, $k = C$, $v_1 = (i, 0)$, $v_2 = (0, i)$, $i^2 = -1$

d) $V = C^2$, $k = C$, $v_1 = (i, 2)$, $v_2 = (0, 1+i)$

e) $V = C^2$, $k = C$, $v_1 = (1+3i, i)$, $v_2 = (2i-6, -2)$

- 10 Dado el espacio vectorial $(R^3, +, R, \cdot)$. Determinar si los siguientes vectores son linealmente independiente:

a) $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ b) $B = \{(1, -1, 0), (1, 1, 2), (1, 0, 1)\}$

- 11 Probar que los vectores $(-2, 4)$ y $(1, -2)$ son linealmente dependiente en $(R^2, +, R, \cdot)$.

- 12 Sean los vectores $v_1 = (-1, 0, 2)$ y $v_2 = (-1, 2, 4)$ en R^3 , determinar si los vectores $v = (-1, 1, 3)$ y $u = (1, 2, 2)$ son combinación lineal de v_1 y v_2 .

- 13 Determinar si el vector $v = (1, 2, 3)$ es combinación lineal de la familia cuyos elementos son los vectores de R^3 .

$v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$, $v_3 = (1, 1, -2)$

- 14 ¿Son los vectores $v_1 = (1, 1, 2, 4)$, $v_2 = (2, -1, -5, 2)$, $v_3 = (1, -1, -4, 0)$ y $v_4 = (2, 1, 1, 6)$ linealmente independiente en R^4 ?

- 15 Sabiendo que los vectores v_1, v_2 son linealmente independiente en $(V, +, K, \cdot)$. Demostrar que $v_1 + v_2$ y v_2 son linealmente independiente.

- 16) Sabiendo que v_1, v_2, v_3 son vectores linealmente independiente del espacio $(V, +, \cdot, k, \cdot)$ averiguar la dependencia e independencia lineal de los siguientes conjuntos.
- a) $\{v_1 + av_2 + bv_3, v_2 + cv_3, v_3\}$ b) $\{v_1, v_2 + av_3, v_3 + b_2\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
- 17) En un espacio vectorial V sobre k , sean v_1, v_2, v_3 linealmente independiente. Determinar si los siguientes conjuntos son linealmente independiente:
- a) $\{v_1 + v_2 - v_3, v_2 + v_3, 2v_1\}$ b) $\{v_1 + 2v_2 + 3v_3, 2v_1, v_1 + 2v_2 + 3v_3\}$
- 18) Dados los vectores $(1, -4, 6)$, $(1, 4, 4)$ y $(0, -4, x)$ del espacio \mathbb{R}^3 sobre el cuerpo de los reales, determinar x para que sean linealmente independiente.
- 19) Si los vectores u, v y w son linealmente independiente, entonces los vectores $u + 2v - 3w$, $2u + v - w$, $3u + 5v - 6w$ son linealmente independiente.
- 20) Si u, v y w son linealmente independiente. Demostrar que los vectores $u + 2v + 3w$, $v - 2u - w$, $-v - w$ son linealmente dependiente.
- 21) Si los vectores $u + v$, $v + 2w$, $u - 3w$ son linealmente independiente, demostrar que los vectores $4u + 2v - 7w$, $3v + 7w$, $w - u - v$ son linealmente independiente.
- 22) Si u, v y w son vectores linealmente independiente en V mostrar que:
- i) $u + v - 2w$, $u - v - w$ y $u + w$ son linealmente independiente.
- ii) $u + v - 3w$, $u + 3v - w$ y $v + w$ son linealmente dependiente.
- 23) Si los vectores $u + v$, $v - w$, $u - 2v - 3w$ son linealmente independiente, determinar como son los vectores $6u - 5v - 13w$, $2v + 3w$, $2u - v + w$.
- 24) Demostrar que si a, b y c son tres números reales distintos, entonces los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ de \mathbb{R}^3 son linealmente independiente.

- 25) Hallar los valores de x , para los cuales los vectores $u = (x, 1 - x, x)$, $v = (2x, 2x - 1, x + 2)$ y $w = (-2x, x, -x)$ de V_3 son linealmente independiente.
- 26) Demostrar que los vectores u, v y w de V_3 son linealmente independiente de $V_3 \Leftrightarrow [uvw] \neq 0$
- 27) Si u, v y w son vectores linealmente independiente de V_3 , analizar la dependencia lineal de los vectores:
- a) $u + v, u - v, uxv$ b) $u + v, u + (uxv), v + (uxv)$
- c) $u, v, (u + v)x(u - v)$ d) $u - v, v + w, u + w$
- 28) Dado el espacio vectorial $(F, +, \cdot, \cdot)$ y consideremos $f, g, h \in F$ definidas como $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$ y $h(t) = t^2$, hallar los números reales tales que $af + bg + ch = 0$.
- 29) Supongamos que $u, v \in V$ son vectores linealmente independiente de V , probar que $w_1 = au + bv$, $w_2 = cu + dv$ son linealmente independiente, si y solo si $ad - bc \neq 0$.
- 30) En \mathbb{R}^2 , $(a, b); (c, d)$ son linealmente independiente si y solo si $ad - bc \neq 0$.
- 31) Dados los subespacios de \mathbb{R}^3 ; $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + z\}$; $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = -z\}$ ¿Cumple que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$?
- Rpta.** No se cumple
- 32) Considere los subespacios V y $W \subset \mathbb{R}^3$ así definidos $V = \{(x, x, x) / x \in \mathbb{R}\}$; $W = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$. Demuestre que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

- 33) Dado $\vec{u} = (1, 2)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$, sean F_1 y F_2 respectivamente las rectas que pasan por el origen en R^2 y contienen \vec{u} y \vec{v} respectivamente. Demuestre que $R^2 = F_1 \oplus F_2$.
- 34) Pruebe que el conjunto U de las matrices triangulares inferiores y el conjunto W de las matrices triangulares superiores son subespacios vectoriales de $M(n \times n)$, que $M(n \times n) = U + W$ y que no se cumple $M(n \times n) = U \oplus W$.
- 35) Sea V un espacio de dimension finita, si $S \subset V$ es un subespacio. Probar que existe un subespacio $U \subseteq V$ tal que $V = S \oplus U$.
- 36) Sea $V = R^3$ un espacio vectorial sobre $k = R$, Probar que $\vec{u} = (1, 3, 5)$; $\vec{v} = (2, -2, 3)$; $\vec{w} = (3, 2, -5)$ forma una base de R^3 .
- 37) Dado el espacio $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y = 3z\}$ de R^3 . Hallar todos los subespacios T de R^3 , tal que $S \oplus T = R^3$.
- 38) Determinar el subespacio S de $(R^3, +, R, \cdot)$ generado por los vectores $(2, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1)$, hallar una base de S y su dimensión.
- 39) Sea $S = L\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ y $T = \{(0, -1, 1), (1, 5, 4)\}$. Verificar que R^3 es la suma de S y T , pero no es la suma directa de dichos subespacios.
- 40) Sea $V = R^4$ y $v_1 = (1, 2, 0, 3)$, $v_2 = (1, 4, 3, -1)$, $v_3 = (2, 6, 3, 2)$ elementos de R^4 , definimos:
 $W_1 = \{v \in R^4 / v = av_1 + bv_2, a, b \in R\}$
 $W_2 = \{v \in R^4 / v = a\sqrt{3}, a \in R\}$
- i) Calcular $W_1 \cap W_2$
- ii) De un vector de R^4 tal que no pertenezca a W_1 .

- 41) Si $V = R^2$, $W_1 = \{(x, y) \in R^2 / 2x = 3y\}$
 $W_2 = \{(x, y) \in R^2 / y = 0\}$
 Probar que: $R^2 = W_1 \oplus W_2$
- 42) Si $V = L\{(1, 1, -1), (2, 1, -2), (1, 2, -1)\}$ y $W = L\{(1, 0, -1), (3, 2, -3)\}$
 Demostrar que $V = W$
- 43) Si $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x = y + z\}$ y $T = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x - 3y = -z\}$ subespacios de R^3 . Hallar $\dim(S + T)$
- 44) En R^4 , $S = L\{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$, $T = L\{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$ determinar: $S \cap T$ y $S + T$ ¿existe $S \oplus T$? ¿por qué?
- 45) Determinar el subespacio de $(R^3, +, R, \cdot)$ generado por los vectores $v_1 = (1, -1, 2)$, $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 0)$.
- 46) Demuestre que los siguientes conjuntos de vectores generan el mismo subespacio de R^3 .
- a) $A = \{(1, 0, -1), (0, -2, 1)\}$, $B = \{(1, -2, 0), (2, -2, -1)\}$
- b) $A = \{(1, -1, 1), (3, 0, 1)\}$, $B = \{(-2, -1, 0), (5, -2, 3)\}$
- 47) Determinar dos bases en cada uno de los siguientes espacios vectoriales de dimension finita.
- a) $V = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y = 0\}$
- b) $W = \{[a_{ij}] \in M_{2 \times 2}(R) / a_{11} + a_{22} = 0\}$

- (48) Si $V = L\{(1,0),(2,2),(3,0)\}$ calcular $\dim V$.
- (49) Si $V = L\{(1,0),(-\frac{1}{2},0),(3,0)\}$ demostrar que $\dim V = 1$.
- (50) Dados los subespacios de $(R^4, +, R, \cdot)$ $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 / x+y+z+w=0\}$ y $T = \{(x, y, z, w) \in R^4 / x-y-z-w=0\}$ obtener la dimensión de $S+T$.
- (51) En R^3 consideremos $V = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x-y+z=0\}$ y $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x-2y-z=0\}$. Hallar:
- a) $\dim(V+U)$ b) $\dim(V \cap U)$ c) Una base de $V \cap U$
- (52) Supongamos que U y W son subespacios de V y que $\dim U = 4$, $\dim W = 5$ y $\dim V = 7$. Hallar la posible dimensión de $U \cap W$.
- (53) Si $S = L\{(2,5,-1,1),(2,1,1,-1),(2,-1,2,-2)\}$ y $T = L\{(3,4,1,-1),(3,5,1,-1),(1,2,1,-1)\}$. Determinar $S+T$, $S \cap T$, $\dim(S+T)$ y $\dim(S \cap T)$.
- (54) Dados los subespacios $S = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x-y=z-t\}$ y $T = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x-y-3z=t\}$ de R^4 , Hallar $S+T$, $S \cap T$, sus bases y dimensiones.
- (55) Consideremos en $V_4(R)$ los subespacios $S = L\{(2,2,-1,2),(1,1,1,-2),(0,0,2,-4)\}$ y $T = L\{(2,-1,1,1),(-2,1,3,3),(3,-6,0,0)\}$. Hallar las bases de los subespacios S , T , $S+T$, $S \cap T$ y sus respectivas dimensiones.
- (56) Si $S = L\{(1,2,-1,-2),(3,1,1,1),(-1,0,1,-1)\}$ y $T = L\{(2,5,-6,-5),(-1,2,-7,-3),(3,3,1,-2)\}$. Hallar $S+T$ y $S \cap T$, bases y dimensiones. ¿Existe $S \oplus T$? justifique

- (57) Demostrar que en k -espacio vectorial V , de dimensión $n \geq 1$, todo conjunto de n vectores v_1, v_2, \dots, v_n son linealmente independiente si y sólo si generan a V .
- (58) Sea V en k -espacio vectorial, Si u_1, u_2, \dots, u_n son vectores de V que son linealmente independiente tales que $S = L\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ y $T = L\{u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_n\}$ con $r < n$, demostrar que existe $S \oplus T$.
- (59) Si $S = L\{(1,2,-1,-2),(3,1,1,1),(-1,0,1,-1)\}$ y $T = L\{(2,5,-6,-5),(-1,2,-7,-3),(5,8,-5,-7)\}$. Demostrar que:
- a) $S \cap T = T$ b) $S+T=S$
- (60) Sea V el espacio vectorial de las matrices de orden $n \times n$ con entradas números reales $W_1 = \{A \in V / A = A'\}$ y $W_2 = \{A \in V / A = -A'\}$ donde A' denota la matriz transpuesta de A :
- a) Pruebe que W_1, W_2 son subespacios vectoriales de V .
- b) Demuestre que $V = W_1 + W_2$, y que $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$
- c) Calcular $\dim W_2$
- (61) Sea $M_{3 \times 3}(R)$ el espacio vectorial de las matrices 3×3 de componentes reales, definimos: $\theta = \{A = [a_{ij}] \in M_{3 \times 3}(R) / a_{ij} = -a_{ji}\}$
- ¿Es θ un subespacio de $M_{3 \times 3}(R)$? Justifíquese.
- En caso afirmativo, hallar una base de θ .
- (62) Si $V = L\{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ y si u_1 es combinación lineal de u_2, u_3, \dots, u_n , demostrar que $V = L\{u_2, u_3, \dots, u_n\}$

- (63) Si $V = M_{2 \times 2}(R)$, sobre $k = R$
- $$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{¿} T \text{ es una base?}$$
- (64) Sea $V = \{[a_{ij}] \in M_{2 \times 2}(R) / a_{11} + a_{22} = 0\}$
- $$U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subset V, \quad \text{¿} U \text{ es una base?}$$
- (65) Sea $V = M_{2 \times 2}(R)$ espacio vectorial de matrices cuadradas sobre R y sean
- $$W = \{[a_{ij}] \in M_{2 \times 2}(R) / a_{11} + a_{12} = 0\} \quad \text{y}$$
- $$W_2 = \{[a_{ij}] \in M_{2 \times 2}(R) / a_{11} + a_{21} = 0\}$$
- a) Demostrar que W_1 y W_2 son subespacios de V .
- b) Hallar la dimensión de W_1 , W_2 , $W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2$.
- (66) Determinar si los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, -1, 1)$ forman una base de R^3 .
- (67) Probar que $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ es una base de R^3 .
- (68) Demostrar que el conjunto de vectores $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1, -1)$, $u_3 = (1, 2, 3, 4)$, $u_4 = (1, 0, 2, 0)$ generan R^4 .
- (69) Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x - y + z = 0\}$ probar que S es un subespacio de R^3 , encontrar una base de S .
- (70) Para los subespacios S y T de R^3 definida por:
- $$S = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x + y - 5z = 0\} \quad \text{y} \quad T = \{(x, y, z) \in R^3 / x - y + 3z = 0\}$$
- encontrar la dimensión de $S + T$.

- (71) Si $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}$
- a) Demostrar que W es un subespacio de R^3 .
- b) Hallar 2 vectores que generan a W .
- (72) Probar que: $R^3 = R^2 + \{t(1, -1, 1) / t \in R\}$ donde $R^2 = \{(x, y, 0) / x, y \in R\}$
- (73) Sean L_1 y L_2 dos rectas distintas que pasan por el origen en R^2 , probar que $R^2 = L_1 + L_2$
- (74) Probar que $R^2 = L_1 + L_2$, donde $L_1 = \{t(1, 1) / t \in R\}$, $L_2 = \{\lambda(2, -1) / \lambda \in R\}$
- (75) Si $L = \{t(1, -1, 1) / t \in R\}$ y $P = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$.
- a) Hallar $L \cap P$ b) Probar que $R^3 = L + P$
- (76) En R^3 , consideremos los subespacios $U_1 = \{(x, y, z) / x = y = z\}$, $U_2 = \{(x, y, z) / x + y + z = 0\}$. Demostrar que $R^3 = U_1 \oplus U_2$
- (77) Encontrar una base para cada uno de las siguientes subespacios de R^3 .
- a) $S = \{(x, y, z) / 3x - 4y + z = 0\}$
- b) $S = \{(x, y, z) / x + y - z = 0 \wedge 2x - y + z = 0\}$
- (78) Las soluciones de la ecuación homogénea $x + y + z + t = 0$ forma un subespacio vectorial, hallar una base para este subespacio.
- (79) Si $U = L\{(1, 2, 0), (0, 2, 1)\}$ y $W = L\{(0, 0, 2), (0, 1, 0)\}$.
- a) Encuentre una base para $U \cap W$
- b) Determinar la dimensión de $U + W$

(80) Verifique que $R^3 = U \oplus W$, donde $U = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, 0, z) / z \in \mathbb{R}\}$

(81) Si $U = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + 3y + z = 0\}$ y $W = \{(x, y, z) \in R^4 / x + 2y - z = 0\}$

- a) Encuentre una base para $U \cap W$ b) Determine $\dim(U + W)$

(82) Demuestre que $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / b = c \right\}$ es un subespacio de $R^{2 \times 2}$, encuentre la dimensión de W .

(83) Sea $V = R^3$ y sea W el subespacio generado por $(1, 0, 0)$ y sea U el subespacio generado por $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Demostrar que V es la suma directa de W y U .

(84) Sea $W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x + y + z + t = 0\}$, probar que los vectores $\{(2, 0, 0, -2), (2, 0, -2, 0), (8, -2, -4, -2)\}$ forman una base de W .

(85) Hallar la dimensión de $(W \cap U) + (V \cap T)$, si:

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 / 2y - 3z = 4x\}, \quad U = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + 2z = y\} \quad y$$

$$T = \{(x, y, z) \in R^3 / x + 3y = 3z\}$$

(86) Dados los subespacios vectoriales de R^3

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y = 0\} \quad y \quad T = \{(x, y, z) \in R^3 / y - z = 0\}.$$

Hallar a) $W \cup T$, $W \cap T$ y $W + T$

- b) Determinar cuales de los tres subconjuntos de (a) son subespacios vectoriales

c) Comprobar si se verifica $W \oplus T = R^3$

(87) Dados los subespacios vectoriales de R^4 .

$$W = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x = y, 2z = t\}, \quad U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x + y + z + t = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x = y = z = t\}, \quad \text{se pide}$$

a) Calcular los subespacios vectores de $W + U$, $W + T$, $U + T$

b) Calcular los subespacios vectoriales de $W \cap U$, $W \cap T$, $U \cap T$

c) Calcular las dimensiones de los subespacios de (a) y (b)

(88) Hallar el subespacio vectorial $W = L\{v, u\}$ de R^4 donde $v = (1, 2, 0, 3)$ y $u = (0, -1, 2, 1)$. ¿Para qué valor de a se verifica $(2, a, -2, 5) \in W$?

(89) Dado el subespacio vectorial de R^3 , $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x + y + z = 0\}$ y el conjunto de vectores $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (3, 2, -5)\}$ se pide:

a) Comprobar que S es un sistema de generadores de W .

b) Encontrar un subconjunto de S formado por dos vectores que sea también sistema de generadores de W .

(90) Dados los vectores $v_1 = (1, 2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 6, 0, 0)$, se pide:

a) Hallar el subespacio vectorial de $L\{v_1, v_2, v_3\}$.

b) Dar una base de dicho subespacio y su dimensión.

(91) Dados los subespacios vectoriales de R^3 , $W = L\{(1, 0, 1), (2, 1, 0)\}$, $U = \{(a, a + b, -a) \in R^3 / a, b \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{(x, y, z) \in R^3 / x = z, y = 0\}$, se pide:

a) Estudiar si el vector $v = (2, 0, 2)$ pertenece a algunos de estos subespacios.

b) Dar una base de cada uno de ellos

c) Calcular sus dimensiones.

- 92) Dados los subespacios vectoriales de R^3
 $W = \{(a, 2a, a+b) / a, b \in R\}$, $T = \{(x, y, z) \in R^3 / x=0, y=0\}$. Se pide
- Hallar $W \cap T$ y $W+T$
 - Obtener una base para $W \cap T$ y otra para $W+T$
- 93) Dados los vectores $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ y $v_3 = (2, 5, 3)$ se pide:
- Estudiar si son linealmente dependientes o independientes
 - Determinar el subespacio vectorial W generado por estos tres vectores.
 - Hallar una base y la dimensión de W .
 - Determinar el subespacio vectorial $L\{v_1, v_2, v_3, u_1\}$ donde $u_1 = (1, 3, 2)$
 - Determinar el subespacio vectorial $L\{v_1, v_2, v_3, u_2\}$ donde $u_2 = (0, 1, 0)$
- 94) Dados los subespacios vectoriales de R^3 , $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x=y, y=2z\}$,
 $T = \{(4a, a+b, b-a) \in R^3 / a, b \in R\}$ se pide
- Calcular $W \cap T$ y $W+T$
 - Hallar una base y la dimensión siendo $W \cap T$ y $W+T$
- 95) Si S y T son dos subconjuntos de R^3 tales que $\dim S = 1$, $\dim T = 2$ y S no es subconjunto de T . Demostrar que $S \oplus T = R^3$.
- 96) Si $S = L\{(1, -1, 0, 2), (2, 0, 3, -1), (4, 0, -2, 1)\}$ y $T = L\{(1, -1, 1, 0), (2, 2, -1, 2), (1, -5, 4, -2)\}$. Hallar $S \cap T$ y $S+T$ hallar la dimensión de S , T , $S \cap T$ y $S+T$
- 97) Sea $V = \{A \in M_{3 \times 3}(R) / A = A'\}$. Probar que $\dim V = 6$

- 98) Determinar el subespacio $S = L\{(2, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ de $(R^3, +, R, \cdot)$. Hallar una base S y su dimensión.
- 99) Dado los subespacios de $(R^4, +, R, \cdot)$, $S = L\{(2, 2, -1, 2), (1, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -4)\}$ y $T = L\{(2, -1, 1, 1), (-2, 1, 3, 3), (1, -2, 0, 0)\}$. Hallar una base de S , de T y de $S+T$. Hallar $\dim S$, $\dim T$, $\dim (S+T)$ y $\dim (S \cap T)$.
- 100) Analizar si $S = \{(x, y, z, w) \in R^4 / x-y=z \wedge x+z=w\}$ es un subespacio de $(R^4, +, R, \cdot)$ en caso afirmativo. Hallar una base y su dimensión.
- 101) Obtener en R^4 , los subespacios generados por los conjuntos siguientes:
 $A = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)\}$ y $B = \{(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$
- 102) Si $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x=y+z\}$ y $T = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x-3y=-z\}$. Hallar $\dim (T+S)$
- 103) Hallar un vector en R^3 que genera la intersección de U y W donde U es el plano XY : $U = \{(a, b, 0) / a, b \in R\}$ y W es el espacio generado por los vectores $(1, 2, 3)$ y $(1, -1, 1)$.
- 104) Sea $V = R^3$ y sea W el subespacio generado por $(1, 0, 0)$ y sea U el subespacio generado por $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$. Demostrar que V es la suma directa de W y U .
- 105) Sea $V = \{(x, y, z, t) \in R^4 / x-y+z-t=0\}$ y $U = \{(x, y, z, t) \in R^4 / 2x+y+2z+t=0\}$. Hallar la dimensión de los siguientes subespacios. $U \cap V$, $U+V$, $\frac{R^4}{U}$, $\frac{R^4}{V}$, $\frac{V+U}{U}$, $\frac{V+U}{V \cap U}$
- Rpta. 2, 4, 1, 1, 1, 2

- 106 Si $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + 2y + 5z = 0\}$. Probar que $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^\perp$.
- 107 Sea $Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{R}\}$. Probar que $\dim[\sqrt{2}] = 2$.
- 108 Dados los subespacios de \mathbb{R}^3 : $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 3z = 0\}$, $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$. Hallar $\dim(S_1 + S_2)$ **Rpta.** 3
- 109 Sea $V = \mathbb{R}^2$ un espacio vectorial sobre $k = \mathbb{R}$, sea $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$ vectores en V , tal que $ad - bc \neq 0$, probar que u y v constituye una base de V .
- 110 Sea $V = \{a_0 + a_1 t + a_2 \cos 2t + a_3 e^{3t} / a_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$. Probar que las funciones $f_1(t) = 2t - 1$, $f_2(t) = t + \cos 2t$, $f_3(t) = 3 + e^{3t}$, $f_4(t) = -t + e^{3t}$ constituyen una base de V .
- 111 Hallar las dimension de $(S_1 \cap S_2) + (S_3 + S_4)$ si:
 $S_1 = \{(x, y, z) / 2y - 3z = -4x\}$, $S_2 = \{(x, y, z) / 2x + 2z = y\}$,
 $S_3 = \{(x, y, z) / x + 5z = 4y\}$, $S_4 = \{(x, y, z) / x + 3y = 3z\}$
Rpta. 2
- 112 Sean U , W y S subespacios de un espacio finito dimensional V tal que $V = U + W + S$. Probar que $V = U \oplus W \oplus S$, si y solo si:
 $\dim V = \dim U + \dim W + \dim S$.

CAPÍTULO IV

4. TRANSFORMACIONES LINEALES.-

En el presente capítulo expondremos el concepto de transformación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, las propiedades generales y los tipos especiales de transformaciones lineales, se introduce la estructura de Núcleo y de la imagen de una transformación lineal y se estudia la relación entre sus dimensiones, al fijar una base en cada espacio se determina la matriz asociada a una transformación lineal y finalmente se trata de los espacios vectoriales de las transformaciones lineales y el espacio dual de un espacio vectorial.

4.1. DEFINICIÓN.-

Consideremos dos espacios vectoriales V y W sobre el cuerpo k , a la función $T: V \rightarrow W$, llamaremos una transformación lineal u homomorfismo si y sólo si cumple con las siguientes condiciones.

i) $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in V$

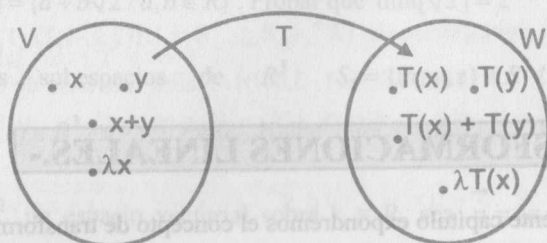
Es decir: Que la imagen de la suma de dos vectores de V es igual a la suma de sus imágenes en W .

ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in V, \lambda \in k$

Es decir: Que la imagen del producto de cualquier escalar por todo vector de V es igual al producto del escalar por la imagen de dicho vector en W .

4.2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.-

Sea $T: V \rightarrow W$, una transformación lineal.



4.3. TEOREMA.-

Sean $(V, +, k, \cdot)$ y $(W, +, k, \cdot)$ dos espacios vectoriales, la función $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal si y sólo si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall \alpha, \beta \in k \text{ y } \forall x, y \in V$$

Demostración

Suponiendo que $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal entonces (i), (ii) son válidos; como V es un espacio vectorial $\Rightarrow \alpha x, \beta y \in V, \forall \alpha, \beta \in k \text{ y } \forall x, y \in V$

Entonces $\alpha x + \beta y \in V$ ahora por la parte (i) se tiene: $T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y)$

y por la parte (ii) se tiene:

$$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall x, y \in V, \forall \alpha, \beta \in k$$

$$\therefore T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

recíprocamente supongamos que:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall \alpha, \beta \in k \text{ y } \forall x, y \in V$$

Entonces como $\alpha, \beta \in k \Rightarrow \alpha = \beta = 1$

Pues $1 \in k \Rightarrow T(1x + 1y) = T(x) + T(y)$ se verifica i)

Sí $a = \lambda, b = 0, \lambda, 0 \in k$ entonces $T(\lambda x + 0y) = \lambda T(x) + 0T(y) = \lambda T(x)$

$\therefore T(\lambda x) = \lambda T(x)$ se verifica (ii), por lo tanto T es una transformación lineal.

Ejemplo.- Probar que $I: V \rightarrow W$ (transformación identidad) tal que $I(x) = x, \forall x \in V$ es una transformación lineal.

Solución

$$i) \quad I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha I(x) + \beta I(y)$$

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha I(x) + \beta I(y), \quad \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in k$$

Por lo tanto I es una transformación lineal

Ejemplo.- Determinar si la aplicación $f: R^2 \rightarrow R^3$ definida por $f(x, y) = (2x, -y, x)$ donde $k = R$ es una transformación lineal.

Solución

$$i) \quad f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \text{ por probar}$$

$$\begin{aligned} f[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2), x_1 + x_2) \\ &= (2x_1 + 2x_2, -y_1 - y_2, x_1 + x_2) \\ &= (2x_1, -y_1, x_1) + (2x_2, -y_2, x_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$ii) \quad f(\lambda(x, y)) = \lambda f(x, y) \text{ por probar}$$

$$f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x, -\lambda y, \lambda x) = \lambda(2x, -y, x) = \lambda f(x, y)$$

por lo tanto $f: R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal.

Ejemplo.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, 2, z)$

¿ T es una transformación lineal?

Solución

Sean $(x_1, y_1, z_1) \in R^3$, $(x_2, y_2, z_2) \in R^3$ entonces

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\begin{aligned} T[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2, z_1 + z_2) \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) &= (x_1, 2, z_1) + (x_2, 2, z_2) \\ &= (x_1 + x_2, 4, z_1 + z_2) \quad \dots(2) \end{aligned}$$

de (1) y (2) tenemos

$$T[(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)] \neq T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$$

por lo tanto T no es una transformación lineal.

Ejemplo.- Sean los subespacios R^n y R^m , $x \in R^n$ un vector y A una matriz de $R^{m \times n}$, comprobar que la función $T: R^n \rightarrow R^m$ definida por $T(x) = Ax$, A fijo, es una transformación lineal.

Solución

i) Probaremos que $T(x + y) = T(x) + T(y)$, $x, y \in R^n$

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y)$$

$$\therefore T(x + y) = T(x) + T(y)$$

ii) Probaremos que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, $\lambda \in R$, $x \in R^n$

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda T(x)$$

$$\therefore T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

por lo tanto de (i), (ii) T es una transformación lineal.

Ejemplo.- Sea el espacio vectorial $V = \{f / f: R \rightarrow R \text{ continua}\}$ sobre el campo R , definimos: $T: V \rightarrow V$ tal que $T(f(x)) = \int_0^x f(t) dt$

Probar que T es una transformación lineal.

Solución

i) $T(f(x) + g(x)) = T(f(x)) + T(g(x))$, $\forall f, g \in V$ por probar

$$\begin{aligned} T(f(x) + g(x)) &= T((f + g)(x)) = \int_0^x (f + g)(t) dt \\ &= \int_0^x (f(t) + g(t)) dt = \int_0^x f(t) dt + \int_0^x g(t) dt = T(f(x)) + T(g(x)) \end{aligned}$$

$$\therefore T(f(x) + g(x)) = T(f(x)) + T(g(x))$$

ii) $T(\lambda f(x)) = \lambda T(f(x))$, $\forall f \in V$ y $\lambda \in R$ por probar

$$T(\lambda f(x)) = T((\lambda f)(x)) = \int_0^x (\lambda f)(t) dt$$

$$= \int_0^x \lambda f(t) dt = \lambda \int_0^x f(t) dt = \lambda T(f(x))$$

$$\therefore T(\lambda f(x)) = \lambda T(f(x))$$

por lo tanto de (i), (ii), T es una transformación lineal.

Ejemplo.- Consideremos V un espacio vectorial y $f: V \rightarrow R$, $g: V \rightarrow R$ dos transformaciones lineales, sea $F: V \rightarrow R^2$ una aplicación tal que $F(v) = (f(v), g(v))$, $\forall v \in V$, demostrar que F es una transformación lineal.

Solución

i) $F(v+w) = F(v) + F(w)$, $\forall v, w \in V$ por demostrar:

$$\begin{aligned} F(v+w) &= (f(v+w), g(v+w)) \\ &= (f(v) + f(w), g(v) + g(w)) \text{ por ser } f \text{ y } g \text{ transformación} \\ &= (f(v), g(v)) + (f(w), g(w)) = F(v) + F(w) \end{aligned}$$

por lo tanto $F(v+w) = F(v) + F(w)$

ii) $F(\lambda v) = \lambda F(v)$, $\forall v \in V$, $\lambda \in R$ por demostrar

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= (f(\lambda v), g(\lambda v)) = (\lambda f(v), \lambda g(v)) \text{ por ser } f \text{ y } g \text{ transformación} \\ &= \lambda(f(v), g(v)) = \lambda F(v), \text{ por lo tanto } F(\lambda v) = \lambda F(v) \end{aligned}$$

Luego de (i) y (ii) F es una transformación lineal.

Ejemplo.- Si $T: R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal tal que $T(1,2) = (1,0,-1)$, $T(2,1) = (2,1,-2)$ hallar $T(x,y)$

Solución

Expresaremos a $(x,y) \in R^2$ como combinación lineal de $(1,2)$ y $(2,1)$

$$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(2,1) \quad \dots (1)$$

$(x,y) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + \beta)$. Por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2y-x}{3} \\ \beta = \frac{2x-y}{3} \end{cases} \text{ reemplazando en (1)}$$

$$(x,y) = \frac{2y-x}{3}(1,2) + \frac{2x-y}{3}(2,1)$$

$$T(x,y) = T\left[\frac{2y-x}{3}(1,2) + \frac{2x-y}{3}(2,1)\right], \text{ T transformación lineal}$$

$$= \frac{2y-x}{3}T(1,2) + \frac{2x-y}{3}T(2,1) = \frac{2y-x}{3}(1,0,-1) + \frac{2x-y}{3}(2,1,-2)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{2y-x}{3}, 0, -\frac{2y-x}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}(2x-y), \frac{2x-y}{3}, -\frac{2}{3}(2x-y)\right)$$

$$= \left(\frac{2y-x+4x-2y}{3}, 0 + \frac{2x-y}{3}, -\frac{2y-x}{3} - \frac{2}{3}(2x-y)\right) = \left(x, \frac{2x-y}{3}, -x\right)$$

$$\therefore T(x,y) = \left(x, \frac{2x-y}{3}, -x\right)$$

Ejemplo.- Si F es una transformación lineal de R^3 en R^2 tal que $F(0,-1,1) = (1,2)$, $F(1,-1,0) = (3,4)$ y $F(1,0,0) = (5,6)$. Hallar $F(x,y,z)$

Solución

Escribiremos a $(x,y,z) \in R^3$ en combinación lineal de $(0,-1,1)$, $(1,-1,0)$ y $(1,0,0)$ es decir: $(x,y,z) = \alpha(0,-1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,0,0) \quad \dots (1)$

$$(x,y,z) = (\beta + \gamma, -\alpha - \beta, \alpha), \text{ por igualdad tenemos}$$

$$\begin{cases} x = \beta + \lambda \\ y = -\alpha - \beta \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = -(y+z) \\ \lambda = x+y+z \end{cases} \text{ reemplazando en (1)}$$

$$(x, y, z) = z(0, -1, 1) - (y+z)(1, -1, 0) + (x+y+z)(1, 0, 0)$$

como F es una transformación lineal, entonces

$$F(x, y, z) = F[z(0, -1, 1) - (y+z)(1, -1, 0) + (x+y+z)(1, 0, 0)]$$

$$= zF(0, -1, 1) - (y+z)F(1, -1, 0) + (x+y+z)F(1, 0, 0)$$

$$= z(1, 2) - (y+z)(3, 4) + (x+y+z)(5, 6)$$

$$= (z - 3y - 3z + 5x + 5y + 5z, 2z - 4y - 4z + 6x + 6y + 6z)$$

$$= (5x + 2y + 3z, 6x + 2y + 4z)$$

$$\therefore F(x, y, z) = (5x + 2y + 3z, 6x + 2y + 4z)$$

Ejemplo.- Si $V = M_{2 \times 2}(R)$ conjunto de las matrices de orden dos y sea

$T: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R$ una aplicación tal que: $T(A) = a_{11} + a_{22}$

donde $A \in M_{2 \times 2}(R)$ ¿T es una transformación lineal?

Solución

$$\text{Sean } A, B \in M_{2 \times 2}(R) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

i) $T(A+B) = T(A) + T(B)$ por comprobar

$$\begin{aligned} T(A+B) &= T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}\right) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) \end{aligned}$$

$$= (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = T(A) + T(B)$$

$$\therefore T(A+B) = T(A) + T(B)$$

ii) $T(\lambda A) = \lambda T(A)$, $\forall A \in M_{2 \times 2}(R)$ y $\lambda \in R$ por probar

$$T(\lambda A) = T\left(\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda(a_{11} + a_{22}) = \lambda T(A)$$

$$\therefore T(\lambda A) = \lambda T(A)$$

Por lo tanto de (i) y (ii) T es una transformación lineal.

4.4. PROPOSICIÓN.-

Sean $(V, +, k, \cdot)$, $(W, +, k, \cdot)$ dos espacios vectoriales y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, se cumple las siguientes afirmaciones.

$$\text{a) } T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) \quad \text{b) } T(\theta_v) = \theta_w$$

$$\text{c) } T(-v) = -T(v)$$

Demostración

a) La demostración se hace por inducción

$$\begin{aligned} \text{i) Si } n = 2, \text{ se cumple } T\left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i v_i\right) &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2), \quad v_1, v_2 \in V \end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in k$ pues T es transformación lineal

ii) Supongamos que para $n = h$ con $h > 2$ se cumple.

$$T\left(\sum_{i=1}^{h+1} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^h \alpha_i T(v_i)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^h \alpha_i v_i\right) + T(\alpha_{h+1} v_{h+1}) \text{ pues } T \text{ es transformación lineal.}$$

$$= \sum_{i=1}^h \alpha_i T(v_i) + \alpha_{h+1} T(v_{h+1}) \text{ de (ii) } T \text{ transformación lineal}$$

$$= \sum_{i=1}^{h+1} \alpha_i T(v_i), \text{ por lo tanto como se cumple para } n = h + 1,$$

$$h \geq 2$$

entonces se cumple $\forall n \geq 2$

b) $T(\theta_v) = T(\theta_v + \theta_v) = T(\theta_v) + T(\theta_v)$, T es transformación lineal

$$T(\theta_v) - T(\theta_v) = T(\theta_v) + T(\theta_v) - T(\theta_v)$$

$$\theta_w = T(\theta_v) + \theta_w \Rightarrow T(\theta_v) = \theta_w$$

c) $T(-v + v) = T(-v) + T(v)$ por ser T transformación lineal

$$T(\theta_v) = T(v) + T(-v) = \theta_w$$

$$T(-v) = -T(v) + \theta_w = -T(v)$$

$$\therefore T(-v) = -T(v)$$

4.5. CLASIFICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.-

Sean $(V, +, k, \cdot)$, $(W, +, k, \cdot)$ dos espacios vectoriales y $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal es decir que se cumple (i) y (ii) en esta definición f no tiene ninguna condición salvo que solamente sea una función por lo tanto daremos los siguientes conceptos:

f es un monomorfismo $\Leftrightarrow f$ es inyectiva

f es un epimorfismo $\Leftrightarrow f$ es sobreyectiva

f es isomorfismo $\Leftrightarrow f$ es biyectiva

Si $V = W$, entonces la transformación lineal f se llama endomorfismo y si esta es biyectiva entonces recibe el nombre de automorfismo, es decir un automorfismo es toda transformación lineal biyectiva de un espacio vectorial en sí mismo.

Ejemplo.- Si $f: R^2 \rightarrow R^2$ es una aplicación definida por $f(x, y) = (x + y, x - y)$ ¿ f es un automorfismo?

Solución

Para que f sea un automorfismo debemos probar que f sea una transformación lineal biyectiva

a) f es una transformación lineal.

$$\begin{aligned} \text{i) } f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) = \lambda(x+y, x-y) = \lambda f(x,y)$$

por lo tanto de (i) y (ii) f es una transformación lineal.

b) f es inyectiva

Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R^2$, tal que

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2 + y_2, x_2 - y_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

$$\text{Luego } f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

Por lo tanto f es inyectiva.

c) f es suryectiva

$$\forall (x_2, y_2) \in R^2, \exists (x_1, y_1) \in R^2 \text{ tal que } f(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

$(x_1 + y_1, x_1 - y_1) = (x_2, y_2)$ por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 \\ x_1 - y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_2 + y_2}{2} \\ y_1 = \frac{x_2 - y_2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Luego } \forall (x_2, y_2), \exists (x_1, y_1) = \left(\frac{x_2 + y_2}{2}, \frac{x_2 - y_2}{2} \right) \text{ tal que:}$$

$$f(x_1, y_1) = f\left(\frac{x_2 + y_2}{2}, \frac{x_2 - y_2}{2}\right) = \left(\frac{x_2 + y_2}{2} + \frac{x_2 - y_2}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2} - \frac{x_2 - y_2}{2}\right)$$

$$= (x_2, y_2), \text{ por lo tanto } f \text{ es sobreyectiva}$$

Luego de (a), (b) y (c) f es un automorfismo.

Ejemplo.- Sea $f: R^2 \rightarrow R^3$ una transformación lineal definida por $f(x,y) = (x+y, 0, x+y)$ ¿ f es monomorfismo, epimorfismo?

Solución

f es monomorfismo si f es inyectiva

Si $x \neq y$ se tiene $(x,y) \neq (y,x)$ sin embargo $f(x,y) = f(y,x)$

Por lo tanto f no es inyectiva

Por lo tanto f no es un monomorfismo.

f es un epimorfismo si f es sobreyectiva

$$\forall (x,y,z) \in R^3 \text{ tal que } f(a,b) = (x,y,z)$$

Luego para $(3,1,2) \in R^3$ no existe $(x,y) \in R^2 / f(x,y) = (3,1,2)$

Por lo tanto f no es sobreyectiva con lo cual f no es un epimorfismo

Ejemplo.- La aplicación $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida por: $f(x,y,z) = (y,-x,z)$

¿ f es un automorfismo en R^3 ?

Solución

Para que f sea automorfismo debe probarse que f sea una transformación lineal biyectiva.

a) f es una transformación lineal.

$$\text{i)} \quad f((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1 + y_2, -x_1 - x_2, z_1 + z_2)$$

$$= (y_1, -x_1, z_1) + (y_2, -x_2, z_2)$$

$$= f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2)$$

$$\text{ii)} \quad f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda y, -\lambda x, \lambda z) = \lambda(y, -x, z) = \lambda f(x,y,z)$$

por lo tanto (i), (ii) f es una transformación lineal.

b) f es inyectiva.

Sean $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in R^3$, tal que $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$

$$(y_1, -x_1, z_1) = (y_2, -x_2, z_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$$

$$\text{Luego } f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$$

$\therefore f$ es inyectiva

c) f es sobreyectiva

$$\forall (x, y, z) \in R^3, \exists (a, b, c) \in R^3 \text{ tal que } f(a, b, c) = (x, y, z)$$

$$(b, -a, c) = (x, y, z) \Rightarrow b = x, a = -y, c = z$$

$$\text{Luego } \forall (x, y, z) \in R^3, \exists (a, b, c) = (-y, x, z) \text{ tal que}$$

$$f(a, b, c) = f(-y, x, z) = (x, y, z)$$

$\therefore f$ es sobreyectiva

por lo tanto de (a), (b) y (c) f es automorfismo.

4.6. PROPOSICIÓN.-

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre k y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces se cumple las siguientes afirmaciones.

a) $T(V_1) = \{T(\alpha) \in W / \alpha \in V_1\}$ es un subespacio de W para cualquier subespacio V_1 de V .

b) Si W_1 es un subespacio de W entonces:

$$T^{-1}(W_1) = \{\alpha \in V / T(\alpha) \in W_1\} \text{ es un subespacio de } V.$$

c) T es inyectiva $\Leftrightarrow T(\alpha) = \theta_w \Rightarrow \alpha = \theta_v$

d) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ son linealmente independiente y T es inyectiva $\Rightarrow \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_r)\}$ es linealmente independiente en W .

Demostración

a) i) Sea $\beta_1, \beta_2 \in T(V_1) \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 \in T(V_1)$ por probar

$$\text{Si } \beta_1 \in T(V_1) \Rightarrow \exists \alpha_1 \in V_1 / T(\alpha_1) = \beta_1$$

$$\beta_2 \in T(V_1) \Rightarrow \exists \alpha_2 \in V_1 / T(\alpha_2) = \beta_2 \text{ sumando}$$

$$T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$$

como T es una transformación lineal entonces

$$T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2, \text{ entonces}$$

$$T(\alpha_1 + \alpha_2) = \beta_1 + \beta_2 \text{ y como } \alpha_1, \alpha_2 \in V_1 \text{ y } V_1 \text{ es un subespacio de } V$$

$$\text{entonces } \alpha_1 + \alpha_2 \in V_1 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 \in T(V_1)$$

ii) Sea $\lambda \in k, \beta \in T(V_1) \Rightarrow \lambda\beta \in T(V_1)$ por probar

$$\text{Si } \beta \in T(V_1) \Rightarrow \exists \alpha \in V_1 \text{ tal que } T(\alpha) = \beta \text{ y como } V_1 \text{ es subespacio de } V \Rightarrow \lambda\alpha \in V_1 \Rightarrow T(\lambda\alpha) = \lambda T(\alpha) = \lambda\beta$$

Como $T(\lambda\alpha) = \lambda\beta \Rightarrow \lambda\beta \in T(W_1)$

$\therefore T(W_1)$ es un subespacio de W

b) i) $T^{-1}(W_1) \neq \emptyset$

$\theta' \in T^{-1}(W_1)$ como W_1 es un subespacio de W

$\Rightarrow \theta' \in W_1 \Rightarrow T(\theta') = \theta'$

$\Rightarrow \theta \in V \Rightarrow T^{-1}(W_1) \neq \emptyset$

ii) Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \in T^{-1}(W_1)$?

Sí $\alpha_1 \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \exists \beta_1 \in W_1$ tal que $T(\alpha_1) = \beta_1$

$\alpha_2 \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \exists \beta_2 \in W_1$ tal que $T(\alpha_2) = \beta_2$ sumando

$$T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$$

como T es una transformación lineal.

$T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \beta_1 + \beta_2$ y como W_1 es un subespacio

de $W \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 \in W_1 \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \in T^{-1}(W_1)$

iii) Si $\lambda \in k, \alpha \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \lambda\alpha \in T^{-1}(W_1)$?

$\alpha \in T^{-1}(W_1) \Rightarrow \exists \beta \in W_1 / T(\alpha) = \beta$ y $T(\lambda\alpha) = \lambda T(\alpha) = \lambda\beta$

como W_1 es un subespacio de W y $\lambda \in k \Rightarrow \lambda\beta \in W_1$ entonces

$\lambda\alpha \in T^{-1}(W_1)$.

$\therefore T^{-1}(W_1)$ es un subespacio de V .

c) \Rightarrow Supongamos que T es inyectiva (hipótesis)

Supongamos $T(\alpha) = \theta'$ y por otra parte $T(\theta) = \theta'$

$\Rightarrow T(\alpha) = T(\theta) \Rightarrow \alpha = \theta$

\Leftrightarrow Supongamos que $T(\alpha) = \theta' \Rightarrow \alpha = \theta$

Supongamos que $T(\alpha) = T(\beta) \Rightarrow T(\alpha) - T(\beta) = \theta'$

$\Rightarrow T(\alpha - \beta) = \theta' \Rightarrow \alpha - \beta = \theta \Rightarrow \alpha = \beta, \alpha$ y β son cualquiera $\Rightarrow T$ es inyectiva.

d) $\sum_{i=1}^r \alpha_i T(v_i) = \theta'$, como T es transformación lineal =

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i T(v_i) = T\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = \theta' \text{ y como } T \text{ es inyectiva}$$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = \theta$ y como $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ son l.i.

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$$

por lo tanto $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_r)\}$ es l.i.

Ejemplo.- Si $F: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R^2 / F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = (a_{11} + a_{22}, a_{21})$

¿F es transformación lineal? ¿F es inyectiva?

Solución

$$i) \text{ Si } \alpha, \beta \in M_{2 \times 2}(R) \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\alpha + \beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$T(\alpha + \beta) = ((a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}), a_{21} + b_{21}) \\ = (a_{11} + a_{22}, a_{21}) + (b_{11} + b_{22}, b_{21}) = T(\alpha) + T(\beta)$$

$$ii) \text{ Sea } \lambda \in R, \alpha \in M_{2 \times 2}(R) \Rightarrow \lambda \alpha = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

$$T(\lambda \alpha) = (\lambda a_{11} + \lambda a_{22}, \lambda a_{21}) = \lambda(a_{11} + a_{22}, a_{21}) = \lambda T(\alpha)$$

Luego T es una transformación lineal.

F es inyectiva si $F(\alpha) = \theta \Rightarrow \alpha = \theta$

$$\alpha \in M_{2 \times 2}(R) \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow F\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow (a_{11} + a_{22}, a_{21}) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{22} = 0 \\ a_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = -a_{22} \\ a_{21} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Luego } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F \text{ no es inyectiva.}$$

Ejemplo.- Si $F: R^4 \rightarrow R^6$ tal que $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, 0, x_2, x_3, x_4)$

¿F es una transformación lineal? ¿F es inyectiva?

Solución

$$i) F[(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)] = F(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

$$= (0, x_1 + y_1, 0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

$$= (0, x_1, 0, x_2, x_3, x_4) + (0, y_1, 0, y_2, y_3, y_4)$$

$$= F(x_1, x_2, x_3, x_4) + F(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

$$ii) F(\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)) = \lambda F(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ por comprobar}$$

$$F(\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)) = F(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = (0, \lambda x_1, 0, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

$$= \lambda(0, x_1, 0, x_2, x_3, x_4) = \lambda F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Luego de (i) y (ii) F es una transformación lineal.

$$F(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$$

$$F(x, y, z, w) = (0, x, 0, y, z, w) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow x = y = z = w = 0$$

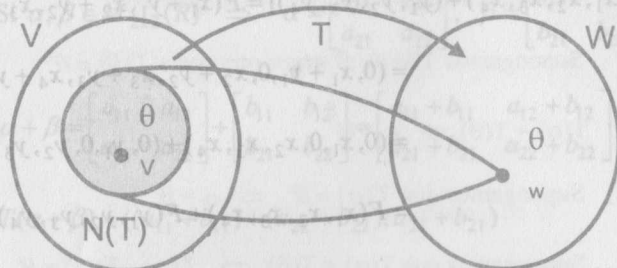
Luego $F(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0, 0, 0) \Rightarrow (x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ entonces F es inyectiva.

4.7. NÚCLEO E IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL.-

a) **DEFINICIÓN.-** Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal llamaremos núcleo de la transformación lineal T al conjunto denotado por " $N(T)$ " y queda definido como:

$$N(T) = \{v \in V / T(v) = \theta_w\}$$

Es decir el núcleo de T es el conjunto formado por todos los elementos de V tales que sus imágenes mediante T es igual al elemento nulo de W.



El núcleo de toda transformación lineal es la pre-imagen del vector nulo del segundo espacio, es decir:

$$N(T) = T^{-1}(\theta_w)$$

por definición, un vector perteneciente a V es un elemento del núcleo si y sólo si su imagen es el vector nulo de W .

$$x \in N(T) \Leftrightarrow T(x) = \theta_w$$

Ejemplo.- Determinar el núcleo de la transformación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x - z, y - z)$

Solución

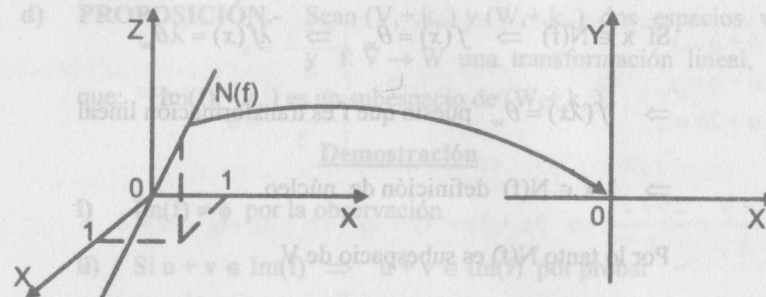
$$N(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

como $f(x, y, z) = (0, 0)$ de donde $(x - z, y - z) = (0, 0)$ por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z \wedge y = z \Rightarrow x = y = z$$

$$\text{Luego } N(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z\}$$

Representa una recta en \mathbb{R}^3 .



OBSERVACIÓN.- De la definición de núcleo de una transformación lineal $f: V \rightarrow W$ observamos que $N(f) \subset V$

También demostraremos que $f(\theta_v) = \theta_w$ de donde $\theta_v \in N(f)$ y de esto se tiene que el núcleo de toda transformación lineal f es no vacío.

b) PROPOSICIÓN.- Sean $(V, +, k, \cdot)$ y $(W, +, k, \cdot)$ dos espacios vectoriales y $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal, demostrar que: $(N(f), +, k, \cdot)$ es un subespacio de $(V, +, k, \cdot)$

Demostración

- $N(f) \neq \emptyset$ de la observación
- Si $x, y \in N(f) \Rightarrow x + y \in N(f)$ por probar

$$\begin{cases} x \in N(f) \\ y \in N(f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \theta_w \\ f(y) = \theta_w \end{cases} \text{ sumando } f(x) + f(y) = \theta_w$$

$$f(x + y) = \theta_w \text{ por que } f \text{ es transformación lineal}$$

$$\Rightarrow x + y \in N(f) \text{ definición de núcleo}$$

- $\lambda \in k, x \in N(f) \Rightarrow \lambda x \in N(f)$ por probar

$$\text{Si } x \in N(f) \Rightarrow f(x) = \theta_w \Rightarrow \lambda f(x) = \lambda \theta_w$$

$$\Rightarrow f(\lambda x) = \theta_w \text{ puesto que } f \text{ es transformación lineal}$$

$$\Rightarrow \lambda x \in N(f) \text{ definición de núcleo.}$$

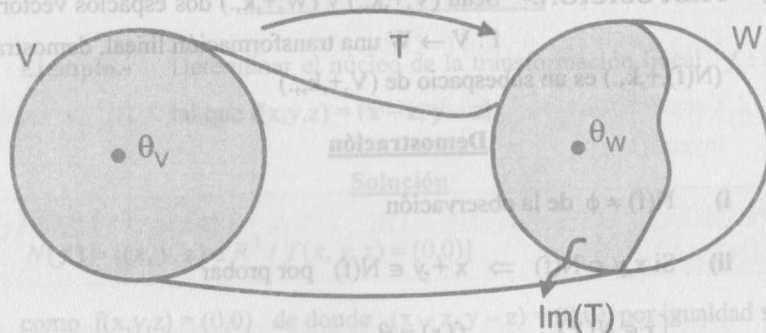
Por lo tanto $N(f)$ es subespacio de V .

c) DEFINICIÓN.- Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal. Llamaremos imagen de la transformación lineal T al conjunto denotado por $\text{Im}(T)$ que definiremos como:

$$\text{Im}(T) = \{w \in W / \exists v \in V \wedge T(v) = w\}$$

También se puede expresar en la forma:

$$\text{Im}(T) = \{T(v) / v \in V\}$$



Es decir: $w \in W$ es un elemento de la imagen de T , si existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$ esto quiere decir que la imagen de una transformación lineal es la totalidad de las imágenes de los vectores del primer espacio.

OBSERVACIÓN.- Sabemos que $T(\theta_v) = \theta_w$ de donde $\theta_w \in \text{Im}(T)$ lo que significa que $\text{Im}(T) \neq \emptyset$.

d) PROPOSICIÓN.- Sean $(V, +, k, \cdot)$ y $(W, +, k, \cdot)$ dos espacios vectoriales y $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal, demostrar que: $(\text{Im}(f), +, k, \cdot)$ es un subespacio de $(W, +, k, \cdot)$.

Demostración

i) $\text{Im}(f) \neq \emptyset$ por la observación

ii) Si $u + v \in \text{Im}(f) \Rightarrow u + v \in \text{Im}(f)$ por probar

$$\begin{cases} u \in \text{Im}(f) \\ v \in \text{Im}(f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x \in V / f(x) = u \\ \exists y \in V / f(y) = v \end{cases} \quad \text{sumando}$$

$$f(x) + f(y) = u + v, \text{ } f \text{ transformación lineal}$$

$$f(x + y) = u + v \text{ y } x + y \in V$$

$$\Rightarrow u + v \in \text{Im}(f) \text{ definición de imagen}$$

iii) Sea $\lambda \in k, u \in \text{Im}(f) \Rightarrow \lambda u \in \text{Im}(f)$ por probar

$$\text{Si } u \in \text{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in V / f(x) = u$$

$$\lambda f(x) = \lambda u, \text{ por ser } f \text{ transformación lineal}$$

$$f(\lambda x) = \lambda u, \lambda x \in V, \text{ de donde } \lambda u \in \text{Im}(f) \text{ por definición de Imagen.}$$

Por lo tanto $(\text{Im}(f), +, k, \cdot)$ es un subespacio de W .

Ejemplo.- Sea $f: R^2 \rightarrow R^3$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$. Hallar $\text{Im}(f)$

Solución

$$\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in R^3 / \exists (a, b) \in R^2 \wedge f(a, b) = (x, y, z)\}$$

$$f(a, b) = (x, y, z) \text{ de donde } (a + b, a - b, a + 2b) = (x, y, z) \text{ por igualdad se tiene:}$$

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b=y \\ a+2b=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=x+y \\ 3a=2y+z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2}=a \\ \frac{2y+z}{3}=a \end{cases}$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{2y+z}{3} \Rightarrow 3x+3y=4y+2z \Rightarrow 3x-y-2z=0$$

$$\therefore \text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in R^3 / 3x - y - 2z = 0\}$$

4.8. TEOREMA.-

Sean $(V, +, k, \cdot)$, $(W, +, k, \cdot)$ espacios vectoriales y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, se cumple:

- T es inyectiva $\Leftrightarrow N(T) = \{\theta_v\}$
- Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto linealmente dependiente en V , entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente dependiente en W .
- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son vectores de V tales que $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ son linealmente independiente en W , entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son linealmente independiente.
- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y T es una transformación lineal inyectiva, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente de W .

Demostración

- \Rightarrow) Asumiendo que T es inyectiva probaremos que $N(T) = \{\theta_v\}$ se debe cumplir que $\{\theta_v\} \subset N(T)$

$\theta_v \in N \Rightarrow \{\theta_v\} \subset N$, ahora falta probar que $N \subset \{\theta_v\}$

$$\text{sea } x \in N(T) \Rightarrow T(x) = \theta_w = T(\theta_v) \Rightarrow x = \theta_v$$

$$\Rightarrow x \in \{\theta_v\} \Rightarrow N(T) \subset \{\theta_v\}$$

$$\therefore N(T) = \{\theta_v\}$$

\Leftrightarrow) Por demostrar que T es inyectiva.

Es decir: si $T(x) = T(y) \Rightarrow x = y$

$$T(x) = T(y) \Rightarrow T(x) - T(y) = \theta_w \Rightarrow T(x - y) = \theta_w$$

$$\Rightarrow x - y \in N(T) \Rightarrow x - y = \theta_v \Rightarrow x = y$$

- Como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente $\Rightarrow \exists i$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \theta_v \wedge \alpha_i \neq 0, \text{ aplicando } T \text{ (transformación lineal) se tiene:}$$

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = T(\theta_v) \wedge \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \theta_w \wedge \alpha_i \neq 0$$

entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ son linealmente dependiente en W .

- Consideremos una combinación lineal en V .

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \theta_v \text{ por demostrar que } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\text{aplicando la transformación lineal } T \text{ se tiene: } T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = T(\theta_v) = \theta_w$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \theta_w \text{ como } T(v_1), \dots, T(v_n) \text{ son linealmente independiente}$$

entonces $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son linealmente independiente.

d) Consideremos una combinación lineal en W .

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \theta_w, \text{ aplicando Transformación Lineal}$$

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \theta_w \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in N(T)$$

como T es inyectiva por la parte (a) se tiene:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \theta_v \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

por ser v_1, v_2, \dots, v_n linealmente independiente por lo tanto $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Ejemplo.- Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ una transformación lineal, probar que:

T es inyectiva $\Leftrightarrow T(1,0)$ y $T(0,1)$ es linealmente independiente.

Solución

$\Rightarrow T$ es inyectiva $\Rightarrow T(1,0)$ y $T(0,1)$ son linealmente independiente consideremos la combinación lineal en R^2 .

$$\alpha T(1,0) + \beta T(0,1) = (0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \text{ por probar}$$

como T es una transformación lineal entonces:

$$\begin{aligned} T[\alpha(1,0) + \beta(0,1)] &= (0,0) \Rightarrow T(\alpha, \beta) = (0,0), \text{ como } T \text{ es inyectiva} \\ &\Rightarrow (\alpha, \beta) = (0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto $T(1,0)$ y $T(0,1)$ son linealmente independiente.

4.9. DIMENSIONES DEL NÚCLEO Y DE LA IMAGEN.-

TEOREMA.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensiones finita y $f: V \rightarrow W$ una transformación lineal entonces:

$$\dim V = \dim N(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Demostración

1ro. Suponiendo que $\text{Im}(f) = \{\theta\} \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 0$, de donde se tiene:

$$\dim(V) = \dim N(f)$$

2do. Suponiendo que $\text{Im}(f) \neq \{\theta\}$ y como V tiene dimensión finita entonces $\text{Im}(f)$ tiene dimensión finita, es decir que:

si $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\text{Im}(f)$, entonces existe un conjunto linealmente independiente en $V = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ tal que $f(v_i) = w_i, i = 1, 2, \dots, r$

3ro. Si $N(f) \neq \{\theta_v\}$, asumimos que $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ es una base de $N(f)$, ahora debe probar que $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_p\}$ es una base de V donde $\dim V = r + p$ y $\dim \text{Im}(f) = r$ y $\dim N(f) = p$

i) Si $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_p\}$ genera a $V \Rightarrow$ existe escalares $x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, y_2, \dots, y_p$ únicos tales que $\forall v \in V$ es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_p\}$ es decir:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r + y_1 u_1 + \dots + y_p u_p$$

Si $v \in V \Rightarrow f(v) \in \text{Im}(f) \Rightarrow$ existen escalares

$$x_1, x_2, \dots, x_r \text{ tal que } f(v) = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_r w_r$$

por que w_1, w_2, \dots, w_r es una base de la $\text{Im}(f)$ como $f(v_i) = w_i$,

$\forall i = 1, 2, \dots, r$, entonces:

$$f(v) = x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \dots + x_r f(v_r)$$

$$= f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r) \text{ por que } f \text{ es transformación lineal}$$

$$f(v) - f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r) = 0$$

$$f(v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_r v_r) = 0 \text{ por que } f \text{ es transformación lineal.}$$

$$\Rightarrow v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_r v_r \in N(f), \text{ definición de } N(f)$$

Luego $\{v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_r v_r\}$ es combinación lineal de $\{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ porque es base de $N(f)$ es decir existen y_1, y_2, \dots, y_p tal que: $v - x_1 v_1 - x_2 v_2 - \dots - x_r v_r = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_p u_p$, de donde se

$$\text{tiene: } v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r + y_1 u_1 + \dots + y_p u_p$$

por lo tanto $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_p\}$ genera a V .

ii) Ahora probaremos que $\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_p\}$ es linealmente independiente

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r + y_1 u_1 + \dots + y_p u_p = \theta_v$$

$$f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_r v_r + y_1 u_1 + \dots + y_p u_p) = f(\theta_v)$$

$$x_1 f(v_1) + \dots + x_r f(v_r) + f(y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_p u_p) = \theta_w$$

$$x_1 w_1 + \dots + x_r w_r + f(y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_p u_p) = \theta_w$$

como $\{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ es una base de $\text{Im}(f)$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0 \text{ de donde}$$

$$f(y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_p u_p) = \theta_w \Rightarrow y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_p u_p \in N(f)$$

$$\text{y como } \{u_1, u_2, \dots, u_p\} \text{ es una base de } N(f) \Rightarrow y_1 = y_2 = \dots = y_p = 0$$

$$\text{por lo tanto } x_1 = x_2 = \dots = x_r = y_1 = \dots = y_p = 0 \text{ de donde}$$

$\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, \dots, u_p\}$ es linealmente independiente en consecuencia

$\{v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_p\}$ es una base de V .

4to. del paso 3ro. se tiene que: $\dim V = r + p$ y como $\dim \text{Im}(f) = r$ y $\dim N(f) = p$

$$\therefore \dim V = \dim N(f) + \dim \text{Im}(f)$$

Ejemplo. Dado $T: R^4 \rightarrow R^3$ tal que:

$$T(x, y, z, w) = (x - y + 2z + 3w, y + 4z + 3w, x + 6z + 6w)$$

a) Probar que T es una transformación Lineal

b) Hallar $N(T)$, $\text{Im}(T)$ y $\dim(N(T))$, $\dim(\text{Im}(T))$

Solución

a) Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

por probar: $T(x + y) = T(x) + T(y)$

$$\text{i) } T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4)$$

$$= (x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + 2x_3 + 2y_3 + 3x_4 + 3y_4,$$

$$x_2 + y_2 + 4x_3 + 4y_3 + 3x_4 + 3y_4, x_1 + y_1 + 6x_3 + 6y_3 + 6x_4 + 6y_4)$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_2 + 4x_3 + 3x_4, x_1 + 6x_3 + 6x_4) +$$

$$+(y_1 - y_2 + 2y_3 + 3y_4, y_2 + 4y_3 + 3y_4, y_1 + 6y_3 + 6y_4)$$

$$= T(x) + T(y)$$

$$\text{ii) } \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^4, T(\lambda x) = \lambda T(x) \text{ por probar}$$

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$$

$$= (\lambda x_1 - \lambda x_2 + 2\lambda x_3 + 3\lambda x_4, \lambda x_2 + 4\lambda x_3 + 3\lambda x_4, \lambda x_1 + 6\lambda x_3 + 6\lambda x_4)$$

$$= \lambda(x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_2 + 4x_3 + 3x_4, x_1 + 6x_3 + 6x_4) = \lambda T(x)$$

por lo tanto $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal

b) Calculando $N(T)$ = núcleo de la transformación

$$N(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 / T(x, y, z, w) = (0, 0, 0)\}$$

$T(x, y, z, w) = (0, 0, 0)$, de donde se tiene:

$$(x - y + 2z + 3w, y + 4z + 3w, x + 6z + 6w) = (0, 0, 0)$$

por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3w = 0 \\ y + 4z + 3w = 0 \\ x + 6z + 6w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 6z + 6w = 0 \\ y + 4z + 3w = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6z - 6w \\ y = -4z - 3w \end{cases}$$

$$\text{si } (x, y, z, w) \in N(T) \Rightarrow (x, y, z, w) = (-6z - 6w, -4z - 3w, z, w)$$

$$(x, y, z, w) = (-6z, -4z, z, 0) + (-6w, -3w, 0, w) = z(-6, -4, 1, 0) + w(-6, -3, 0, 1)$$

$$\text{Luego } N(T) = L\{(-6, -4, 1, 0), (-6, -3, 0, 1)\}$$

de donde una base de $N(T)$ es $\{(-6, -4, 1, 0), (-6, -3, 0, 1)\}$

de donde $\dim(N(T)) = 2$

Calculando $\text{Im}(T)$ = imagen de la transformación

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \wedge T(a, b, c, d) = (x, y, z)\}$$

$$T(a, b, c, d) = (x, y, z) \Rightarrow (a - b + 2c + 3d, b + 4c + 3d, a + 6c + 6d) = (x, y, z)$$

$$\text{por igualdad} \begin{cases} a - b + 2c + 3d = x \\ b + 4c + 3d = y \\ a + 6c + 6d = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 6c + 6d = x + y \\ a + 6c + 6d = z \end{cases} \Rightarrow x + y = z$$

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y = z\}, \text{ calculando una base para Im}(T)$$

$$\text{si } (x, y, z) \in \text{Im}(T) \Rightarrow z = x + y, \text{ reemplazando}$$

$$(x, y, z) = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \text{ luego}$$

$$\text{Im}(T) = L\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \text{ de donde una base para Im}(T) \text{ es}$$

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \Rightarrow \dim(\text{Im}(T)) = 2$$

4.10. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.

Sean $(V, +, k, \cdot)$ y $(W, +, k, \cdot)$ dos espacios vectoriales y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V . Si $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ un conjunto cualquiera de vectores de W , entonces existe una única transformación lineal $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Demostración

i) Existencia

Sea $v \in V \Rightarrow v$ se puede expresar de una única forma como

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \forall i = 1, 2, \dots, n, a_i \in k \text{ como } \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ es base de } V.$$

$$\text{Definimos } T: V \rightarrow W \text{ como } T(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

Afirmamos: que T es una transformación lineal. En efecto:

Sean $u, v \in V$ y $a, b \in k$ probaremos que: $T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$

$$\text{Como } \begin{cases} u \in V \\ v \in V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sum_{i=1}^n a_i v_i \\ v = \sum_{i=1}^n b_i v_i \end{cases}$$

$$T(au + bv) = T\left(a \sum_{i=1}^n a_i v_i + b \sum_{i=1}^n b_i v_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) v_i\right)$$

$$= T\left(\sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) w_i$$

$$= a \sum_{i=1}^n a_i w_i + b \sum_{i=1}^n b_i w_i = aT(u) + bT(v)$$

$$\text{por lo tanto } T(au + bv) = aT(u) + bT(v)$$

ii) Unicidad:

Sea $T': V \rightarrow W$ otra transformación lineal tal que $T'(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$

Mostraremos que $T' = T$

Sea $v \in V, T'(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ por definición de T'

Luego $T(v) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ por definición de T

Ejemplo.- Sea $V = M_2(R)$ y $W = R^3$ una transformación lineal definida de tal manera que a los elementos de la base $\{(1,1,0), (1,2,1), (0,1,3)\}$ en R^3 le hace corresponder los vectores $(1,3), (5,1)$ y $(0,1)$ respectivamente.

Luego de i) y ii) queda demostrado.

Ejemplos.- Sea $f: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida de tal manera que a los elementos de la base $\{(1,1,0), (1,2,1), (0,1,3)\}$ en R^3 le hace corresponder los vectores $(1,3), (5,1)$ y $(0,1)$ respectivamente.

i) Hallar la imagen de un vector cualquiera de R^3

ii) Hallar la imagen de $(3, -1, 5)$ y $N(f)$

Solución

- i) A la terna $(x, y, z) \in R^3$ expresaremos en combinación lineal de los elementos de la base $\{(1, 1, 0), (1, 2, 1), (0, 1, 3)\}$

$$(x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 2, 1) + \gamma(0, 1, 3) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \beta + 3\gamma)$$

$$\text{por igualdad} \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha + 2\beta + \gamma \\ z = \beta + 3\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5x - 3y + z}{2} \\ \beta = \frac{3y - z - 3x}{2} \\ \gamma = \frac{x - y + z}{2} \end{cases}$$

$$(x, y, z) = \frac{5x - 3y + z}{2}(1, 1, 0) + \frac{3y - z - 3x}{2}(1, 2, 1) + \frac{x - y + z}{2}(0, 1, 3)$$

$$\text{como } f(1, 1, 0) = (1, 3), \quad f(1, 2, 1) = (5, 1), \quad f(0, 1, 3) = (0, 1)$$

como f es una transformación lineal

$$f(x, y, z) = \frac{5x - 3y + z}{2}f(1, 1, 0) + \frac{3y - z - 3x}{2}f(1, 2, 1) + \frac{x - y + z}{2}f(0, 1, 3)$$

$$= \frac{5x - 3y + z}{2}f(1, 3) + \frac{3y - z - 3x}{2}(5, 1) + \frac{x - y + z}{2}(0, 1)$$

$$= \left(\frac{5x - 3y + z + 15y - 5z - 15x}{2}, \frac{15x - 9y + 3z + 3y - z - 3x + x - y + z}{2} \right)$$

$$= (6y - 5x - 2z, \frac{13x - 7y + 3z}{2})$$

$$\therefore f(x, y, z) = (6y - 5x - 2z, \frac{13x - 7y + 3z}{2})$$

- ii) Calculando $f(3, -1, 5) = (-31, \frac{61}{2})$

$$N(f) = \{(x, y, z) \in R^3 / f(x, y, z) = (0, 0)\}$$

como $f(x, y, z) = (0, 0)$ de donde se tiene:

$$(6y - 5x - 2z, \frac{13x - 7y + 3z}{2}) = (0, 0) \quad \text{por igualdad}$$

$$\begin{cases} 6y - 5x - 2z = 0 \\ 13x - 7y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x + 4y = 0 \\ z = \frac{6y - 5x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{11}{4}x \\ z = -\frac{43}{4}x \end{cases}$$

$$(x, y, z) \in N(f) \Rightarrow (x, y, z) = (x, -\frac{11}{4}x, -\frac{43}{4}x)$$

$$(x, y, z) = x(1, -\frac{11}{4}, -\frac{43}{4})$$

$$\text{Luego } N(f) = L\{(1, -\frac{11}{4}, -\frac{43}{4})\}$$

Ejemplo.- Sea $V = M_{2 \times 2}(R)$ y $W = R^3$ y $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

una base de V en W consideremos los vectores $w_1 = (2, 1, 1)$,

$w_2 = (2, 1, 1)$, $w_3 = (0, 0, 0)$, $w_4 = (-1, 0, 1)$. Hallar la

transformación lineal.

Solución

$$\text{Sea } \alpha \in M_{2 \times 2}(R) \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ entonces}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d & b+c+d \\ c+d & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a+b+c+d \\ a_{12} = b+c+d \\ a_{21} = c+d \\ a_{22} = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a_{11} - a_{12} \\ b = a_{12} - a_{21} \\ c = a_{21} - a_{22} \\ d = a_{22} \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (a_{11} - a_{12}) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\alpha_1} + (a_{12} - a_{21}) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\alpha_2} + (a_{21} - a_{22}) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\alpha_3} + a_{22} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\alpha_4}$$

$$T(\alpha) = (a_{11} - a_{12})T(\alpha_1) + (a_{12} - a_{21})T(\alpha_2) + (a_{21} - a_{22})T(\alpha_3) + a_{22}T(\alpha_4)$$

$$T(\alpha) = (a_{11} - a_{12})(2,1,1) + (a_{12} - a_{21})(2,1,1) + (a_{21} - a_{22})(0,0,0) + a_{22}(-1,0,1)$$

$$T(\alpha) = (2a_{11} - 2a_{21} - a_{22}, a_{11} - a_{21}, a_{11} - a_{21} + a_{22})$$

Ejemplo.- Hallar la transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^2$ que asigna a los vectores de la base $\{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ en R^3 , los vectores de la base $\{(1,2), (1,2), (-1,1)\}$ en R^2 respectivamente.

Solución

Determinaremos la imagen de un vector genérico $(x, y, z) \in R^3$ y para esto expresaremos a (x, y, z) como combinación lineal de la base dada

$$(x, y, z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta, \alpha), \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = z \\ \beta = y - z \\ \gamma = x - y \end{cases}$$

$$(x, y, z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0)$$

$$f(x, y, z) = z f(1,1,1) + (y - z) f(1,1,0) + (x - y) f(1,0,0)$$

$$= z(1,2) + (y - z)(1,2) + (x - y)(-1,1)$$

$$= (z + y - z - x + y, 2z + 2y - 2z + x - y)$$

$$\therefore f(x, y, z) = (-x + 2y, x + y)$$

OBSERVACION.- Rotación de un Vector (x, y) de R^2

Si rotamos un vector de posición $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ en sentido antihorario hasta tomar la posición $\overrightarrow{OP'} = (x', y')$ (ver grafico) genera el ángulo θ , afirmamos que esta rotación define una transformación lineal.

En efecto:

Las coordenadas de $(x, y) \in R^2$ son:

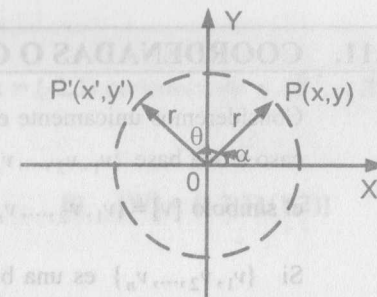
$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \dots (1)$$

Las coordenadas de $(x', y') \in R^2$ son:

$$\begin{cases} x' = r \cos(\alpha + \theta) \\ y' = r \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \dots (2)$$

De la ecuación (2) se tiene:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\theta + \alpha) = r[\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha] \\ &= r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta \end{aligned}$$



$$y' = r \sin(\theta + \alpha) = r[\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta] = r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta = y \cos \theta + x \sin \theta$$

$$\text{Luego } (x', y') = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$$

$$(x', y') = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots (3)$$

La ecuación (3) define una transformación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , y que puede ser expresado del modo siguiente.

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots (4)$$

$$T(v) = A_\theta \cdot v$$

$$\text{Siendo } v(x, y); \quad A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Donde A_θ es la matriz asociada a la transformaron de T

4.11. COORDENADAS O COMPONENTES DE UN VECTOR.-

Consideremos únicamente espacios vectoriales de base finita, donde para éste caso a una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ del espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$ denotaremos con el símbolo $[v] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $(V, +, k, \cdot)$ entonces a cada vector $x \in V$ se expresa en combinación lineal de la base, es decir que existen y son únicos los escalares x_1, x_2, \dots, x_n tal que

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

respecto de la base dada, el vector $v \in V$ queda caracterizado por los coeficientes de la combinación lineal o sea por los elementos x_1, x_2, \dots, x_n , luego a los coeficientes x_1, x_2, \dots, x_n se llaman coordenadas o componentes del vector $x \in V$ respecto de la base dada, si se elige otra base del espacio V , entonces el mismo vector $x \in V$ admite otras coordenadas o componentes x'_1, x'_2, \dots, x'_n .

Dada la base $[V] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ del espacio $(V, +, k, \cdot)$ podemos expresar a cada vector $x \in V$ como una matriz columna, cuyos elementos sean las coordenadas de x respecto de la base $[V]$ y a ésto escribiremos así:

$$X_{[V]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo.- Hallar las coordenadas de $x = (-2, 3)$ perteneciente a $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ respecto de las bases

$$\text{i) } [V] = \{(1, 1), (1, 0)\} \quad \text{ii) } [W] = \{(-2, 3), (1, 2)\}$$

Solución

i) A las coordenadas de $x = (-2, 3)$ expresamos en combinación lineal de $[V]$.

$$(-2, 3) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 0) = (\alpha + \beta, \alpha) \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} -2 = \alpha + \beta \\ 3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -5 \end{cases}$$

$$X_{[V]} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ii) A las coordenadas de $x = (-2, 3)$ expresamos en combinación lineal de $[W]$

$$(-2, 3) = \alpha(-2, 3) + \beta(1, 2) = (-2\alpha + \beta, 3\alpha + 2\beta) \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} -2 = -2\alpha + \beta \\ 3 = 3\alpha + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$X_{[W]} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.12. MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL.-

Consideremos una transformación lineal $f: V \rightarrow W$ entre los espacios V y W de dimensiones finitas $\dim V = n$, $\dim W = m$.

Consideremos una base en cada espacio vectorial

$$[V] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ una base de } V; \quad [W] = \{w_1, w_2, \dots, w_m\} \text{ una base de } W.$$

Si $x \in V$ entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ únicos tal que $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

y por (4.11.) las coordenadas de x respecto a la base $[V]$ es:

$$X_{[V]} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Si la imagen de $x \in V$ es $y \in W$, se tiene: $y = f(x)$

como $y \in W$ entonces se puede expresar de modo único como combinación lineal de la base $[W]$ o sea:

$$y = \alpha'_1 w_1 + \alpha'_2 w_2 + \dots + \alpha'_m w_m$$

donde los escalares $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ son las coordenadas de la imagen de x respecto de la base $[W]$.

$$y_{[W]} = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_m \end{pmatrix}$$

ahora por el teorema fundamental de las transformaciones lineales, f queda caracterizado unívocamente por los valores que toma cualquiera de la base de V , es decir:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Enseguida asignamos a cada escalar a_{ij} un doble subíndice; el primero, asociado a cada vector de la base $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, y el segundo, en correspondencia con el vector de la base $[V]$.

Luego

$$\begin{cases} f(v_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{m1} w_m \\ f(v_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{m2} w_m \\ f(v_3) = a_{13} w_1 + a_{23} w_2 + \dots + a_{m3} w_m \\ \vdots \\ f(v_n) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{mn} w_m \end{cases}$$

Los $n \cdot m$ escalares a_{ij} que están en las combinaciones de los vectores que son imágenes de los elementos de la base de V constituyen una matriz cuya transpuesta denotaremos por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

esta matriz recibe el nombre de "matriz de la transformación lineal f respecto de las bases $[V]$ y $[W]$ ".

La matriz de la transformación lineal es del tipo $m \times n$ donde m es la dimensión del segundo espacio y n del primero.

Luego para hallar la matriz de una transformación lineal f respecto de una base en cada espacio, se determinan las imágenes dadas por f de los vectores de la base del primer espacio se expresa estas imágenes en términos de la base del segundo espacio, o sea como combinación lineal de los vectores de la segunda base, la transpuesta de la matriz de los coeficientes es la matriz de la transformación lineal respecto de las bases de ambos espacios.

Si A es la matriz de la transformación lineal f respecto de las bases $[V]$ y $[W]$ y si $X_{[V]}$ la matriz columna correspondiente al vector $x \in V$, cuyos elementos son las coordenadas de este respecto de la base de V , entonces la imagen de x , expresada en términos de la base de W , se obtiene multiplicando por A al vector columna $X_{[V]}$ o sea

$$f(x) = AX_{[V]} = Y_{[W]}.$$

Ejemplo.- Una transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^2$ está definida por:
 $f(x, y, z) = (x - 2z, y + z).$

- a) Hallar la matriz A de f respecto de las bases $\{(1,1,1), (2,2,0), (3,0,0)\}$ en R^3 y $\{(2,0), (0,2)\}$ en R^2 .

Solución

$$f(1,1,1) = (-1, 2) = \alpha_1(2,0) + \beta_1(0,2) = -\frac{1}{2}(2,0) + 1(0,2)$$

$$f(2,2,0) = (2,2) = \alpha_2(2,0) + \beta_2(0,2) = 1(2,0) + 1(0,2)$$

$$f(3,0,0) = (3,0) = \alpha_3(2,0) + \beta_3(0,2) = \frac{3}{2}(2,0) + 0(0,2)$$

$$\text{Luego la matriz } A \text{ de } f \text{ respecto a las bases dadas es } A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- b) Mediante A , obtener la imagen de $(-2,2,-2) \in R^3$.

Solución

Calculando las coordenadas de $x = (-2,2,-2)$ con respecto a la base $[V]$

$$(-2,2,-2) = \alpha(1,1,1) + \beta(2,2,0) + \gamma(3,0,0) = (\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + 2\beta, \alpha)$$

$$\text{por la igualdad de vectores se tiene: } \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = -2 \\ \alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$X_{[V]} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$f(-2, 2, -2) = AX_{[V]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & & \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$= (1 + 2 - 2, -2 + 2 + 0) = (1, 0) = y_{[W]}$$

Ejemplo.- Sea $T: R^4 \rightarrow R^3$ una transformación lineal definida por:

$$T(x, y, z, w) = (x + 2y, x - 3z + w, 2y + 3z + 4w)$$

Si $[V]$ y $[W]$ son las bases naturales para R^4 y R^3 respectivamente:

a) Encuentre la matriz A de T respecto de las bases $[V]$ y $[W]$.

b) Use A para encontrar $T(x, y, z, w)$

Solución

a) Sea $[V] = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ base de R^4

$[W] = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base de R^3 .

$$T(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0) = 1(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

$$T(0, 1, 0, 0) = (2, 0, 2) = 2(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1)$$

$$T(0, 0, 1, 0) = (0, -3, 3) = 0(1, 0, 0) - 3(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$$

$$T(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 4) = 0(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 4(0, 0, 1)$$

Luego la matriz A de f respecto de las bases dada es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) Como $(x, y, z, w) = (x, y, z, w)_{[V]}$ y $T(x, y, z, w)_{[W]} = T(x, y, z, w)$

entonces $T(x, y, z, w) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ por lo tanto

$$T(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = (x + 2y, x - 3z + w, 2y + 3z + 4w)$$

que está de acuerdo con la definición de T .

Ejemplo.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida por:

$$T(x, y, z) = \left(-\frac{x}{2} - \frac{11}{2}y + \frac{5}{2}z, \frac{7}{2}x - \frac{7}{2}y + \frac{7}{2}z\right)$$

si $[V] = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ y $[W] = \{(1, 2), (0, 3)\}$ son bases de R^3 y R^2 respectivamente, encuentre la matriz A de T respecto de las bases dadas.

Solución

$$T(1, 0, 1) = (2, 7) = \alpha_1(1, 2) + \beta_1(0, 3) = 2(1, 2) + 1(0, 3)$$

$$T(2, 0, 0) = (-1, 7) = \alpha_2(1, 2) + \beta_2(0, 3) = -1(1, 2) + 3(0, 3)$$

$$T(0, 1, 1) = (-3, 0) = \alpha_3(1, 2) + \beta_3(0, 3) = -3(1, 2) + 2(0, 3)$$

Luego la matriz A de T respecto a las bases dadas es: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Ejemplo.- Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- a) Encuentre la transformación única $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que la matriz de T referidas de las bases.

$[V] = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ y $[W] = \{(1,0), (1,1)\}$ de R^3 y R^2 respectivamente sea A .

- b) Encuentre $T(x,y,z)$

Solución

- a) Si $[T]_{[V][W]} = A$, entonces se tiene:

$$T(1,0,0) = (4,0), \quad T(1,1,0) = (2,1) \quad \text{y} \quad T(1,1,1) = (1,3)$$

$$\text{Por lo tanto: } T(1,0,0) = (4,0) = \alpha_1(1,0) + \beta_1(1,1) = 4(1,0) + 0(1,1)$$

$$T(1,1,0) = (2,1) = \alpha_2(1,0) + \beta_2(1,1) = 2(1,0) + 1(1,1)$$

$$T(1,1,1) = (1,3) = \alpha_3(1,0) + \beta_3(1,1) = 1(1,0) + 3(1,1)$$

T es única porque una transformación está completamente determinada por la imagen de una base.

- b) Como $T(x) = A \cdot X_{[V]}$ entonces

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma)$$

$$\text{por igualdad} \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma & \alpha = x - y \\ y = \beta + \gamma & \beta = y - z \\ z = \gamma & \gamma = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$$

$$T(x,y,z) = (x-y)T(1,0,0) + (y-z)T(1,1,0) + zT(1,1,1)$$

$$= (x-y)(4,0) + (y-z)(2,1) + z(1,3) = (4x-4y+2y-2z+z, 0+y-z+3z)$$

$$\therefore T(x,y,z) = (4x-2y-z, y+2z)$$

Que es lo mismo si se aplica.

$$T(x,y,z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{[V]} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-2y-z \\ y+2z \end{pmatrix}$$

Comprobaremos el resultado empleando esta expresión de $T(x,y,z)$ para encontrar las imágenes de los vectores de $[W]$.

$$T(1,0,0) = (4,0), \quad T(1,1,0) = (2,1), \quad T(1,1,1) = (1,3)$$

4.13. ALGEBRA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.-

Al conjunto de todas las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales V y W , sobre el cuerpo k , denotaremos por $L(V,W)$ es decir:

$$L(V,W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ es transformación lineal}\}$$

Ahora en $L(V,W)$ definimos la suma de funciones y el producto de escalares por funciones:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in V$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in k$$

- a) **TEOREMA.-** Sea V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo k y sean f y g transformaciones lineales de V en W demostrar que la función $f+g$ es una transformación lineal.

Demostración

Sean $f, g: V \rightarrow W$ transformación lineal y $\alpha, \beta \in V, a, b \in k$ entonces $a\alpha + b\beta \in V$ entonces

$$\begin{aligned}(f+g)(a\alpha+b\beta) &= f(a\alpha+b\beta) + g(a\alpha+b\beta) = (af(\alpha) + bf(\beta)) + (ag(\alpha) + bg(\beta)) \\ &= a(f(\alpha) + g(\alpha)) + b(f(\beta) + g(\beta)) = a(f+g)(\alpha) + b(f+g)(\beta) \\ \text{como } (f+g)(a\alpha+b\beta) &= a(f+g)(\alpha) + b(f+g)(\beta), \quad \forall a, b \in k.\end{aligned}$$

Luego $f+g$ es una transformación lineal.

b) TEOREMA.- Sea V y W espacios vectoriales sobre el campo k y f una transformación lineal de V en W , $c \in k$, demostrar que cf es una transformación lineal.

Demostración

Sean $c \in k$, $a, b \in k$ y $\alpha, \beta \in V$ entonces

$$\begin{aligned}(cf)(a\alpha + b\beta) &= c[f(a\alpha + b\beta)] = c[af(\alpha) + bf(\beta)] \\ &= (ca)f(\alpha) + (cb)f(\beta) = a(cf)(\alpha) + b(cf)(\beta) \quad \text{entonces}\end{aligned}$$

$$(cf)(a\alpha + b\beta) = a(cf)(\alpha) + b(cf)(\beta)$$

$\therefore cf$ es una transformación lineal.

Ejemplo.- Sean $f: R^4 \rightarrow R^3$ y $g: R^4 \rightarrow R^3$, dos transformaciones lineales definidas por:

$$f(x, y, z, w) = (x + 2y, 3y + 4z, -2x + 5w) \quad y$$

$$g(x, y, z, w) = (2x + y + z + w, y + 2z + w, 2x - 3y + 4z)$$

y las bases $[V] = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$

$[W] = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ de R^4 y R^3 respectivamente.

a) Encontrar la matriz A de f y la matriz B de g referidas a las bases de R^4 y R^3 .

b) Encuentre $f+g$ y demuestre que $f+g = A+B$ respecto de las bases $[V]$ y $[W]$.

c) Encuentre rf y demuestre que $rf = rA$ referidas a la base de $[V]$.

Solución

a) Calculando la matriz A de f respecto de la base $[V]$.

$$f(1,0,0,0) = (1,0,-2) = \alpha_1(1,0,0) + \beta_1(0,1,0) + \gamma_1(0,1,1)$$

$$= 1(1,0,0) + 2(0,1,0) - 2(0,1,1)$$

$$f(1,1,0,0) = (3,3,-2) = \alpha_2(1,0,0) + \beta_2(0,1,0) + \gamma_2(0,1,1)$$

$$= 3(1,0,0) + 5(0,1,0) - 2(0,1,1)$$

$$f(1,1,1,0) = (3,7,-2) = \alpha_3(1,0,0) + \beta_3(0,1,0) + \gamma_3(0,1,1)$$

$$= 3(1,0,0) + 9(0,1,0) - 2(0,1,1)$$

$$f(1,1,1,1) = (3,7,3) = \alpha_4(1,0,0) + \beta_4(0,1,0) + \gamma_4(0,1,1)$$

$$= 3(1,0,0) + 4(0,1,0) + 3(0,1,1)$$

Luego la matriz A de f es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 9 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

en forma semejante calculamos la matriz B de g .

$$g(1,0,0,0) = (2,0,2) = 2(1,0,0) - 2(0,1,0) + 2(0,1,1)$$

$$g(1,1,0,0) = (3,1,-1) = 3(1,0,0) + 2(0,1,0) - 1(0,1,1)$$

$$g(1,1,1,0) = (4,3,3) = 4(1,0,0) + 0(0,1,0) + 3(0,1,1)$$

$$g(1,1,1,1) = (5,4,3) = 5(1,0,0) + 1(0,1,0) + 3(0,1,1)$$

Ejemplo.- Sea $f: R^3 \rightarrow R$ tal que $f(x,y,z) = x + 2y - z$ y $g: R \rightarrow R^2$ tal que $g(x) = (2x, x)$. Hallar $g \circ f$.

Solución

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x,y,z) &= g(f(x,y,z)) = g(x + 2y - z) \\ &= (2(x + 2y - z), x + 2y - z) = (2x + 4y - 2z, x + 2y - z)\end{aligned}$$

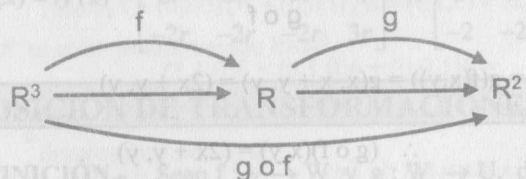
$$\therefore (g \circ f)(x,y,z) = (2x + 4y - 2z, x + 2y - z)$$

Ejemplo.- Consideremos las transformaciones lineales $f: R^3 \rightarrow R$ y $g: R \rightarrow R^2$ definidas por: $f(x,y,z) = x - y + z$ y $g(x) = (x, 0)$

Determinar el núcleo de $g \circ f$.

Solución

Para calcular el núcleo de $g \circ f$, determinaremos $g \circ f$.



$$(g \circ f)(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x - y + z) = (x - y + z, 0)$$

$$\therefore (g \circ f)(x,y,z) = (x - y + z, 0)$$

$$N(g \circ f) = \{(x,y,z) \in R^3 / (g \circ f)(x,y,z) = (0,0)\}$$

$$(g \circ f)(x,y,z) = (0,0) \text{ de donde } (x - y + z, 0) = (0,0) \Leftrightarrow x - y + z = 0$$

$$N(g \circ f) = \{(x,y,z) \in R^3 / x - y + z = 0\}$$

Ejemplo.- Si $f: R^4 \rightarrow R^3$ y $g: R^3 \rightarrow R^2$ son transformaciones lineales definidas por: $f(x,y,z,w) = (x + 2y, x - z, w + 2z)$, $g(x,y,z) = (2x + y, 3y + 4z)$ entonces $g \circ f: R^4 \rightarrow R^2$, sean $[V]$, $[W]$, $[U]$ las bases naturales de R^4 , R^3 y R^2 respectivamente.

- Encontrar $(g \circ f)(x,y,z,w)$
- Encuentre las matrices A de f, B de g y C de $g \circ f$.

Solución

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x,y,z,w) &= g(f(x,y,z,w)) = g(x + 2y, x - z, 2z + w) \\ &= (2x + 4y + x - z, 3x - 3z + 8z + 4w) = (3x + 4y - z, 3x + 5z + 4w)\end{aligned}$$

$$\therefore (g \circ f)(x,y,z,w) = (3x + 4y - z, 3x + 5z + 4w)$$

- Calculando la matriz A de f.

$$f(1,0,0,0) = (1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$f(0,1,0,0) = (2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$f(0,0,1,0) = (0,-1,2) = 0(1,0,0) - 1(0,1,0) + 2(0,0,1)$$

$$f(0,0,0,1) = (0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$\text{Luego la matriz A de f es: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz B de g.

$$g(1,0,0) = (2,0) = 2(1,0) + 0(0,1)$$

$$g(0,1,0) = (1,3) = 1(1,0) + 3(0,1)$$

$$g(0,0,1) = (0,4) = 0(1,0) + 4(0,1)$$

Luego la matriz B de g es:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando la matriz C de g o f

$$(g \circ f)(1,0,0,0) = (3,3) = 3(1,0) + 3(0,1)$$

$$(g \circ f)(0,1,0,0) = (4,0) = 4(1,0) + 0(0,1)$$

$$(g \circ f)(0,0,1,0) = (-1,5) = -1(1,0) + 5(0,1)$$

$$(g \circ f)(0,0,0,1) = (0,4) = 0(1,0) + 4(0,1)$$

Luego la matriz C de g o f es:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

4.15. TRANSFORMACIONES LINEALES INVERSIBLES.-

- a) **DEFINICIÓN.-** Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ se dice invertible si existe una función $F: W \rightarrow V$ tal que

$$T \circ F = I_W \text{ y } F \circ T = I_V.$$

NOTACION.- Si T es invertible $\Rightarrow F$ es único y $F = T^{-1}$

- b) **LEMA.-** Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal invertible, su inversa $T^{-1}: W \rightarrow V$, también es una transformación lineal.

Demostración

Sean $a, b \in k$, $\beta_1, \beta_2 \in W$ deseamos probar que:

$$T^{-1}(a\beta_1 + b\beta_2) = aT^{-1}(\beta_1) + bT^{-1}(\beta_2)$$

Sean $\beta_1, \beta_2 \in W \Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in V$ únicos tal que

$$T(\alpha_1) = \beta_1 \wedge T(\alpha_2) = \beta_2 \text{ además } T^{-1}(\beta_1) = \alpha_1, T^{-1}(\beta_2) = \alpha_2$$

$$\Rightarrow \text{ como } V \text{ es un espacio vectorial } \Rightarrow a\alpha_1 + b\alpha_2 \in V$$

$\forall a, b \in k$ y como T es una transformación lineal

$$T(a\alpha_1 + b\alpha_2) = aT(\alpha_1) + bT(\alpha_2) = a\beta_1 + b\beta_2$$

$T(a\alpha_1 + b\alpha_2) = a\beta_1 + b\beta_2 \Rightarrow a\alpha_1 + b\alpha_2$ es el único vector de V que es aplicado en $a\beta_1 + b\beta_2$ entonces

$$T^{-1}(a\beta_1 + b\beta_2) = a\alpha_1 + b\alpha_2 = aT^{-1}(\beta_1) + bT^{-1}(\beta_2) \text{ entonces}$$

$$T^{-1}(a\beta_1 + b\beta_2) = aT^{-1}(\beta_1), \forall a, b \in k \text{ y } \forall \beta_1, \beta_2 \in W$$

$\therefore T^{-1}$ es una transformación lineal de W sobre V.

OBSERVACIÓN.-

$$\text{i) } T \text{ es invertible} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & T \text{ es inyectiva} \\ (2) & T \text{ es suryectiva} \end{cases}$$

$$\text{ii) } T \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow N(T) = \{0\}$$

$$\text{iii) } T \text{ es suryectiva} \Leftrightarrow T(V) = W$$

Ejemplo.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$ probar que:

1) T es una transformación lineal.

2) ¿T es invertible? de serlo hallar una expresión para T^{-1} como aquella que define a T.

Solución

1) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3) = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3)$$

$$T(a(x_1, x_2, x_3) + b(y_1, y_2, y_3)) = T(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3)$$

$$= T(a(x_1, x_2, x_3)) + T(b(y_1, y_2, y_3)) = aT(x_1, x_2, x_3) + bT(y_1, y_2, y_3)$$

$\therefore T$ es una transformación lineal

Sea $(x, y, z) \in N(T) \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$(3x, x - y, 2x + y + z) = (0, 0, 0)$ por igualdad

$x = 0, x - y = 0, 2x + y + z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$

Luego $N(T) = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow T$ es inyectiva y $\dim N(T) = 0$

Como $\dim N(T) + \dim T(\mathbb{R}^3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$ entonces

Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim T(\mathbb{R}^3) \Rightarrow T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \Rightarrow T$ es suryectiva por lo tanto T es inversible

Ahora calculamos T^{-1}

Sea $(a, b, c) \in T(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$T(x, y, z) = (a, b, c) \wedge T^{-1}(a, b, c) = (x, y, z)$

$(3x, x - y, 2x + y + z) = (a, b, c)$ por igualdad se tiene:

$$\begin{cases} 3x = a \\ x - y = b \\ 2x + y + z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ y = \frac{a - 3b}{3} \\ z = c - a + b \end{cases}$$

Luego $T^{-1}(a, b, c) = \left(\frac{a}{3}, \frac{a - 3b}{3}, c - a + b\right)$

Probaremos que $(ToT^{-1})(a, b, c) = (a, b, c)$ y $(T^{-1}oT)(x, y, z) = (x, y, z)$

$(ToT^{-1})(a, b, c) = T(T^{-1}(a, b, c)) = T\left(\frac{a}{3}, \frac{a - 3b}{3}, c - a + b\right) = (a, b, c)$

$(T^{-1}oT)(x, y, z) = T^{-1}(x, y, z) = T^{-1}(3x, x - y, 2x + y + z) = (x, y, z)$

c) **TEOREMA.-** Sean V y W espacios vectoriales finito dimensionales y $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces T es inversible si y solamente si T transforma una base de V en una base de W .

Demostración

\Rightarrow Asumiremos que T es inversible, y sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V .

Consideremos los vectores

$w_1 = T(v_1), w_2 = T(v_2), w_3 = T(v_3), \dots, w_n = T(v_n)$

AFIRMACIÓN (1). Los vectores w_1, w_2, \dots, w_n son l.i.

En efecto, sea $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n = \theta_w$ entonces por ser T^{-1} una transformación lineal se tiene: $\alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2 T^{-1}(w_2) + \dots + \alpha_n T^{-1}(w_n) = \theta_v$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \theta_v$ y como $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Luego $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ son linealmente independiente.

AFIRMACIÓN (2). $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ genera el espacio vectorial W .

En efecto, sea $w \in W \Rightarrow T^{-1}(w) \in V$

$$\Rightarrow T^{-1}(w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Rightarrow w = T(T^{-1}(w)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$$

Luego $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ genera W de las afirmaciones (1) y (2) $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base de W .

\Leftarrow Ahora asumiremos que $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base de W .

Mostraremos que T es inversible.

Definamos $F: W \rightarrow V$ tal que $F(w_i) = v_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ lo cual siempre es posible en virtud del teorema fundamental de las transformaciones lineales, entonces:

Si $v \in V$, donde $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, tenemos que:

$$(F \circ T)(v) = F(T(v)) = F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i T(v_i)\right) \text{ por ser } T \text{ transformación lineal}$$

$$= F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i\right) \text{ por definición de } T.$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i F(w_i) \text{ por ser } F \text{ transformación lineal.}$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \text{ por definición de } F. \\ = v \quad \therefore (F \circ T)(v) = I_v \quad \dots (1)$$

por otro lado si $w \in W$ donde $w = \sum_{i=1}^n b_i w_i$, entonces $(T \circ F)(w) = T(F(w))$

$$= T\left(\sum_{i=1}^n b_i F(w_i)\right) \text{ por ser } F \text{ transformación lineal} \\ = T\left(\sum_{i=1}^n b_i v_i\right), \text{ por ser definición de } F.$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i T(v_i) \text{ por ser } T \text{ transformación lineal.}$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i w_i \text{ por ser definición de } T. \\ = w \quad \therefore (T \circ F)(w) = I_w \quad \dots (2)$$

de (1) y (2) T es inversible y su inversa es F .

4.16. TEOREMA.-

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de igual dimensión. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalente.

- i) T es inversible.
- ii) T es inyectiva.
- iii) T es suryectiva.
- iv) T transforma bases en bases.

Demostracióni) \Rightarrow ii)

$$T(u) = T(v) \Rightarrow T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(T(v))$$

 $u = v$ por ser T inversible
ii) \Rightarrow iii)

sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ una base para V , como T es inyectiva $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es linealmente independiente en W ; pero como $\dim W = n$, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ es una base para W .

Luego sea $w \in W$, donde $w = \sum_{i=1}^n a_i w_i$ entonces existe $v \in V$ donde

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \text{ tal que } T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w_i = w$$

En consecuencia T es suryectiva.

iii) \Rightarrow iv)

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $T(v_i) = w_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ sus imágenes mediante T probaremos que $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ generan W .

En efecto, para todo $w \in W$, existe $v \in V$ donde

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \text{ tal que } w = T(v) = T\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i T(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w_i$$

por ser suryectiva, por otra parte como $\dim W = n$, entonces $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base de W .

Luego T transforma bases en bases.

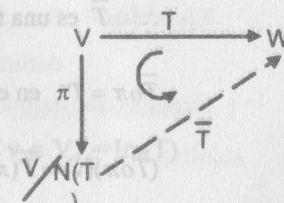
iv) \Rightarrow i) fue demostrado en c) de 3.15)

4.17. ISOMORFISMO INDUCIDO POR UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL.-

TEOREMA.- Sean V y W espacios vectoriales sobre el campo k , $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal y $\pi: V \rightarrow V/N(T)$ la proyección canónica, Entonces:

i) Existe una única transformación lineal

$$\bar{T}: V/N(T) \rightarrow W \text{ tal que } \bar{T} \circ \pi = T$$

ii) $V/N(T) \cong \text{Im}(T)$ **Demostración**i) Definimos $\bar{T}: V/N(T) \rightarrow W$

$$V + N(T) \rightarrow \bar{T}(V + N(T)) = T(v)$$

PROBAREMOS QUE \bar{T} ESTA BIEN DEFINIDA.- Es decir que la definición de \bar{T} no depende del representante de la clase.

Sea pues, $V_1 + N(T) = V_2 + N(T) \Rightarrow V_1 - V_2 \in N(T)$

$$\Rightarrow T(V_1 - V_2) = \theta \Rightarrow T(v_1) = T(v_2)$$

$$\Rightarrow \bar{T}(v_1 + N(T)) = \bar{T}(v_2 + N(T))$$

$\therefore \bar{T}$ esta bien definida.

T ES UNA TRANSFORMACION LINEAL.- En efecto:

$$\begin{aligned}\bar{T}(a(v_1 + N(T)) + b(v_2 + N(T))) &= \bar{T}((av_1 + N(T)) + (bv_2 + N(T))) \\ &= \bar{T}(av_1 + bv_2) + N(T) = T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2) \\ &= a\bar{T}(v_1 + N(T)) + b\bar{T}(v_2 + N(T))\end{aligned}$$

$\therefore \bar{T}$ es una transformación lineal sobre k .

$\bar{T} \circ \pi = T$, en efecto:

$$(\bar{T} \circ \pi)(v) = \bar{T}(\pi(v)) = \bar{T}(v + N(T)) \quad \text{definición de } \pi$$

$$= T(v) \quad \text{definición de } \bar{T}$$

$$\therefore \bar{T} \circ \pi = T$$

UNICIDAD.-

Supongamos que existe otra transformación lineal

$$\tilde{T}: V/N(T) \rightarrow W$$

con las mismas propiedades de \bar{T} , luego

$$\tilde{T}(v + N(T)) = T(v) = \bar{T}(v + N(T)) \quad \therefore \tilde{T} = \bar{T}$$

ii) Que $V/N(T) \cong \text{Im}(T)$

Es decir probaremos que $\bar{T}: V/N(T) \rightarrow \text{Im}(T)$ es un isomorfismo.

a) \bar{T} ES UN MONOMORFISMO.- En efecto:

$$\begin{aligned}N(\bar{T}) &= \{v + N(T) / \bar{T}(v + N(T)) = \theta_w\} \\ &= \{v + N(T) / T(v) = \theta_w\} = \{v + N(T) / v \in N(T)\} \\ &= N(T) \quad (\text{que es el cero del espacio cociente } V/N(T))\end{aligned}$$

$\therefore \bar{T}$ es un monomorfismo

b) \bar{T} ES EPIMORFISMO.- Pues

$$\text{Im}(\bar{T}) = \{\bar{T}(v + N(T)) / v \in V\} = \{T(v) / v \in V\} = \text{Im}(T)$$

$\therefore \bar{T}$ es un epimorfismo

de (a) y (b) y la definición de isomorfismo, \bar{T} es un isomorfismo

$$\therefore V/N(T) \cong \text{Im}(T)$$

con lo cual completa la demostración del teorema.

Ejemplo.- Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y, z) = (2x + z, -y + 2z)$ determinar su núcleo y el isomorfismo inducido.

Solución

$$N(T) = \{(x, y, z) \in R^3 / T(x, y, z) = (0, 0)\}$$

$$T(x, y, z) = (0, 0) \text{ de donde } (2x + z, -y + 2z) = (0, 0) \Rightarrow 2x + z = 0 \wedge -y + 2z = 0$$

$$N(T) = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + z = 0 \wedge y = 2z\}$$

una base de $N(T)$ es: $(x, y, z) = (x, -4x, -2x)$

$(x, y, z) = x(1, -4, -2) \Rightarrow N(T) = L\{(1, -4, -2)\}$ es una base de $N(T) \Rightarrow \dim N(T) = 1$

por el teorema 3.16 sabemos que existe un isomorfismo.

$$T: R^3 / N(T) \rightarrow \text{Im}(T) \quad \text{tal que} \quad T((x, y, z) + N(T)) = (2x + z, -y + 2z)$$

(ejercicio probar el teorema 4.17)

Ejemplos.- Sea $f: R^3 \rightarrow R^2$ y $g: R^3 \rightarrow R^2$ dos transformaciones lineales definida por $f(x, y, z) = (y, x + z)$ y $g(x, y, z) = (2z, x - y)$ hallar fórmulas que definan las transformaciones lineales $f + g$ y $3f - 2g$.

Solución

$$\text{Sea } (f + g): R^3 \rightarrow R^2 / (f + g)(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z), \forall (x, y, z) \in R^3$$

$$(f + g)(x, y, z) = (y, x + z) + (2z, x - y) = (y + 2z, 2x - y + z)$$

$$\therefore (f + g)(x, y, z) = (y + 2z, 2x - y + z)$$

$$\begin{aligned} (3f - 2g)(x, y, z) &= 3f(x, y, z) - 2g(x, y, z) = 3(y, x + z) - 2(2z, x - y) \\ &= (3y, 3x + 3z) - (4z, 2x - 2y) = (3y - 4z, x + 2y + 3z) \end{aligned}$$

$$\therefore (3f - 2g)(x, y, z) = (3y - 4z, x + 2y + 3z)$$

Ejemplo.- Determinar la transformación lineal inversa T^{-1} de la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$ definida por $T(x, y, z) = (2x, x + 2y, x + 3z)$

Solución

Calculando $T^{-1}(x, y, z)$, para ésto se tiene:

$$\forall (x, y, z) \in R^3, \exists (a, b, c) \in R^3 / T(a, b, c) = (x, y, z) \text{ y } T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$$

como $T(a, b, c) = (x, y, z)$ de donde $(2a, a + 2b, a + 3c) = (x, y, z)$ por igualdad

$$\begin{cases} 2a = x \\ a + 2b = y \\ a + 3c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{2} \\ b = \frac{2y - x}{4} \\ c = \frac{2z - x}{6} \end{cases}$$

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y - x}{4}, \frac{2z - x}{6} \right)$$

Ejemplo.- Determinar la transformación lineal inversa T^{-1} de la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$ definida por $T(x, y, z) = (2x + 2y, x + y, x + y + z)$.

Solución

Calculando T^{-1} , para ésto se tiene:

$$\forall (x, y, z) \in R^3, \exists (a, b, c) \in R^3 \text{ talque } T(a, b, c) = (x, y, z) \text{ y } T^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$$

pero T es inversible $\Leftrightarrow T$ es inyectiva

Veremos si T es inyectiva

$$T(x_1, x_2, x_3) = T(y_1, y_2, y_3) \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$$

$$(2x_1 + 2x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (2y_1 + 2y_2, y_1 + y_2, y_1 + y_2 + y_3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2y_1 + 2y_2 \\ x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \quad \text{de donde}$$

$$x_3 = y_3 \text{ pero } x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$$

por lo tanto T no es inyectiva $\Rightarrow T^{-1}$

Ejemplo.- Sea la transformación lineal $f: R^2 \rightarrow R^2$ definida por
 $f(x, y) = (2x - y, x + y)$

- a) ¿f es inyectiva? b) Hallar la inversa de T si existe

Solución

- a) Si $N(f) = \{(0, 0)\} \Rightarrow f$ es inyectiva

$$\text{núcleo de } f = N(f) = \{(x, y) \in R^2 / f(x, y) = (0, 0)\}$$

como $f(x, y) = (0, 0)$ entonces se tiene:

$(2x - y, x + y) = (0, 0)$ por igualdad tenemos:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Luego $N(f) = \{(0, 0)\} \Rightarrow f$ es inyectiva

Como f es inyectiva entonces tiene inversa.

Ahora calculamos la inversa $f^{-1}(x, y)$

$$\forall (x, y, z) \in R^2, \exists (a, b, c) \in R^2 / f(a, b) = (x, y) \text{ y } f^{-1}(x, y) = (a, b)$$

como $f(a, b) = (x, y)$, de donde $(2a - b, a + b) = (x, y)$ por igualdad tenemos

$$\begin{cases} 2a - b = x \\ a + b = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+y}{3} \\ b = \frac{2y-x}{3} \end{cases}$$

$$\text{Luego } f^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2y-x}{3} \right)$$

Ejemplo.- Sean los conjuntos $V = \{q(x) = a + bx^2 + cx^4 / a, b, c \in R\}$,
 $W = \{(p, r, s, t) \in R^4 / p + r + s + t = 0\}$ donde V y W son
 espacios vectoriales sobre R .

Sea $f: V \rightarrow W$ la transformación lineal definida por:

$$f(a + bx^2 + cx^4) = (a - b, b - c, 2c - a, -c). \text{ Demostrar que } f \text{ es un isomorfismo.}$$

Solución

f es un isomorfismo si y solo si f es inyectiva y suryectiva por lo tanto debe demostrar que f es inyectiva y suryectiva.

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow N(f) = \{\emptyset\}$$

$$N(f) = \{q(x) \in V / f(q(x)) = (0, 0, 0, 0)\} \text{ donde}$$

$$q(x) = a + bx^2 + cx^4, \text{ donde } f(q(x)) = f(a + bx^2 + cx^4) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(a - b, b - c, 2c - a, -c) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow a = b = c = 0$$

$$\text{por lo tanto } N(f) = \{(0, 0, 0, 0)\} = (0 + 0x^2 + 0x^4)$$

Luego f es inyectiva.

f es suryectiva si $\forall (p, r, s, t) \in W$ existe $q(x) \in V$ tal que $f(q(x)) = (p, r, s, t)$

$$\text{donde } q(x) = a + bx^2 + cx^4$$

$$(a - b, b - c, 2c - a, -c) = (p, r, s, t) \text{ por igualdad}$$

$$\begin{cases} a - b = p \\ b - c = r \\ 2c - a = s \\ -c = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -s - 2t \\ b = r - t \\ c = -t \end{cases}$$

$$\text{Luego } \exists \quad q(x) = (-s-2t) + (r-t)x^2 + (-t)x^4$$

$f(q(x)) = f((-s-2t) + (r-t)x^2 + (-t)x^4) = (p, r, s, t)$ con lo cual f es suryectiva.

Como f es inyectiva y suryectiva $\Rightarrow f$ un isomorfismo.

4.18. CAMBIO DE BASE Y SEMEJANZA DE MATRICES.-

A) MATRICES DE PASAJE.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial de dimensión finita y consideremos dos bases de V , $[V] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $[v'] = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ ahora definimos dos endomorfismos.

1ro. $f: V \rightarrow V$ tal que $f(v_j) = v'_j, \forall j = 1, 2, \dots, n$

expresando a cada imagen como combinación lineal de la base $[V]$, se tiene:

$$v'_j = \sum_{i=1}^n P_{ij} v_i \quad \dots (1)$$

La matriz P de ésta transformación lineal respecto de la base $[V]$ en

cada espacio es:

$$P = (P_{ij})^t$$

P recibe el nombre de matriz de pasaje de la base $[V]$ a la base $[v']$

2do. $g: V \rightarrow V$ tal que $g(v'_j) = v_j, \forall j = 1, 2, \dots, n$

en forma similar al caso anterior es:

$$v_j = \sum_{i=1}^n P'_{ij} v'_i \quad \dots (2)$$

$P' = (P'_{ij})^t$ es la matriz de g respecto de la base $[v']$ en cada espacio

diremos que es la matriz de pasaje de la base $[v']$ a la base $[v]$.

OBSERVACIÓN.- Las matrices de pasaje P y P' son inversas entre sí, es decir que $PP' = P'P = I$

En efecto: de (1) y (2) tenemos que:

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{k=1}^n P'_{kj} v'_k = \sum_{k=1}^n P'_{kj} \sum_{i=1}^n P_{ik} v_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n P'_{kj} P_{ik} v_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n P_{ik} P'_{kj} \right) v_i \end{aligned}$$

como $v_j = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 1v_j + \dots + 0v_n$

resulta que el único término nulo de la sumatoria anterior se obtiene para $i = j$ y vale 1.

$$\text{Luego } \sum_{k=1}^n P_{ik} P'_{kj} = \delta_{ij}$$

Por definición de producto de matrices y de matriz identidad resulta $PP' = I$ en forma similar se deduce que $P'P = I$.

En consecuencia, ambas matrices son inversibles, y cada una es la inversa de la otra.

B) TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS.-

Consideremos la matriz de pasaje P de la base $[V]$ a la base $[v']$ y sea $x \in V$

Probaremos que: $X_{[V]} = PX_{[V']}$

Donde $X_{[V]}$ y $X_{[V']}$ son las matrices de las coordenadas de $x \in V$ en las bases $[V]$ y $[V']$ respectivamente.

En efecto: expresamos a x como combinación lineal de cada base y teniendo en cuenta (1) escribimos:

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha'_j v'_j = \sum_{j=1}^n \alpha'_j \sum_{i=1}^n P_{ij} v_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha'_j P_{ij} v_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n P_{ij} \alpha'_j \right) v_i$$

pero $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, por la unicidad de la combinación lineal se tiene

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} \alpha'_j, j = 1, 2, \dots, n$$

Luego por definición de producto de matrices, de las relaciones anteriores se deduce.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}, \text{ o sea que: } X_{[V]} = PX_{[V']} \quad \dots (3)$$

y como P es no singular resulta. $X_{[V']} = P^{-1} X_{[V]} \quad \dots (4)$

de donde a (3) y (4) se llaman fórmulas de transformación de coordenadas.

C) MATRICES DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Y CAMBIO DE BASE.-

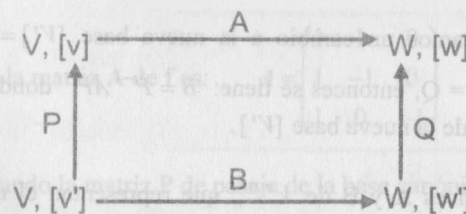
Consideremos una transformación lineal $f: V \rightarrow W$ y $A \in k^{m \times n}$ la matriz de f respecto de las bases $[V] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en V y $[W] = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ en W .

Si se hace un cambio de base en cada espacio, entonces la transformación lineal f está caracterizado por una matriz $B \in k^{m \times n}$ respecto del número par de bases $[V']$ y $[W']$ y consideremos las matrices $P \in k^{m \times n}$ y $Q \in k^{m \times m}$ de pasaje de $[V]$ a $[V']$ y de $[W]$ a $[W']$.

Ahora probaremos que las matrices A y B de la transformación lineal f respecto de los dos pares de bases verifican $B = Q^{-1}AP$

Es decir, que son equivalentes.

Para esto consideremos el diagrama siguiente.



Se verifica que:

1) $X_{[V]} = PX_{[V']}$ por la parte (b)

2) $Y_{[W]} = QY_{[W']}$ por la parte (d)

3) $Y_{[W]} = AX_{[V]}$ por ser transformación lineal de matriz A respecto de las bases $[V]$ y $[W]$.

4) $Y_{[W]} = BX_{[V]}$, por ser transformación lineal de matriz B respecto de las bases $[V']$ y $[W']$.

Luego de (2), (3) y (1) se deduce.

$$Y_{[W]} = Q^{-1}Y_{[W]} = Q^{-1}AX_{[V]} = Q^{-1}APX_{[V]}$$

de esta relación y de (4) resulta: $B = Q^{-1}AP$ ósea que $B \sim A$

Recíprocamente, si A y B son matrices equivalentes en $k^{m \times n}$, V y W son espacios vectoriales sobre k, de dimensiones n y m respectivamente, entonces A y B caracterizan a una misma transformación lineal $f: V \rightarrow W$ respecto de dos pares de bases.

D) MATRICES SEMEJANTES.-

Sea $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo que lo tomamos como un caso particular $\dim V = n$ y A la matriz f respecto de la base $[V] = [W]$ en cada espacio.

Si efectuamos un cambio a la nueva base $[V'] = [W']$ con matriz de pasaje $P = Q$, entonces se tiene: $B = P^{-1}AP$ donde B es la matriz de f respecto de la nueva base $[V']$.

Las matrices A y B de $k^{n \times n}$, que representan el mismo endomorfismo respecto de las bases $[V]$ y $[W]$, se llaman semejantes, por lo tanto diremos que:

$$A \text{ es semejante a } B \Leftrightarrow \exists P \text{ no singular} // B = P^{-1}AP.$$

La semejanza de matrices es una relación de equivalencia.

Ejemplo.- Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ una transformación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, x - y, x - z)$

- Determinar la matriz A de f respecto de la base canónica $[V]$ en cada espacio.
- Obtener la matriz P de pasaje de la base canónica $[V]$ a la base $[V'] = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.
- Aplicando el resultado de (i) y (ii) calcular la matriz B de f, respecto de la base $[V']$ en cada espacio.

Solución

- Como $[V] = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base canónica

Calculando la matriz A.

$$f(1,0,0) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$f(0,1,0) = (1,-1,0) = 1(1,0,0) - 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$f(0,0,1) = (0,0,-1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) - 1(0,0,1)$$

$$\text{Luego la matriz A de f es: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculando la matriz P de pasaje de la base canónica $[V]$ a la base

$$[V'] = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$$

$$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

$$(1,0,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

Luego
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

iii) Calculando $B = P^{-1}AP$ por el método de Gauss se calcula P^{-1}

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \rightarrow f_2 - f_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \rightarrow f_3 - f_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \rightarrow f_2 - f_3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \rightarrow f_3 + f_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \rightarrow f_1 + f_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \rightarrow -f_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \rightarrow f_1 - f_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Luego
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4.19. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I) Determinar cual de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales donde $k \in \mathbb{R}$.

- ① $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $f(x, y, z) = (y, x)$
- ② $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (x + 1, y + 2, 0)$
- ③ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (x - y, 0, y + z)$
- ④ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x + 1, y + 3)$
- ⑤ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y, z) = (x + y, x + z)$
- ⑥ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x^2, y + x)$
- ⑦ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (1 + x, y)$
- ⑧ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x^2, y)$
- ⑨ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x - y, 0)$
- ⑩ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (2x - 3y, x - y)$
- ⑪ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x + y, y - x, -x)$
- ⑫ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = (0, x + y, 0)$

13 $f: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $f(x,y,z) = (xy, z, x)$

14 $f: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $f(x,y) = (x,y,0) + (-1,0,0)$

15 $f: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $f(x,y) = (2x, -y, x)$

16 $f: R^2 \rightarrow R$ tal que $f(x,y) = xy$

17 $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = |x|$

18 $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = \sin x$

19 $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = \tan x$

20 $f: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $f(x,y) = (\sin x, y)$

II) Resolver los siguientes problemas:

1 Sea $W = C([0,1])$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas sobre el intervalo $0 \leq x \leq 1$ y sea $T: V \rightarrow R$ la función definida mediante la regla $F(f) = \int_0^1 f(x)dx$. ¿Es F una transformación lineal?

2 Determinar si la función $F: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $F(x,y) = (\sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{y})$ es una transformación lineal.

3 Sea A una matriz de orden $m \times n$ fija, entonces $T: R^n \rightarrow R^m$, definida por $T(x) = AX$. Analizar si es una transformación lineal.

4 Demuestre que si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces $T(u-v) = T(u) - T(v)$, $\forall u, v \in V$.

5 Dada la función $F: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R$ definida por $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+b$, analizar si es una transformación lineal.

6 Dada la función $F: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R$, definida por $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, analizar si es una transformación lineal.

7 Dada la función $F: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow R$, definida por $F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2$, analizar si es una transformación lineal.

8 Determinar cual de las siguientes funciones son transformaciones lineales.

a) $T: R^n \rightarrow R$ tal que $T(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

b) $T: R \rightarrow R^n$ tal que $T(x) = (x, x, \dots, x)$

c) $T: R^4 \rightarrow R^2$ tal que $T(x,y,z,w) = (xz, yw)$

d) $T: R^2 \rightarrow R$ tal que $T(x,y) = xy$

9 Analizar cual de las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

a) $T: M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ tal que $T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de $n \times n$.

b) $T: M_{nn} \rightarrow M_{nn}$ tal que $T(A) = A^t A$

c) $T: M_{mn} \rightarrow M_{mp}$ tal que $T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de orden $n \times p$.

d) $T: D_n \rightarrow D_n$ tal que $T(D) = D^2$ (D_n es el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$).

e) $T: D_n \rightarrow D_n$ tal que $T(D) = I + D$

- 10 Estudiar si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.
- $T: P_2 \rightarrow P_1$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x$
 - $T: P_2 \rightarrow P_1$ tal que $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$
 - $T: P_2 \rightarrow P_4$ tal que $T(P(x)) = [P(x)]^2$
 - $T: R \rightarrow P_n$ tal que $T(a) = a + ax + ax^2 + \dots + ax^n$
- 11 Si $C[0,1]$ es el conjunto de funciones reales. Analizar cual de las aplicaciones son transformaciones lineales.
- $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ tal que $T(f(x)) = f^2(x)$
 - $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ tal que $T(f(x)) = f(x) + 1$
 - $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ tal que $T(f(x)) = \int_0^1 f(x).g(x)dx$, donde g es una función fija en $C[0,1]$
 - $T: C'[0,1] \rightarrow C[0,1]$ tal que $T(f(x)) = (f(x).g(x))'$, donde g es una función fija en $C[0,1]$
 - $T: C[0,1] \rightarrow C[1,2]$ tal que $T(f(x)) = f(x-1)$
 - $T: C[0,1] \rightarrow R$ tal que $T(f(x)) = f(\frac{1}{2})$
- 12 Si $f: R^2 \rightarrow R^2$ es una transformación lineal y si $f(1,1) = (2,0)$ y $f(0,2) = (3,1)$ encontrar $f(x,y)$.

- 13 Si $f: R^2 \rightarrow R^2$ es una transformación lineal y si $f(1,0) = (3,4)$ y $f(0,1) = (-1,2)$ encontrar $f(x,y)$.
- 14 Si $T: R^3 \rightarrow R^2$, es una transformación lineal tal que $f(1,-1,-1) = (1,2)$, $T(1,-1,0) = (3,4)$, $T(1,0,0) = (5,6)$. Hallar $T(1,1,1)$ y $T(x,y,z)$
- 15 Si F es una transformación lineal de R^3 en R^2 tal que $F(1,-1,1) = (2,0)$, $F(1,1,0) = (0,1)$, $T(0,1,1) = (-1,-1)$. Hallar $F(x,y,z)$.
- 16 Si $f: R^2 \rightarrow R^2$ es una transformación lineal y si $f(1,0) = (3,4)$ y $f(0,1) = (-1,2)$ encontrar $f(x,y)$.
- 17 La función $T: R^2 \rightarrow R^3$ es lineal y verifica $T(1,2) = (1,0,2)$, $T(2,1) = (0,2,-1)$ determinar $T(3,3)$ y $T(1,-1)$
- 18 Se da una transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^4$ tal que $f(1,0,0) = (1,0,1,-1)$ y $f(1,1,0) = (2,1,3,0)$ y $f(1,1,1) = (0,0,0)$ encontrar $f(x,y,z)$.
- 19 Hallar una transformación lineal T tal que $T(1,1) = 2$, $T(0,1) = 1$ siempre que exista.
- 20 Hallar una transformación lineal T si existe tal que $T(1,1,1) = 3$, $T(0,1,-1) = 1$ y $T(0,0,1) = -2$.
- 21 Si $T(1,3,-2) = (2,1,5)$, $T(2,3,1) = (-1,3,4)$ y $T(-4,2,1) = (5,2,-2)$. Hallar $T(x,y,z)$ y $T(1,1,1)$
- 22 Si $T: R^2 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal tal que $T(1,2) = (1,0,-1)$, $T(2,1) = (2,1,-2)$ hallar $T(x,y)$.

23 Si $T: R^3 \rightarrow R^3$ es una transformación lineal tal que $T(1,2,3) = (0,2,1)$, $T(4,5,6) = (0,1,1)$ y $T(7,8,1) = (1,1,1)$. Hallar $T(x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in R^3$.

24 Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ un endomorfismo tal que $T(1,0) = (2,1)$, $T(0,1) = (1,-1)$, determinar la imagen del triángulo rectángulo cuyos vértices son $(1,1)$, $(4,1)$ y $(1,5)$.

III) Resolver los siguientes problemas:

1 Sea la transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^6$ tales que $T(5,-1) = (5,6,2,1,3,4)$ y $T(2,-3) = (1,0,5,-2,3,-1)$.

i) Hallar $T(x,y)$

ii) ¿ T es una transformación biyectiva?

2 Sea $\varphi: R^n \rightarrow M_{n \times 1}(R) / \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

donde si i) φ es una transformación lineal.

ii) φ es un isomorfismo.

3 Sea $f: R^3 \rightarrow R^3$ definida por la regla

$f(x,y,z) = (x+3y+4z, 3x+4y+7z, -2x+2y)$. Hallar $N(f)$ y $\text{Im}(f)$

4 Determinar el núcleo, la imagen y las dimensiones de ambos en la transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y+z, y+z)$

5 Sea la transformación lineal $f: R^2 \rightarrow R^3$ definida por $f(x,y) = (x+y, x-y, x+2y)$, determinar $N(f)$, $\text{Im}(f)$ y sus dimensiones.

6 Determinar si es una transformación lineal y calcular $N(f)$ y $\text{Im}(f)$ si $f: Q^3 \rightarrow Q^3$ tal que $f(x,y,z) = (x-y, 2z-y, x-2z)$

7 Sea $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por $T(x,y) = (x-y, y)$ probar que T es una transformación lineal y calcular $N(T)$, $\text{Im}(T)$.

8 Si $T: R^3 \rightarrow R^2$ es una transformación lineal tal que: $T(x,y,z) = (x-y-z, 2x-y-z)$. Hallar $N(T)$ y $\text{Im}(f)$

9 Determinar el núcleo, imagen y las dimensiones de las siguientes transformaciones lineales.

a) $f: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+y+z, y+z)$

b) $f: R^2 \rightarrow R$ tal que $f(x,y) = x-2y$

10 Analizar si la función dada T es una transformación lineal, en caso afirmativo, Hallar $N(T)$, $\text{Im}(T)$ y sus dimensiones si $f: R^4 \rightarrow R^2$, tal que $T(x,y,z,w) = (x+y-z, x-z+w)$

11 Sea $f: R^4 \rightarrow R^4$, una transformación lineal tal que $f(x,y,z,w) = (z+w-y, 2x-2z, x+3y-2z+3w, y-x+z+2w)$. Hallar una base para $N(f)$, $\text{Im}(f)$ y su dimensión.

12 Dado $f: R^4 \rightarrow R^3$, tal que: $T(x,y,z,w) = (x-y+2z+3w, y+4z+3w, x+6z+6w)$

a) Probar que T es una transformación lineal.

b) Hallar $N(T)$, $\text{Im}(T)$ y $\dim N(T)$, $\dim \text{Im}(T)$

- 13) Analizar si la función $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $T(x,y,z) = (x,y,-z)$ es una transformación lineal. Hallar bases para $N(T)$ y $\text{Im}(T)$.
- 14) Si T es una transformación lineal definida por $T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$, analizar si T es inyectiva. Hallar una base, la dimensión de $N(T)$, $\text{Im}(T)$.
- 15) Analizar si la aplicación $T: R^2 \rightarrow R^3$, tal que $T(x,y) = (x-2y, 2x-y, x+y)$ es una transformación lineal, si lo es hallar además $N(T)$, $\text{Im}(T)$, probar si T es inyectiva, suryectiva y biyectiva.
- 16) Si $T: R^5 \rightarrow R^4$, es definida por:
 $T(x,y,z,u,w) = (x+2y+u+3w, y+z+w, x+3y+z+u+4w, -2x-3y+z-2u-5w)$
- a) Hallar $\dim N(T)$ y una base de $N(T)$.
- b) Hallar $\dim \text{Im}(T)$ y una base de $\text{Im}(T)$.
- 17) Hallar una transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^3$ tal que $N(T) = L\{(2,1,-1,2), (3,0,1,-1)\}$
- 18) Hallar una transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^3$ tal que $N(T) = L\{(2,-1,0,1), (3,1,1,-2)\}$
- 19) Hallar una transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ sabiendo que $N(T) = L\{(1,2,3)\}$
- 20) Consideremos $(C, +, R, \cdot)$ y $f: C \rightarrow C$, definido por $f(z) = \bar{z} + \text{Im}(z)$. Determinar si f es una transformación lineal y en caso afirmativo clasificarlo.

- 21) Sea $V = \{a+bx^2+cx^4 / a,b,c \in R\}$ espacio generado por los polinomios $1, x^2, x^4$. $W = \{(p,r,s,t) \in R^4 / p+r+s+t=0\}$ definimos $T: V \rightarrow W$ por $T(a+bx^2+cx^4) = (a-b, b-c, 2c-a, -c)$. Probar que T es una transformación lineal y hallar $N(f)$ e $\text{Im}(f)$.
- 22) Sea $V = \{(x,y,z,w) \in R^4 / x=ay+bz+cw, a,b,c \text{ fijos}\}$ y $W = \{(r,s,t) \in R^3 / r+s+t=0\}$ dos espacios vectoriales $T: V \rightarrow W$ tal que $T(x,y,z,w) = (x-y, -ay-bz, y-cw)$. probar que T es una transformación lineal, además determinar $N(T)$, $\text{Im}(T)$ y sus dimensiones.
- 23) Hallar una transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^3$ tal que su núcleo sea generado por los vectores $(1,2,3,1)$ y $(0,-1,3,4)$.
- 24) Hallar una transformación lineal $T: R^4 \rightarrow R^3$ cuyo núcleo es generado por $(1,2,3,4)$ y $(0,1,1,1)$.
- 25) Hallar la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $N(T) = L\{(0,1,-1), (2,1,3)\}$.
- 26) Si $F: R^4 \rightarrow R^4$ es una transformación lineal tal que $N(F) = L\{(1,0,1,1), (0,1,1,1)\}$, $F(1,1,0,1) = (1,0,0,1)$, $F(1,1,1,0) = (0,1,1,0)$. Hallar $F(x,y,z,w)$
- 27) Sea la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^3$ definido por la regla $T(x,y,z) = (x+3y+4z, 3x+4y+7z, -2x+2y)$
- i) Hallar la imagen de T ii) Hallar el núcleo de T
- iii) ¿Cuál es la interpretación geométrica de la imagen y el núcleo de T respectivamente?

Rpta. $\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in R^3 / 8y - 14x + 5z = 0\}$

$$N(T) = \{(x, y, z) \in R^3 / x = -t, y = -t, z = t\}$$

- 28** Defina una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ cuyo núcleo sea la recta $y = x$ y su imagen sea la recta $y = 2x$.

Rpta. $T(x, y) = (-bx + by, -2bx + 2by)$

$$= (x - y, 2x - 2y); \text{ si } b = -1$$

- 29** Sea V el espacio vectorial de las matrices n -cuadradas sobre k y M una matriz arbitraria en V , definase $T: V \rightarrow V$ mediante $T(A) = AM + MA$, con $A \in V$, mostrar que T es lineal.

- 30** Sea $V = \{P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 / P \text{ es un polinomio de grado menor o igual que } 2\}$. Sean t_1, t_2, t_3 tres números reales distintas arbitrarias, definimos $L_i(P) = P(t_i)$, $i = 1, 2, 3$ donde $P \in V$; probar que las funciones L_1, L_2 y L_3 sobre V son linealmente independiente y forman una base de V^* .

- 31** Construir una transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^3$ tal que $T(1, 2) = (1, -1, 2)$; $T(1, 3) = (3, 0, 1)$; $T(1, 1) = (-1, -2, 3)$

- 32** Sea la transformación lineal $T: V \rightarrow W$, $V = R^3$, $W = R^3$ definida por:

$$T(x, y, z) = (x + 3y + 4z, 3x + 4y + 7z, -2x + 2y), \text{ donde}$$

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, z) \in W / 14x - 8y - 5z = 0\}$$

$$N(T) = \{(x, y, z) \in V / x = -t, y = -t, z = t\}, \text{ comprobar que:}$$

$$\dim V = \dim(\text{Im}(T)) + \dim N(T)$$

- 33** Sea $T: R^5 \rightarrow R^3$ la aplicación lineal definida por:

$$T(x, y, z, s, t) = (x + 2y + z - 2s + 4t, 2x + 5y + 4z - 5s + 5t, x + 4y + 5z - s - 2t)$$

Hallar una base y la dimension de la imagen de T .

Rpta. $\{(1, 2, 1), (0, 1, 2)\}$ forman una base de $\text{Im}(T)$ además $\dim \text{Im}(T) = 2$

- 34** Sea $T: R^3 \rightarrow R^3$ la aplicación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

Hallar una base y la dimension del núcleo de T .

Rpta. $N(T) = L \{(3, -1, 1)\}$; $\dim N(T) = 1$

- 35** Sea la base $S = \{V_1, V_2, V_3\}$ donde $V_1 = (1, 2, 3)$; $V_2 = (2, 5, 3)$ y $V_3 = (1, 0, 10)$

- a) Determine la regla de correspondencia de la transformación lineal

$$T: R^3 \rightarrow R^2, \text{ sabiendo que } T(V_1) = (1, 0), T(V_2) = (1, 0), T(V_3) = (0, 1)$$

- b) Calcular $T(1, 1, 1)$

Rpta. $T(x, y, z) = (30x - 10y - 3z, -9x + 3y + z)$

$$T(1, 1, 1) = (17, -5)$$

- 36** Sea la transformación lineal $T: V_2 \rightarrow V_2$ definida por $T(x, y) = (2x - y, x + y)$

- a) ¿Es T inyectiva?

- b) Hallar la inversa de T , si existe.

Rpta: T es inyectiva

$$T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+y}{3}, \frac{2y-x}{3} \right)$$

- 37) Supongase que la aplicación lineal $T: V \rightarrow W$, es inyectiva y suprayectiva, probar que la aplicación inversa $T^{-1}: W \rightarrow V$ es también lineal.

- 38) Probar que toda transformación lineal $T: k^2 \rightarrow k^2$ es de la forma:

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Probar además que T es un isomorfismo si y solo si $ad - bc \neq 0$

IV)

- 1) Sea $T: V_3(R) \rightarrow V_4(R)$ una transformación lineal tal que $T(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 2x + y, 2x + 3z)$ y dadas $\{(1, 0, 2), (0, 1, 3), (1, 2, 3)\}$ base de $V_3(R)$ y $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (1, -1, -1, 1), (1, -1, -1, -1)\}$ base de $V_4(R)$. Hallar la matriz asociada a T respecto de las bases dadas.

- 2) Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal donde $[V] = \{(1, 1, 0), (0, 0, \frac{1}{3}), (3, 0, 0)\}$ una base de R^3 $[W] = \{(2, 3), (1, 0)\}$ una base de R^2 , $T(1, 1, 0) = (1, 2)$, $T(0, 0, \frac{1}{3}) = (2, 0)$, $T(3, 0, 0) = (6, 4)$ encuentre la matriz de la transformación respecto de las bases dadas y encuentre las imágenes de los vectores $z_1 = (2, 4, 3)$, $z_2 = (4, 6, 2)$.

- 3) Sea $T: R^4 \rightarrow R^4$, una transformación lineal donde $[V] = \{x_1 = (1, 0, 0, 0), x_2 = (0, 2, 9, 0), x_3 = (0, 0, 1, 1), x_4 = (0, 0, 1, 0)\} = [W]$ donde $T(x_1) = (2, 3, 4, 1)$, $T(x_2) = (1, 4, 0, 6)$, $T(x_3) = (0, 3, 2, 0)$, $T(x_4) = (3, 0, 2, 1)$. Hallar la matriz de la transformación lineal respecto de las bases dadas y encuentre las imágenes de los vectores $z_1 = (2, 2, 4, 3)$, $z_2 = (4, 0, 1, 1)$.

- 4) Sea la transformación lineal $f: R^2 \rightarrow R^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x - y, x + 2y)$, hallar la matriz de f respecto de las bases $\{(1, 2), (2, 0)\}$ de R^2 y $\{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ de R^3 .

- 5) Una transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^2$ está definida por $f(x, y, z) = (x - 2z, y + z)$.

- a) Hallar la matriz A de f , respecto de las bases $\{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$ en R^3 $\{(2, 0), (0, 2)\}$ en R^2 .
- b) Mediante la matriz A , obtener la imagen de $(-2, 2, -2)$.

- 6) Dada la transformación lineal $f: R^{2 \times 2} \rightarrow R^3$ definida por:

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b - c, a + b + d, b + c + d)$$

- a) Obtener la matriz A de f respecto de las bases $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ en $R^{2 \times 2}$ y $\{(0, 2, 1), (2, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ en R^3 .

- b) Utilizando la matriz hallada, obtener la imagen de $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 7) Los vectores $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (2, 1, -1)$ forman una base de R^3 y los vectores $w_1 = (1, 0, 1, 0)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0)$, $w_3 = (1, 0, 0, 1)$, $w_4 = (1, 1, 1, 0)$ forman una base de R^4 definamos una transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^4$, tal que $f(v_1) = w_2 - w_1$, $f(v_2) = w_1 + w_2 + w_4$,

$$f(v_3) = w_1 + 2w_2 + 2w_3 + \vec{i}, \text{ hallar las bases para } N(f) \text{ y } \text{Im}(f).$$

- 8 Sea $f: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal definida de tal manera que a los elementos de la base R^3 le hace corresponder los vectores $(1,3)$, $(5,1)$ y $(0,1)$ respectivamente.

i) Hallar la imagen $(3,-1,5)$ y $N(f)$.

ii) Hallar la imagen de un vector cualquiera de R^3 .

- 9 Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ base de R^3 donde $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,5,3)$, $v_3 = (1,0,10)$. Hallar la transformación lineal $f: R^3 \rightarrow R^2$ tal que $f(1,2,3) = (1,0)$, $f(2,5,3) = (1,0)$, $f(1,0,10) = (0,1)$. Calcular $f(1,1,1)$.

- 10 Hallar la matriz asociada a la transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por:

$$T(x,y) = 2x + y, x - y \quad \text{Rpta. } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 11 Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ la aplicación lineal definida por:

$T(x,y,z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$. Hallar la matriz de T en las siguientes bases de R^3 y R^2 : $B = \{w_1, w_2, w_3\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$ donde $w_1 = (1,1,1)$, $w_2 = (1,1,0)$, $w_3 = (1,0,0)$, $u_1 = (1,3)$, $u_2 = (2,5)$

$$\text{Rpta. } [T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}$$

- 12 Encontrar la representación matricial de cada una de las aplicaciones lineales escritas a continuación respecto a las bases canónicas de los R^n .

$T: R^2 \rightarrow R^3$ definida por $T(x,y) = (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y)$

$T: R^4 \rightarrow R^2$ definida por $T(x,y,z,t) = (3x - 4y + 2z - 5t, 5x + 7y - z - 2t)$

$T: R^3 \rightarrow R^4$ definida por $T(x,y,z) = (2x + 3y - 8z, x + y + z, 4x - 5y, 6y)$

$$\text{Rpta. } [T] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, [T] = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}, [T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- 13 Sea la aplicación lineal $T: R^4 \rightarrow R^2$ donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}$ es la matriz

de T en la base canónica.

a) Hallar la imagen de T

b) Halla el núcleo de T

Rpta. a) La base de la imagen de T es: $\{(1,1,3), (0,1,2)\}$, $\dim \text{Im}(T) = 2$

b) $\{(1,-2,1,0), (-7,3,0,1)\}$ es una base del $N(T)$, $\dim N(T) = 2$

- 14 Dada la transformación lineal $T: P_3 \rightarrow P_2$ definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2 \text{ se pide:}$$

a) Hallar la matriz asociada a T .

b) Hallar el núcleo de T y la imagen de T .

c) Hallar una base del núcleo de A_T y una base del rango A .

$$\text{Rpta. a) } A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Una base de $N(T)$ es $\{1, x^3\}$

Una base de la $\text{Im}(T)$ es $\{1, x^2\}$

c) $A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_g(A_T) = 2$

- 15) Sea $T: P_1 \rightarrow P_2$ una transformación lineal definida por $T(P(x)) = x P(x)$, hallar la matriz de T con respecto a las bases $B = \{q_1, q_2\}$, $B' = \{P_1, P_2, P_3\}$.

Rpta. $A = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

- 16) Sea la aplicación $T: R^2 \rightarrow R^2$ definida por: $T(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$, hallar la matriz T relativa respectivamente a las siguientes bases de R^2 , $B = \{e_1, e_2\}$ y $B' = \{u_1, u_2\}$, donde $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (1, 3)$, $u_1 = (1, 3)$, $u_2 = (2, 5)$.

Rpta. $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -8 & 23 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$

- 17) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ la matriz en la base canónica de la aplicación matricial de T relativa a las bases $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $\{(1, 3), (2, 5)\}$ de R^3 y R^2 respectivamente.

Rpta. $[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{bmatrix}$

- 18) Una transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ esta definida por: $T(x, y, z) = (x - 2z, y + z)$

- a) Hallar la matriz A de T , respecto de las bases

$B = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0), (3, 0, 0)\}$ en $R^3 = V$

$B' = \{(2, 0), (0, 2)\}$ en $R^2 = W$

- b) Mediante A , obtener la imagen de $(-2, 2, -2) \in R^3$

- c) Determinar la matriz B de T , respecto de las bases canónicas en ambos espacios.

- d) Obtener la matriz C de la misma transformación lineal, respecto de la base canónica en R^3 y la base B' en R^2 dado en a).

Rpta. a) $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de la transformación lineal T respecto de las bases B y B' .

b) $T(-2, 2, -2) = 1(2, 0) + 0(0, 2)$

c) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de T respecto de las bases canónicas.

d) $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

- 19) Supongase que $T: R^2 \rightarrow R^2$, esta definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$, Hallese A_T con respecto a la base $B_1 = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

- 20 Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ la transformación lineal cuya representación es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ respecto de las bases ordenadas } B = \{(1,0,-1), (0,2,0), (1,2,3)\}$$

y $B' = \{(1,-1), (2,0)\}$. Hallar la representación de T respecto de las bases matriciales para R^3 y R^2 .

$$\text{Rpta. } A' = \begin{bmatrix} 13 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- 21 Sea $T: M_{22} \rightarrow M_{22}$ el operador lineal definido como $T(A) = A'$, encuentre la matriz de T con respecto a la base $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ donde

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ } S \text{ es la base}$$

canónica de M_{22} .

$$\text{Rpta. } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO V

5. PRODUCTO INTERNO Y ORTOGONALIDAD.-

5.1. DEFINICIÓN.-

Sea V un espacio vectorial sobre el campo k , donde $k = R$ ó $k = C$, llamaremos producto interno sobre V a una función $\langle, \rangle: V \times V \rightarrow k$ si satisface las siguientes condiciones.

- $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \forall u, v, w \in V$
- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, donde la barra indica la conjugación compleja.
- $\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$ y $\langle u, av \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle \forall a \in k, \forall u, v \in V$
- $\langle v, v \rangle \geq 0$ y $\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \theta$, al par (V, \langle, \rangle) se le denomina espacio vectorial con producto interno.

OBSERVACIONES.-

- De la definición se observa que \langle, \rangle es una función que hace corresponder a cada par de vectores $u, v \in V$ un escalar real o complejo.
- Si $k = R$, la condición ii) y segunda parte de iii) resultan $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ y $\langle u, av \rangle = a \langle u, v \rangle$ respectivamente.

Ejemplo.- Sea $V = R^n$ y $x, y \in R^n$, donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en éste espacio definimos.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: R^n \times R^n \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

donde $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, así definida la función

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ cumple con las condiciones del producto interno.

En efecto.

i) Si $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in R^n$

$$\langle x+z, y \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + z_i) y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n z_i y_i = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

ii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle y, x \rangle$

iii) Si $a \in k$, $\langle ax, y \rangle = \sum_{i=1}^n (ax_i) y_i = \sum_{i=1}^n a(x_i y_i) = a \sum_{i=1}^n x_i y_i = a \langle x, y \rangle$

iv) $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow x_i = 0$$

$\therefore \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ es un producto interno.

Ejemplo.- Sea $V = C^n$, $k = C$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^n$,

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C^n, \text{ definimos: } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

La función definida así es un producto interno, veamos que cumple las condiciones de la definición:

i) Si $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in C^n$

$$\langle x+z, y \rangle = \sum_{i=1}^n (x_i + z_i) \overline{y_i} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} + \sum_{i=1}^n z_i \overline{y_i} = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

ii) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = \sum_{i=1}^n \overline{\overline{x_i} y_i} = \overline{\sum_{i=1}^n y_i \overline{x_i}} = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) Si $a \in C$, $\langle ax, y \rangle = \sum_{i=1}^n (ax_i) \overline{y_i} = \sum_{i=1}^n a(x_i \overline{y_i}) = a \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = a \langle x, y \rangle$

$$\langle x, ay \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{(ay_i)} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{a} \overline{y_i} = \overline{a} \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = \overline{a} \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_i| = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Ejemplo.- Consideremos $V = R^2$ y definimos $\langle, \rangle : R^2 \times R^2 \rightarrow R$, tal que:

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - 3x_2 y_2, \text{ donde } x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

averiguar si la función así definida es un producto interno.

Solución

i) Sea $z = (z_1, z_2) \in R^2$

$$\langle x + z, y \rangle = (x_1 + z_1)y_1 - 3(x_2 + z_2)y_2$$

$$= (x_1 y_1 - 3x_2 y_2) + (z_1 y_1 - 3z_2 y_2) = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

ii) $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - 3x_2 y_2 = y_1 x_1 - 3y_2 x_2 = \langle y, x \rangle$

iii) Sea $a \in R$

$$\langle ax, y \rangle = (ax_1)y_1 - 3(ax_2)y_2 = a(x_1 y_1 - 3x_2 y_2) = a \langle x, y \rangle$$

análogamente $\langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle$

iv) $\langle x, x \rangle = x_1^2 - 3x_2^2$ no siempre es mayor que cero en consecuencia

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - 3x_2 y_2 \text{ no define un producto interno.}$$

Ejemplo.- Sea $V = \{f : [0, 1] \rightarrow R / f \text{ es continua}\}$, definimos en este

$$\text{espacio vectorial una función } \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Verificar que la función así definida es un producto interno.

Solución

i) Sea $h \in V$

$$\begin{aligned} \langle f + h, g \rangle &= \int_0^1 (f + h)(t)g(t)dt = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 h(t)g(t)dt \\ &= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \end{aligned}$$

(ii), (iii) en forma similar

iv) $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$ por demostrar

supongamos que $f \neq 0 \Rightarrow \exists t_0 \in [0, 1]$ tal que $f(t_0) \neq 0$

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt = \int_0^1 f^2(t)dt = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

como f es continua en $[0, 1] \Rightarrow |f(t)|^2$ es también continua en $[0, 1]$ además $|f(t_0)|^2 > 0$.

Como $|f(t)|^2$ es continua $\Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ entonces $|f(t)|^2 > 0, 0 \leq t \leq 1$...(*)

Antes de proseguir daremos dos propiedades del cálculo elemental.

1ro. Sea $g : [a, b] \rightarrow R$, si $g(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ y $[c, d] \subset [a, b]$ entonces

$$\int_c^d g(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2do. Si $g(x) > 0, \forall x \in [c, d]$ (de 1ro.) entonces $\int_c^d g(x)dx > 0$.

Luego regresando a (*) tenemos que:

$$0 < \int_{0-\delta}^{0+\delta} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0$$

lo cual es una contradicción, la contradicción proviene del hecho de haber supuesto $f \neq 0$, luego concluimos que $f = 0$.

Ejercicio

Consideremos el espacio vectorial $(R^2, +, R, \cdot)$ y la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & d \\ d & c \end{bmatrix}, \text{ definimos: } \langle \cdot, \cdot \rangle: R^2 \times R^2 \rightarrow R, \text{ tal que}$$

$$\langle x, y \rangle = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} a & d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ donde } x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2).$$

Determinar las condiciones para que la función así definida sea un producto interno.

5.2. DEFINICIÓN.-

Sea V un espacio vectorial sobre k , con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norma de un vector $v \in V$ es denotado por $\|v\|$, y definido por $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, $\langle v, v \rangle \geq 0$

Ejemplo.- En R^2 , $v = (3, 1)$

$$\langle v, v \rangle = 9 + 1 = 10$$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{10}$$

Ejemplo.- Sea $V = \{f: [0, 1] \rightarrow R / f \text{ es continua}\}$

Verificar que la función así definida es un producto interno.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \text{ y } \langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(t)dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}, \text{ caso particular, sea } f(x) = e^x, f^2(x) = e^{2x}$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^1 e^{2x} dx} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - 1)}$$

5.3. TEOREMA.-

Sea V un espacio vectorial sobre k , con producto interno, entonces se cumple.

$$i) \|av\| = |a| \|v\|, \forall a \in k, \forall v \in V \quad ii) \|v\| \geq 0 \text{ y } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$$

$$iii) |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V, \text{ (desigualdad de Cauchy - SCHWARTZ)}$$

$$iv) \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in V, \text{ (desigualdad triangular)}$$

Demostración

$$i) \|av\| = \sqrt{\langle av, av \rangle} = \sqrt{a\bar{a} \langle v, v \rangle}$$

$$= \sqrt{a^2 \langle v, v \rangle} = |a| \sqrt{\langle v, v \rangle} = |a| \|v\|$$

ii) Es consecuencia directa de la definición de producto interno.

iii) Probaremos que $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|, \forall u, v \in V$

1er. Caso: Si $u = \theta$

$$\langle u, v \rangle = \langle \theta, v \rangle \Rightarrow |\langle \theta, v \rangle| = 0 = \|\theta\| \|v\|$$

2do. Caso: Si $u \neq 0$, definimos $v = v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u$

afirmamos que $\langle w, u \rangle = 0$

En efecto:

$$\langle w, u \rangle = \langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \langle u, u \rangle$$

$$= \langle v, u \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \|u\|^2 = 0$$

$$\text{Luego } 0 \leq \|w\|^2 = \langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u, v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \rangle$$

$$= \langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u, v \rangle - \langle v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u, \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \rangle$$

$$= \langle v, v \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \langle u, v \rangle - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} \langle v, u \rangle + \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$= \langle v, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2}$$

tomando extremos se tiene:

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} \Rightarrow \frac{\langle u, v \rangle^2}{\|u\|^2} \leq \|v\|^2 \Rightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq (\|u\| \|v\|)^2$$

$$\therefore |\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

iv) Probaremos ahora que: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u + v \rangle + \langle v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) \quad \dots (1)$$

$$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle| \quad \dots (2)$$

$$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \|v\| \quad \dots (3)$$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

Luego extrayendo la raíz cuadrada a ambos miembros de la desigualdad tenemos:

$$\therefore \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

NOTA.- En la demostración de (iv) se ha hecho uso de:

① $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \forall z \in \mathbb{C}$

② $\operatorname{Re}(z) \leq |z|, \forall z \in \mathbb{C}$

③ La parte (iii) del teorema.

5.4. ORTOGONALIDAD - CONJUNTO ORTOGONAL - CONJUNTO ORTONORMAL.

DEFINICIÓN.- Sea $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial con producto interno donde $k = \mathbb{R}$ ó $k = \mathbb{C}$.

i) Dados $u, v \in V$, diremos que u, v son ortogonales si y sólo si $\langle u, v \rangle = 0$.

NOTA.- Si u es ortogonal a v denotaremos por " $u \perp v$ ".

ii) Sea $W \subset V$ un subconjunto, definimos el conjunto $W^\perp = \{v \in V / \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$ W^\perp se denomina conjunto ortogonal a W .

iii) Sea $W \subset V$ un subconjunto, diremos que W es un conjunto ortogonal si y sólo si $\forall u, v \in W$ tal que $u \neq v$ implica que $\langle u, v \rangle = 0$

iv) Sea $W \subset V$ un subconjunto, diremos que W es un conjunto ortonormal si y solo si W es ortogonal y $\|u\| = 1, \forall u \in W$.

OBSERVACIÓN.- Sea V un espacio vectorial con producto interno, si W es un subespacio de V , entonces W^\perp es también un subespacio de V dejamos al lector la verificación.

Ejemplo.-

1) Sea $(R^2, +, R, \cdot)$ un espacio vectorial sobre R y $u, v \in R^2$ donde $u = (x, y), v = (-y, x)$ entonces $\langle u, v \rangle = -xy + xy = 0 \Rightarrow u \perp v$

2) Sea el espacio vectorial $(R^n, +, R, \cdot)$ y $W = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$ W es un conjunto ortonormal pues $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

3) Sea el espacio vectorial $V = \{f: [0, 1] \rightarrow R / f \text{ es continua}\}$ con producto interno como $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ consideremos el conjunto:
 $W = \{h(t) = 1, f_n(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi nt, g_n(t) = \sqrt{2} \sin 2\pi nt / n \in N\}$ probar que W es un conjunto infinito ortonormal.

Solución

i) Fijamos $h(t) = 1$.

Primero hagamos variar $f_n(t)$

$$\begin{aligned} \langle h, f_n \rangle &= \int_0^1 1 \cdot f_n(t) dt = \int_0^1 \sqrt{2} \cos 2\pi nt \, dt = \frac{\sqrt{2}}{2n\pi} \sin 2n\pi t \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2n\pi} (\sin 2n\pi - \sin 0) = \frac{\sqrt{2}}{2n\pi} (0 - 0) = 0 \end{aligned}$$

Luego $\langle h, f_n \rangle = 0, \forall n \in N$

Ahora hagamos variar $g_n(t)$

$$\begin{aligned} \langle h, g_n \rangle &= \int_0^1 1 \cdot g_n(t) dt = \int_0^1 \sqrt{2} \sin 2\pi nt \, dt = \frac{-\sqrt{2}}{2\pi n} \cos \pi nt \Big|_0^1 \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{2\pi n} (\cos 2\pi n - \cos 0) = \frac{-\sqrt{2}}{2\pi n} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Luego $\langle h, g_n \rangle = 0, \forall n \in N$

ii) Sean $f_m(t), g_n(t)$ tal que $m \neq n$

$$\begin{aligned} \langle f_m, g_n \rangle &= \int_0^1 f_m(t)g_n(t)dt = \int_0^1 2 \cos 2\pi mt \cdot \sin 2\pi nt \, dt \\ &= \int_0^1 \sin 4\pi nt \, dt = -\frac{1}{4\pi n} \cos 4\pi nt \Big|_0^1 = -\frac{1}{4\pi n} (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Luego $\langle f_m, g_n \rangle = 0, \forall n \in N$

iii) Sean $f_m(t), g_n(t)$ tal que $m \neq n$

$$\langle f_m, g_n \rangle = \int_0^1 f_m(t)g_n(t)dt = \int_0^1 2(\cos 2\pi mt)(\sin 2\pi nt)dt$$

$$= \int_0^1 [\sin 2\pi(n+m)t + \sin 2\pi(n-m)t] dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2\pi(n+m)} \cos 2\pi(n+m)t - \frac{1}{2\pi(n-m)} \cos 2\pi(n-m)t \right]_0^1$$

$$= -\frac{1(1-1)}{2\pi(n+m)} - \frac{1}{2\pi(n-m)}(1-1) = 0$$

Luego $\langle f_m, g_n \rangle = 0$, $\forall m \neq n$

iv) Ahora demostraremos que $\|f_n\| = 1$ y $\|g_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) $\|f_n\| = \sqrt{\langle f_n, f_n \rangle}$, elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} \|f_n\|^2 &= \langle f_n, f_n \rangle = \int_0^1 f_n^2(t) dt = 2 \int_0^1 \cos^2 2\pi n t dt \\ &= \int_0^1 (1 + \cos 4\pi n t) dt = \left[t + \frac{1}{4\pi n} \sin 4\pi n t \right]_0^1 = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Luego $\|f_n\|^2 = 1$, en consecuencia $\|f_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $\|g_n\| = \sqrt{\langle g_n, g_n \rangle}$, elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} \|g_n\|^2 &= \langle g_n, g_n \rangle = \int_0^1 g_n^2(t) dt = 2 \int_0^1 \sin^2 2\pi n t dt \\ &= \int_0^1 (1 - \cos 4\pi n t) dt = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Luego $\|g_n\|^2 = 1$, entonces $\|g_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

De (i), (ii), (iii), (iv) concluimos que:

$W = \{1, f_n(t) = \sqrt{2} \cos 2\pi n t, g_n(t) = \sqrt{2} \sin 2\pi n t / n \in \mathbb{N}\}$ en un conjunto ortonormal infinito.

5.5. TEOREMA.-

Sea V un espacio vectorial con producto interno y $W = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ un conjunto ortogonal donde $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$, W es linealmente independiente sobre k .

Demostración

Sea $\sum_{i=1}^n a_i v_i = \theta$, fijamos k donde $1 \leq k \leq n$ y consideremos v_k , calculando:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n a_i v_i, v_k \right\rangle = \langle \theta, v_k \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_k \rangle = 0 \quad \dots (1)$$

como W es ortogonal $\langle v_i, v_k \rangle = 0$, $\forall i \neq k$

Luego de (1) tenemos $\sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_k \rangle = a_k \langle v_k, v_k \rangle = 0$ ya que $v_k \neq 0$ y

$$\langle v_k, v_k \rangle = \|v_k\|^2 > 0 \text{ entonces } a_k = 0, \forall k$$

$\therefore \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

5.6. COLORARIO.-

Sea V un espacio vectorial con producto interno, $W = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ un conjunto ortogonal donde $v_i \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \text{ entonces } a_k = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Demostración

$$\langle v, v_k \rangle = \sum_{i=1}^n \langle a_i v_i, v_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i \langle v_i, v_k \rangle = a_k \langle v_i, v_k \rangle$$

$$= a_k \|v_k\|^2, \text{ de donde } a_k = \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2}$$

OBSERVACIONES.

① Si W es ortogonal se tiene que $a_k = \langle v, v_k \rangle, \quad 1 \leq k \leq n$

② Si v es combinación lineal de los elementos de W .

$$\text{Entonces } v = \sum_{i=1}^n \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Ejemplo.- Sea $(R^3, +, R, \cdot)$ un espacio vectorial sobre R .

$W = \{(3,0,4), (-4,0,3), (0,1,0)\}$ un conjunto ortogonal de R^3 .

Expresar $(3,1,2)$ como combinación lineal de los elementos de W .

Solución

$$(3,1,2) = a_1(3,0,4) + a_2(-4,0,3) + a_3(0,1,0)$$

donde haciendo uso de la observación tenemos

$$a_1 = \frac{\langle (3,1,2), (3,0,4) \rangle}{\|(3,0,4)\|^2} = \frac{9+0+8}{9+16} = \frac{17}{25}$$

$$a_2 = \frac{\langle (3,1,2), (-4,0,3) \rangle}{\|(-4,0,3)\|^2} = \frac{-12+0+6}{9+16} = -\frac{6}{25}$$

$$a_3 = \frac{\langle (3,1,2), (0,1,0) \rangle}{\|(0,1,0)\|^2} = \frac{0+1+0}{1} = 1$$

$$\therefore (3,1,2) = \frac{17}{25}(3,0,4) - \frac{6}{25}(-4,0,3) + 1(0,1,0)$$

5.7. PROCESO DE ORTOGONALIDAD DE GRAM-SCHMIDT.

TEOREMA.- Sea V un espacio vectorial sobre k con producto interno finito dimensional ($\dim V = n$). Si v_1, v_2, \dots, v_m ($m \leq n$) son vectores linealmente independiente de V .

Entonces se puede construir vectores ortogonales $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ tales que para cada $k = 1, 2, \dots, m$, el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ sea una base del subespacio generado por w_1, w_2, \dots, w_k además $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es una base de $L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Demostración

Definiremos la base por inducción

Sea $w_1 = v_1$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

$\langle w_1, w_2 \rangle = 0$ es decir que $w_2 \perp w_1$

AFIRMAMOS.— que $w_2 \neq \theta$

En efecto si $w_2 = \theta \Rightarrow v_2 = \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$ lo cual es contradictorio con el hecho de que $v_1 = w_1$ y v_2 son linealmente independiente.

Construimos $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$ afirmamos que $w_3 \neq \theta$

En efecto, si suponemos que $w_3 = \theta$, entonces

$$v_3 = \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1$$

es decir v_3 es una combinación lineal de w_1 y w_2 pero w_1 y w_2 son combinaciones lineales de v_1 y v_2 , entonces v_3 sería combinación lineal de v_1 y v_2 que es una contradicción, pues $\{v_1, v_2, v_3\}$ son linealmente independiente, con lo que queda probado que $w_3 \neq \theta$.

Supongamos que se ha construido w_1, w_2, \dots, w_k vectores ortogonales, tales que $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es base de $L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $1 \leq k \leq n$

Ahora construimos el vector v_{k+1} del modo siguiente:

$$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_k \rangle}{\|w_k\|^2} w_k - \dots - \frac{\langle v_{k+1}, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 \quad \dots (1)$$

afirmamos que $w_{k+1} \neq \theta$

si suponemos que $w_{k+1} = \theta$, de (1) tenemos

$$v_{k+1} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i \quad \dots (2)$$

pero cada w_i es combinación lineal de $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, entonces de (2) concluimos que v_{k+1} es también una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, \dots, v_k que es una contradicción puesto que $\{v_1, v_2, \dots, v_{k+1}\}$ son linealmente independiente.

ahora afirmamos que: $\langle w_{k+1}, w_j \rangle = 0$, $\forall j = 1, 2, \dots, k$

En efecto, sea $1 \leq j_0 \leq k$ donde j_0 es fijo.

$$\begin{aligned} \langle w_{k+1}, w_{j_0} \rangle &= \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i, w_{j_0} \right\rangle \\ &= \langle v_{k+1}, w_{j_0} \rangle - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \langle w_i, w_{j_0} \rangle \\ &= \langle v_{k+1}, w_{j_0} \rangle - \langle v_{k+1}, w_{j_0} \rangle = 0 \end{aligned}$$

pues $\langle w_i, w_{j_0} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j_0 \\ \|w_{j_0}\|^2 & \text{si } i = j_0, 1 \leq j_0 \leq k \end{cases}$

Luego se tiene $\langle w_{k+1}, w_j \rangle = 0$, $\forall 1 \leq j \leq k$

Entonces $\{w_1, w_2, \dots, w_{k+1}\}$ es un conjunto ortogonal y en consecuencia linealmente independiente por el teorema 5.5 y por lo tanto base de $L\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ haciendo uso de (1) podemos proseguir hasta obtener $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ conjunto ortogonal y por consiguiente base de $L\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

5.8. COLORARIO.-

Todo espacio vectorial con producto interno finito dimensional tiene una base ortonormal.

Demostración

Sea V espacio vectorial tal que $\dim V = n$

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V , entonces por el proceso ortogonalización de Gram - Schmidt existen w_1, w_2, \dots, w_n vectores ortogonales y por lo tanto $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base de V .

construimos $u_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$, luego $\|u_i\| = 1$

$\therefore \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base ortonormal para V .

Ejemplo.- Ortogonalizar la base $\{(1,3), (2,1)\}$ de R^2

Solución

$$w_1 = (1,3)$$

$$w_2 = (2,1) - \frac{\langle (2,1), (1,3) \rangle}{\|(1,3)\|^2} (1,3) = (2,1) - \frac{1}{2} (1,3) = \frac{1}{2} (3, -1)$$

Luego $\{(1,3), \frac{1}{2} (3, -1)\}$ es una base ortogonal para R^2 y

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} (1,3), \frac{1}{\sqrt{10}} (3, -1) \right\} \text{ es una base ortonormal para } R^2.$$

Ejemplo.- Hallar una base ortonormal a partir de la base

$$\{(1,0,1), (2,-1,1), (1,2,1)\} \text{ de } R^3.$$

Solución

$$w_1 = (1,0,1) = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (2,-1,1) - \frac{\langle (2,-1,1), (1,0,1) \rangle}{\|(1,0,1)\|^2} (1,0,1)$$

$$= (2,-1,1) - \frac{3}{2} (1,0,1) = \frac{1}{2} (1, -2, -1)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$= (1,2,1) + \frac{2}{3} (1, -2, -1) - (1,0,1) = \frac{2}{3} (1, 1, -1)$$

$$\left\{ (1,0,1), \frac{1}{2} (1, -2, -1), \frac{2}{3} (1, 1, -1) \right\} \text{ es una base ortogonal de } R^3$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -2, -1), \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1) \right\} \text{ es una base ortonormal de } R^3$$

5.9. DEFINICIÓN.-

Sea V un espacio vectorial con producto interno y W cualquier subconjunto de V . Llamaremos "complemento ortogonal" de W al conjunto W^\perp definido en (5.4 - ii) que es el conjunto de todos los vectores de V que son ortogonales a todo vector de W .

5.10. TEOREMA.-

Sea V un espacio vectorial sobre k finito dimensional ($\dim V = n$) con producto interno \langle, \rangle , para cualquier subespacio $W \subset V$ se cumple que: $V = W \oplus W^\perp$

Demstración

i) Si $W = \{0\}$, entonces $V = W^\perp$ y se cumple que $V = W \oplus W^\perp$

ii) Si $\{0\} \neq W \subset V$

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V , tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es una base de W donde $m < n$ por el proceso de ortogonalización de Gram – Schmitd existe $\{w_1, w_2, \dots, w_m, \dots, w_n\}$ base ortonormal de V , entonces $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ es una base ortonormal de W en virtud del teorema 5.5.

Ahora demostraremos que $W^\perp = L\{w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n\}$

a) Tenemos que $\langle w_j, w_i \rangle = 0$ para todo $j \neq i$, luego

$w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n$ pertenece a W^\perp .

$$\therefore L\{w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n\} \subset W^\perp$$

b) Sea $u \in W^\perp \subset V \Rightarrow u = \sum_{i=1}^n a_i w_i \dots (1)$

(pues $\{w_1, w_2, \dots, w_m, \dots, w_n\}$ es base ortonormal de V)

$\Rightarrow a_i = \langle u, w_i \rangle$; pero $u \in W \Rightarrow u$ es ortogonal a cualquier elemento de W , en particular lo es con $w_1, w_2, \dots, w_m \Rightarrow$

$a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$ entonces de (1)

$$u = \sum_{i=m+1}^n \langle u, w_i \rangle w_i \Rightarrow u \in L\{w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n\}$$

$$\therefore W^\perp \subset L\{w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n\}$$

de (a) y (b) se concluye que: $W^\perp = L\{w_{m+1}, w_{m+2}, \dots, w_n\}$

por lo tanto $V = W \oplus W^\perp$

Ejemplo.- Hallar el complemento de $W = \{(x, y, z) \in R^3 / 2x + y - z = 0\}$.

Solución

Calculando una base para W

$$(x, y, z) \in W \Rightarrow 2x + y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + y$$

$$(x, y, z) = (x, y, 2x + y) = (x, 0, 2x) + (0, y, y)$$

$$(x, y, z) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) \text{ de donde } W = L\{(1, 0, 2), (0, 1, 1)\}$$

Extenderemos la base de W a una base para R^3 .

Sea $\{(1, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ la extensión ahora ortogonalizaremos mediante el proceso de Gram – Schmidt.

$$w_1 = (1, 0, 2)$$

$$w_2 = (0, 1, 1) - \frac{\langle (0, 1, 1), (1, 0, 2) \rangle}{\|(1, 0, 2)\|^2} (1, 0, 2) = \frac{1}{5}(-2, 5, 1)$$

$$w_3 = (1, 0, 1) - \frac{\langle (1, 0, 1), \frac{1}{5}(-2, 5, 1) \rangle}{\|\frac{1}{5}(-2, 5, 1)\|^2} \frac{1}{5}(-2, 5, 1) - \frac{\langle (1, 0, 1), (1, 0, 2) \rangle}{\|(1, 0, 2)\|^2} (1, 0, 2)$$

$$= \frac{1}{6}(2, 1, -1)$$

$$\therefore W^\perp = L\{(2, 1, -1)\}$$

5.11. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- ① Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, averiguar si las funciones dadas a continuación definen un producto interno sobre \mathbb{R}^2 .
- a) $f(x, y) = x_1 y_1 + 3x_2 y_2$
- b) $f(x, y) = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$
- ② Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ¿para qué valores de k la función $f(x, y) = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2$ es un producto interno sobre \mathbb{R}^2 ?
- ③ Dado $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ elemento de C^2 . Averiguar si la función: $f(u, v) = u_1 \overline{v_1} + (1+i)u_1 \overline{v_2} + (1-i)u_2 \overline{v_1} + 3u_2 \overline{v_2}$ define un producto interno sobre C^2 . En caso de que resulte ser producto interno hallar la norma de $u = (2-3i, 1+2i) \in C^2$.
- ④ Verificar que el siguiente es un producto interno en \mathbb{R}^2
 $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ donde $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$.
- ⑤ Probar que cada uno de los siguientes no es un producto interno en \mathbb{R}^2 donde $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$.
- a) $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ b) $\langle u, v \rangle = x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 y_3$
- ⑥ Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre \mathbb{R} , probar que $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto interno en V .

CAPÍTULO VI

6.3. DEFINICIÓN.-

6. VALORES Y VECTORES PROPIOS.-

Consideremos un espacio vectorial $(V, +, k, \cdot)$ y un endomorfismo $f: V \rightarrow V$, en muchas aplicaciones es útil encontrar un vector $v \in V$ tal que $f(v)$ y v sean paralelos, es decir: se busca un vector v y un escalar λ tal que $f(v) = \lambda v$ y ésta relación es la que estudiaremos.

6.1. DEFINICIÓN.-

Sea V un espacio vectorial sobre k y $f: V \rightarrow V$ un endomorfismo, un número $\lambda \in k$ es un "valor propio" de f , si existe un vector $v \neq 0$, $v \in V$, tal que:

$$f(v) = \lambda v \quad \dots (1)$$

Todo vector v que satisface (1) se llama vector propio de f correspondiente al autovalor λ .

- NOTA. ① Las expresiones "valor propio", "valor característico" y "autovalor" son sinónimos.
- ② Las expresiones "vector propio", "vector característico" y "autovector" son sinónimos.

Ejemplo.- Consideremos el espacio vectorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ y la transformación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (2x, 2x - 2y)$, el escalar $\lambda = 2$ es un valor propio de f , puesto que el vector no nulo $(2, 1)$ es tal que:
 $f(2, 1) = (4, 2) = 2(2, 1)$ y $(2, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio 2.

Ejemplo.- Consideremos $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por $f(x,y,z) = (x,y,-z)$. Hallar los valores propios y vectores propios.

Solución

$f(x,y,z) = \lambda(x,y,z) = (x,y,-z)$, de donde se tiene que: $\lambda x = x$, $\lambda y = y$, $-\lambda z = z$

para $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ son los valores propios y sus vectores propios $(x,y,-z) \neq (0,0,0)$

Ejemplo.- Encuentre los autovalores y autovectores correspondientes a las siguientes transformaciones lineales $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (2y, x)$

Solución

$f(x,y) = (2y, x) = \lambda(x,y)$, de donde

$$\begin{cases} 2y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases} \Rightarrow 2y = \lambda^2 y, y \neq 0, \lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

Los autovalores de f son $\lambda = \pm\sqrt{2}$

$2y = \lambda x$, $x = \lambda y$ para $\lambda = \sqrt{2}$, se tiene $2y = \sqrt{2}x$, $x = \sqrt{2}y \Rightarrow \sqrt{2}y = x$

$$(x, y) = (\sqrt{2}y, y) = (\sqrt{2}, 1)y$$

Luego los autovectores son $(\sqrt{2}, 1)t$, $t \in \mathbb{R}$

6.2. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ.-

Sea A una matriz de orden $n \times n$ con componentes reales. El número λ (real o complejo) se llama autovalor de A si existe un vector v diferente de cero tal que:

$$Av = \lambda v \quad \dots (2)$$

El vector $v \neq 0$ se llama autovector de A correspondiente al autovalor λ .

6.3. DEFINICIÓN.-

Si A es una matriz cuadrada, entonces un escalar λ es un valor propio de A si satisface la ecuación.

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \dots (*)$$

A la ecuación (*) se le denomina la ecuación característica de A .

Ejemplo.- Encuentre los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = 2$ estos son valores propios de la matriz A .

Ejemplo.- Obtener los valores y vectores propios, si existen, de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Calculando los autovalores λ de la matriz A .

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

de donde $\lambda = 2$, $\lambda = 3$ son los valores propios de A para $\lambda = 2$ calculamos los vectores propios

$$(\lambda I - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \text{ donde } \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0x_1 - x_2 = 0 \\ 0x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 3$, calculamos los vectores propios de A

$$(\lambda I - A)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ reemplazando se tiene:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ efectuando operaciones}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, x_1) = x_1(1, 1)$$

por lo tanto los vectores de la matriz A son (1,0) y (1,1).

OBSERVACIÓN.- Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- ① λ es un valor propio de la matriz A.
- ② El sistema de ecuación $(\lambda I - A)X = 0$ tiene soluciones no triviales.
- ③ Existe un vector X en R^n diferente de cero, tal que $AX = \lambda X$.

Si λ es un valor propio de A, entonces el espacio solución del sistema de ecuaciones $(\lambda I - A)X = 0$ se denomina el espacio propio de A correspondiente a λ , y los vectores diferente de cero en el espacio propio de A correspondiente a λ .

Ejemplo.- Hallar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

Calculando los valores propios de A.

$$|\lambda I - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 5 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0, \text{ de donde}$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3, \lambda = 5 \text{ son los valores propios de A.}$$

$$\text{Sea } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ un vector propio de A}$$

x es un vector propio de A correspondiente a λ si y sólo si x es una solución no trivial de $(\lambda I - A)X = 0$ es decir, solución no trivial de:

$$\begin{bmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots (*)$$

si $\lambda = 1$, la ecuación (*) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ son los vectores propios de } A \text{ correspondiente a } \lambda = 1$$

Si $\lambda = 5$, la ecuación (*) se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1, \quad x_3 \in R$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto los vectores propios de A correspondientes a $\lambda = 5$ son los vectores diferentes de cero de la forma.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN.- Todo endomorfismo en V , donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y mayor ó igual a 1 sobre el cuerpo de los complejos admite vectores propios.

Pero si el cuerpo no es C , entonces puede no existir vectores propios.

Por ejemplo: Sea $(R^2, +, R, \cdot)$ el espacio vectorial sobre R y $f: R^2 \rightarrow R^2$, tal que:

$$f(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

si existe $(x, y) \in R^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, tal que para algún $\lambda \in R$, $f(x, y) = \lambda(x, y)$ entonces:

$$(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = (\lambda x, \lambda y)$$

$$\begin{cases} x \cos \theta - y \sin \theta = \lambda x \\ x \sin \theta + y \cos \theta = \lambda y \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} (\lambda - \cos \theta)x + y \sin \theta = 0 \\ -\sin \theta - x + (\lambda - \cos \theta)y = 0 \end{cases}$$

El sistema admite solución no trivial si:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda \cos \theta + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1}$$

$$\text{Si } \theta = 60^\circ \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} \notin R$$

Solo existe vectores propios si $\theta = n\pi$.

Consideremos $(R^2, +, C, \cdot)$ existen valores y vectores propios. El endomorfismo f representa una rotación del plano de ángulo θ alrededor del origen.

6.4. TEOREMA.-

Si $f: V \rightarrow V$ es una transformación lineal, y además existe una base $[V] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ formada por los vectores propios de f correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, entonces la matriz de f respecto de esta base es la matriz diagonal.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Demostración

La matriz de f respecto de la base $[V]$ se obtiene determinando las imágenes de los vectores de dicha base, y teniendo en cuenta la definición de vector propio:

$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \dots + 0v_n \\ \vdots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \dots + \lambda_n v_n \end{cases}$$

En consecuencia $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$

OBSEVACIÓN.-

- ① Del teorema demostrado, diremos que la transformación lineal f es diagonalizable.
- ② Si $\dim V = n$ y $f: V \rightarrow V$ es un endomorfismo que admite n valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.
- ③ En términos de matrices diremos que si $A \in k^{n \times n}$ admite n valores propios distintos, entonces existe $P \in k^{n \times n}$ no singular, tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Ejemplo.- Determinar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ y la matriz diagonal } D.$$

Solución

Calculando los valores propios de A .

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) - 2 = 0 \text{ de donde } \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \text{ entonces}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases} \text{ son los valores propios}$$

para cada valor de λ resolveremos el sistema

$$(\lambda I - A)X = 0 \text{ es decir: } \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \lambda_1 = 1, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$.

$$\text{Si } \lambda_2 = 4, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego $x'' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda = 4$.

Los vectores x', x'' son linealmente independiente y forman una base de R^2 .

A es diagonalizable, y su forma diagonal es: $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

P es la matriz cuyas columnas son los vectores propios es decir:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D \quad \therefore P^{-1}AP = D$$

6.5. POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE UNA MATRIZ.-

DEFINICIÓN.- El polinomio característico de una matriz $A \in K^{n \times n}$ es el determinante de la matriz $\lambda I - A$ es decir:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

desarrollando el determinante se tiene: $P(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0$

Ejemplo.- Determinar el polinomio característico de la matriz A siendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 & 3 \\ -2 & \lambda - 2 & 6 \\ -2 & -2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 1)[(\lambda - 2)(\lambda + 6) + 12] - (-2)[-2(\lambda + 6) + 12] + 3(4 + 2(\lambda - 2)) \\ P(\lambda) &= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 4\lambda) - 4\lambda + 6\lambda \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda \end{aligned}$$

Las raíces de $P(\lambda) = 0$ son: $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0$

de donde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -2$

PROPIEDADES.-

El escalar λ es un valor propio de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si y sólo si λ es raíz del polinomio característico de A .

- ① Si λ es un valor propio de A entonces $A - \lambda I$ es singular, y por consiguiente también lo es $\lambda I - A$ o sea $\det(\lambda I - A) = 0$.

En consecuencia, λ es una raíz del polinomio característico.

- ② Supongamos que λ sea una raíz del polinomio característico de A . Entonces $\det(\lambda I - A) = 0$ ó sea que $\lambda I - A$ y $A - \lambda I$ son singulares, esto significa que λ es un valor propio de A .

Ejemplo.- Encuentre los valores característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\text{Sea } P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)[(\lambda - 4)(\lambda - 1) + 2]$$

de donde los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

6.6. MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN.-**MATRICES SEMEJANTES.-**

Sean las matrices A y B de orden $n \times n$ se dice que la matriz A es semejante a la matriz B si existe una matriz P invertible de orden $n \times n$ tal que $B = P^{-1}AP$

OBSERVACIÓN.- La definición dada también se puede expresar así:

Las matrices A y B de orden $n \times n$ son semejantes si y sólo si existe una matriz invertible P tal que $PB = AP$.

Ejemplo.- Dé dos matrices semejantes.

$$\text{Sea } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

como $\det(P) = 1 \neq 0$, P es invertible por lo tanto A y B son semejantes.

Ejemplo.- Dé una matriz semejante una matriz diagonal.

$$\text{Sea } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

donde P es invertible porque $\det(P) = 3 \neq 0$, entonces

$$PA = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

$$DP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

como $PA = DP$ entonces A y D son semejantes.

6.7. TEOREMA.-

Si A y B son matrices semejantes de orden $n \times n$, entonces A y B tiene el mismo polinomio característico y por lo tanto, tiene los mismos valores propios.

Demostración

Como A y B son semejantes $\Rightarrow \exists P$ invertible tal que $B = P^{-1}AP$ y

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I P) = \det(P^{-1}[AP - \lambda I P])$$

$$= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P)$$

$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}P)\det(A - \lambda I)$$

$$= \det(I)\det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

esto significa que A y B tienen la misma ecuación característica y como los valores propios son raíces característico, tiene los mismos valores propios.

6.8. MATRIZ DIAGONIZABLE.-

Se dice que una matriz cuadrada A es diagonalizable, si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$, sea diagonal; se dice que la matriz P diagonaliza a la matriz A .

Si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, entonces A es diagonalizable ortogonalmente, y se dice que P diagonaliza ortogonalmente a A .

Ejemplo.- Encuentre una matriz P que diagonalice ortogonalmente a A

$$\text{donde } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Calculando los valores propios de A .

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 3)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \text{ entonces}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{La matriz diagonal } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculando los vectores propios de A .

Para esto cada valor de λ resolvemos el sistema.

$$(\lambda I - A)X = 0 \text{ de donde } \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sí, } \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Luego $x' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector asociado a $\lambda_1 = 2$

$$\text{Sí, } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $x'' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_2 = 4$

$$\text{Luego } P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D$$

Luego A es una matriz diagonalizable.

6.9. TEOREMA.-

Una matriz A de orden $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independiente.

En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dado por:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de A.

Si P es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independiente de A, entonces $D = P^{-1}AP$.

Demostración

Primero se supone que A tiene n vectores propios linealmente independiente v_1, v_2, \dots, v_n que corresponde a los valores propios (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

$$\text{Sea } v_1 = \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \\ \vdots \\ P_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \\ \vdots \\ P_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_n = \begin{bmatrix} P_{1n} \\ P_{2n} \\ \vdots \\ P_{nn} \end{bmatrix} \text{ y sea } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces P es inversible ya que sus columnas son linealmente independiente. Ahora bien.

$$AP = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

y se ve que la columna i de AP es $AP = \begin{bmatrix} P_{1i} \\ P_{2i} \\ \vdots \\ P_{ni} \end{bmatrix} = Av_i = \lambda_i v_i$, y así AP es la

matriz cuya columna i es $\lambda_i v_i$ y $AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \dots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \dots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \dots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$

$$\text{pero } PD = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 P_{11} & \lambda_2 P_{12} & \dots & \lambda_n P_{1n} \\ \lambda_1 P_{21} & \lambda_2 P_{22} & \dots & \lambda_n P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 P_{n1} & \lambda_2 P_{n2} & \dots & \lambda_n P_{nn} \end{bmatrix}$$

Entonces $AP = PD$ y como P es inversible, se puede multiplicar ambos lados por la izquierda por P^{-1} para obtener: $D = P^{-1}AP$

OBSERVACIÓN.- Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- ① A es diagonalizable.
- ② A tiene n vectores propios linealmente independiente.

OBSERVACIÓN.- Si una matriz A de orden $n \times n$ tiene n valores propios diferentes entonces A es diagonalizable.

Ejemplo.- Determinar si $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

Solución

Calculando los valores propios de la matriz A .

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ desarrollando el determinante}$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

La matriz diagonal es $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ son los valores propios de A .

Ahora calculando los vectores propios de A para esto, cada valor de λ resolvemos el sistema: $(\lambda I - A)X = 0$ de donde

$$\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sí $\lambda_1 = 1$, $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 \\ 3x_2 - x_2 = 2x_3 \\ 2x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow x_3 = x_2$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego $x' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$.

Sí $\lambda_2 = 2$, $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ 6x_1 - \frac{15}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = \frac{3}{2}x_2 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{bmatrix} = \frac{x_1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Luego $x'' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_2 = 2$

Sí $\lambda_3 = 3$, $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ entonces

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_3 = 4x_1 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 4x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego $x''' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$

Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -2 & 6 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

como $D = P^{-1}AP \Rightarrow A$ es una matriz diagonalizable.

6.10. TEOREMA DE CAYLEY - HAMILTON.-

TEOREMA 1.- Si $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios en la variable escalar λ cuyos coeficientes de matrices cuadradas y si $P(\lambda) = Q(\lambda)(A - \lambda I)$ entonces $P(A) = 0$.

Demostración

Si $Q(\lambda)$ está dado por la ecuación: $Q(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \dots + B_n\lambda^n$

$$P(\lambda) = (B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \dots + B_n\lambda^n)(A - \lambda I)$$

$$= B_0A + B_1A\lambda + B_2A\lambda^2 + \dots + B_nA\lambda^n - B_0\lambda - B_1\lambda^2 - B_2\lambda^3 - \dots - B_n\lambda^{n+1}$$

$$P(\lambda) = B_0A + B_1A\lambda + B_2A\lambda^2 + \dots + B_nA\lambda^n - B_0\lambda - B_1\lambda^2 - B_2\lambda^3 - \dots - B_n\lambda^{n+1}$$

sustituyendo A en lugar de λ se obtiene:

$$P(A) = B_0A + B_1A^2 + B_2A^3 + \dots + B_nA^{n+1} - B_0\lambda - B_1\lambda^2 - B_2\lambda^3 - \dots - B_n\lambda^{n+1}$$

$$\therefore P(A) = 0$$

TEOREMA 2.- Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica, es decir, si $P(\lambda) = 0$ es la ecuación característica de A , entonces $P(A) = 0$.

Demostración

$$\text{Se tiene } P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

Es claro que cualquier factor de $A - \lambda I$ es un polinomio de λ , así, la adjunta de $A - \lambda I$ es una matriz de orden $n \times n$ en la que cada componente es un polinomio en λ es decir:

$$\text{adj}(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(\lambda) & P_{n2}(\lambda) & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Esto significa que se puede pensar en $\text{adj}(A - \lambda I)$ como un polinomio, $Q(\lambda)$ en λ cuyos coeficientes son matrices de orden $n \times n$.

$$\text{Luego } \det(A - \lambda I) = [\text{adj}(A - \lambda I)][A - \lambda I] \quad \dots (*)$$

$$\text{Pero } \det(A - \lambda I) = P(\lambda)I \text{ si } P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

$$\text{entonces se define: } P(\lambda) = P(\lambda)I = \lambda^n I + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda I + a_0I$$

por lo tanto, de (*) se tiene $P(\lambda) = Q(\lambda)(A - \lambda I)$

Luego por el teorema (1) se tiene $P(A) = 0$.

Ejemplo.- Calcular la matriz inversa aplicando el teorema CAYLEY - HAMILTON.

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

Calculando el polinomio característico de A

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ 5 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 12$$

$$\text{Sea } P(A) = A^2 + A - 12I = 0$$

Multiplicando por A^{-1} a la ecuación (1)

$$A + I - 12A^{-1} = 0 \Rightarrow 12A^{-1} = A + I$$

$$12A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & -\frac{2}{12} \\ -\frac{5}{12} & \frac{2}{12} \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Calculando el polinomio característico de A.

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \text{ de donde}$$

$$P(A) = A^3 - 5A^2 + 8A - 4I = 0 \quad \dots (1)$$

multiplicando por A^{-1} a la ecuación (1)

$$A^2 - 5A + 8I - 4A^{-1} = 0 \Rightarrow 4A^{-1} = A^2 - 5A + 8I$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^2 - 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ -1 & 6 & 4 \\ -3 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & -2 & -5 \\ -5 & -10 & -2 \end{bmatrix}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -8 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \text{ de donde } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo.- Sea $A \in k^{n \times n}$ y $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ su polinomio característico, prueba que A es invertible.

Solución

Por el teorema de Cayley Hamilton, tenemos que

$$f(A) = A^3 - 2A^2 + A - I = 0$$

$$A^3 - 2A^2 + A = I \Rightarrow A(A^2 - 2A + I) = I \text{ sea } B = A^2 - 2A + I$$

entonces $AB = I$ por lo tanto A tiene inversa y la inversa de A es

$$(I) \dots A^{-1} = A^2 - 2A + I$$

Ejemplo.- Sea $A \in k^{3 \times 3}$, $P(x)$ un polinomio, pruebe que si λ es un valor propio de A , $P(\lambda)$ es un valor propio de $P(A)$.

Solución

Sea el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ como $Av = \lambda v$, donde $v \neq 0$ entonces

$$\begin{cases} A^3 v = \lambda^3 v \\ A^2 v = \lambda^2 v \\ Av = \lambda v \\ dv = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (aA^3)v = (a\lambda^3)v \\ (bA^2)v = (b\lambda^2)v \\ (cA)v = (c\lambda)v \\ dv = dv \end{cases}$$

$$\text{Sumando } (aA^3)v + (bA^2)v + (cA)v + dv = (a\lambda^3)v + (b\lambda^2)v + (c\lambda)v + dv$$

$$(aA^3 + bA^2 + cA + dI)v = (a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d)v \Rightarrow P(A)v = P(\lambda)v$$

$\therefore P(\lambda)$ es un auto valor de $P(A)$ pues $v \neq 0$ entonces como, el proceso se cumple para cualquier polinomio $P(X)$ entonces si λ es un valor propio de A , se cumple que $P(\lambda)$ es un valor propio de $P(A)$.

6.11. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

I) Encuentre los autovalores y autovectores correspondientes a las siguientes transformaciones lineales.

① $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(x,y) = (x+y, 2x+y)$

② $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x,y,z) = (x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$

③ $T: R^4 \rightarrow R^4$ tal que $T(x,y,z,w) = (x, x+y, x+y+z, x+y+z+w)$

④ $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(x,y) = (4x+3y, 3x-4y)$

⑤ $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x,y,z) = (2y-z, 2x-z, 2x-y)$

II) Estudiar si las siguientes aplicaciones lineales que se indican a continuación tienen como autovalores y auto vectores asociados los que se indican en cada uno de los casos:

① $f(x,y) = (x+2y, -y)$, $\lambda = 1$, $v = (1,0)$

② $f(x,y,z) = (x-y+z, y-2z, x+5z)$, $\lambda = 3$, $v = (1,1,1)$

③ $f(x,y,z,w) = (x+y, x-z, y+z, w)$, $\lambda = 0$, $v = (1,-1,1,0)$

III) Obtener los autovalores y autovectores asociados si existen de las matrices siguientes con elementos en R .

① $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

③ $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

④ $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

⑤ $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

⑥ $A = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\textcircled{7} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{8} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

IV) Obtener los autovalores y autovectores asociados si existen de las matrices siguientes con elementos en \mathbb{R} .

$$\textcircled{1} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{3} \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{4} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{5} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{6} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{7} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{8} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{9} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{10} \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{11} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{12} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & -9 \\ 3 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{13} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{14} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{15} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V)

①

Sea A una matriz cuadrada de orden 3×3 tal que: $AX = B$, donde

$$x = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{obtener los valores y vectores propios de la matriz } A.$$

②

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ hallar los valores y vectores propios de A y los espacios característico de A .

③

Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

a) Hallar la matriz A asociado a T .

b) Hallar los valores y vectores propios de A .

④

Dado la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (x, y, -z)$, hallar los valores y vectores propios de la matriz A (A matriz asociado a T).

⑤

Dado la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $T(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + 3y + 4z, -x - y - 2z)$, hallar los valores y vectores propios de A (A matriz asociado a T).

⑥

Hallar los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ y diagonalizar.

- 7 Investigar si la siguiente matriz es diagonalizable $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$

- a) Encuentre los valores propios reales y vectores propios de A.
b) Encuentre las matrices no singular P y P^{-1} y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

9 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- a) Encuentre los valores propios reales y vectores propios de A.
b) Encuentre las matrices no singular P y P^{-1} y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

10 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- a) ¿Cuáles son los valores y vectores propios de A?
b) Encuentre las matrices no singulares P y P^{-1} y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

- 11 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Demostrar que A y B tienen el mismo polinomio característico.

12 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- a) Encuentre los valores y vectores propios de A.
b) Encuentre la matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

13 Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

- a) Encuentre los valores y vectores propios de A.
b) Encuentre la matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

- 14 Sea $T: P_2 \rightarrow P_2$ definida por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$$

encuentre los vectores y valores propios de T.

- 15 Si los vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & e & f \end{pmatrix}$ son $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ determinar a, b, c, d, e y f.

- 16 Encuentre los valores propios y los vectores propios para la transformación lineal dado. Determinar si existe o no una base c_2 de vectores propios para el dominio de T, encuentre si existe, una matriz diagonal que representa a T.

- a) $T: R^2 \rightarrow R^2$ tal que $T(x, y) = (2x + y, 2x + 3y)$
- b) $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$
- c) $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (2x, 2y, 3z)$
- d) $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (3x - \frac{y}{2} + \frac{z}{2}, 4x + z, 4x - 2y + z)$
- e) $T: R^4 \rightarrow R^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (3x, 2y, x + 2z, 2w)$
- f) $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + z, 0, -x + y + \frac{7}{2}z)$
- g) $T: R^3 \rightarrow R^3$ tal que $T(x, y, z) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z)$

17 Encuentre una matriz P que diagonalice a A , y determinar $P^{-1}AP$, donde:

- a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$
- c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

18 Determinar si A es diagonalizable, en caso de que así sea, encuentre una matriz P que diagonalice a A .

- a) $A = \begin{bmatrix} 19 & -9 & -6 \\ 25 & -11 & -9 \\ 17 & -9 & -4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

- d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

19 Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, demuestre que:

- a) A es diagonalizable si $(a - d)^2 + 4abc > 0$
- b) A no es diagonalizable si $(a - d)^2 + 4abc < 0$

20 Determine los valores y vectores propios de la matriz A , y determine si A es diagonalizable, si lo es encuentre P tal que $P^{-1}AP = D$.

- a) $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$
- d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ h) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ i) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$
- j) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ k) $A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ l) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- 21) Sea λ el autovalor de la transformación lineal $T: V \rightarrow V$, demostrar que el conjunto formado por los autovectores asociados a λ y el vector nulo es subespacio de V .
- 22) Suponga que λ_1 y λ_2 sus autovalores diferentes y distintos de cero de $T: R^2 \rightarrow R^2$, Demostrar que:

- a) Los auto vectores v_1 y v_2 correspondientes son linealmente independiente.
- b) $T(v_1)$ y $T(v_2)$ son linealmente independiente.

- 23) Encuentre la matriz ortogonal Q que diagonaliza la matriz simétrica dada, después verifique que $Q'AQ = D$, una matriz cuyas componentes diagonales son los valores propios de A .

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

- 24) Dadas las matrices siguientes:

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & -7 & 1 \\ 7 & 6 & -7 & -7 \\ 8 & -4 & -6 & -8 \\ 9 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 & 0 & -9 & -5 \\ 7 & 6 & -7 & -7 \\ 14 & 0 & -8 & -14 \\ 9 & 0 & -9 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 0 & -3 & -1 \\ 6 & 6 & -6 & -6 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

se pide:

- a) Hallar sus autovalores y autovectores.
- b) Determinar si son diagonalizables, calculando cuando sea posible las matrices P no singular y D diagonal para que se verifique $A = PDP^{-1}$.
- 25) Estudiar para que valores de los parámetros son diagonalizables las matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2a & 0 & 2a \\ 1 & a & 2 \\ -a & 0 & -a \end{bmatrix}$$

- 26) Encuentre la ecuación característica y los valores y vectores propios de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

- 27) Encuentre los valores propios de A^9 , si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- 28) Aplicando el teorema de CAYLEY - HAMILTON, hallar A^{-1} , si:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (29) Ver si las matrices A y B son semejantes o no, si lo fueran, encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP = B$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (30) Encuentre una matriz P que diagonalice a la matriz A; si $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- (31) Hallar la matriz P, si existe, que diagonalice a cada una de las matrices.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (32) Hallar la matriz A de orden 3x3 que tiene como valores propios: $\lambda_1 = -1$,

$$\lambda_2 = 2 \text{ y } \lambda_3 = 5 \text{ y como vectores propios } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ respectivamente.}$$

- (33) Si los valores propios de una matriz A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y los vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallar la matriz B que cumple con la relación $P^{-1}AP = B$ donde $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

- (34) Probar que A y A' tienen el mismo polinomio característico.

- (35) Encontrar los valores y vectores propios de las matrices dadas.

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} -5 & -5 & 9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$

6.12. FORMAS BILINEALES.

DEFINICIÓN.- Sean $(V, +, k, \cdot)$ un espacio vectorial y f una función de V^2 en k , entonces la función $f: V \times V \rightarrow k$ es una forma bilineal sobre V si y sólo si es lineal respecto a los dos argumentos es decir: $f: V \times V \rightarrow k$ es forma bilineal sobre V si satisface:

- i) Linealidad respecto al primer argumento.

$$f(ax + bx', y) = a f(x, y) + b f(x', y)$$

- ii) Linealidad respecto al segundo argumento.

$$f(x, cy + dy') = c f(x, y) + d f(x, y') \quad \forall x, y, x', y' \in V, a, b, c, d \in k$$

OBSERVACIÓN.-

Si f es una forma bilineal sobre V , entonces se verifica que:

$$f(ax, y) = af(x, y) = f(x, ay)$$

Ejemplo.- Sea $g: V^2 \rightarrow k$ una forma bilineal; demuestre que $g_y: V \rightarrow k$ definida por $g_y(x) = g(x, y)$ es una forma lineal.

Solución

$$g_y(ax) = g(ax, y) = ag(x, y) = ag_y(x)$$

$$g_y(ay) = g(x, ay) = ag(x, y) = ag_y(y)$$

Ejemplo.- Sea $(k^n, +, \cdot, k, \cdot)$ espacio vectorial y la función $f: k^n \times k^n \rightarrow k$

definida por $f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ es una forma bilineal sobre k^n .

Solución

i) $f(ax + bx', y) = a f(x, y) + b f(x', y)$, por comprobar.

$$\begin{aligned} f(ax + bx', y) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + bx'_i) y_i = \sum_{i=1}^n ax_i y_i + \sum_{i=1}^n bx'_i y_i \\ &= a \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \sum_{i=1}^n x'_i y_i = a f(x, y) + b f(x', y) \end{aligned}$$

ii) $f(x, cy + dy') = c f(x, y) + d f(x, y')$

$$\begin{aligned} f(x, cy + dy') &= \sum_{i=1}^n x_i (cy_i + dy'_i) = c \sum_{i=1}^n x_i y_i + d \sum_{i=1}^n x_i y'_i \\ &= c f(x, y) + d f(x, y') \end{aligned}$$

$$\therefore f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ es una forma bilineal sobre } k^n$$

6.13. MATRIZ DE UNA FORMA BILINEAL.-

Sea V un espacio de dimensión $n \geq 1$ y $[V] = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V , y

la forma bilineal $f: V^2 \rightarrow k$, entonces f está caracterizada por los valores

$a_{ij} = f(v_i, v_j)$ que son los elementos de la matriz $A \in k^{n \times n}$, llamada matriz de

f respecto de la base $[V]$.

En efecto, si x y y son dos valores cualquiera de V , que expresado en términos de la base $[V]$ es:

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = x' A y$$

donde x y y son las matrices columnas cuyos elementos son las coordenadas de x y y respecto de la base $[V]$.

6.14. FORMA BILINEAL SIMÉTRICA.-

DEFINICIÓN.- La forma bilineal $f: V^2 \rightarrow k$ es simétrica si y sólo si

$$f(x, y) = f(y, x), \quad \forall x, y \in V$$

PROPIEDADES

La matriz $A \in k^{n \times n}$ representa una forma bilineal si y sólo si A es simétrica.

① Sea f la forma bilineal simétrica asociada a A , f es simétrica \Leftrightarrow
 $f(x, y) = f(y, x) \Rightarrow x' A y = y' A x$

② Sea A simétrica, entonces:

$$f(x, y) = x' A y = (x' A y)' = y' A' x = y' A x = f(y, x)$$

Luego f es simétrica

Ejemplo.- Determinar la forma escalar de las formas cuadráticas asociadas a las formas bilineales $g(x, y) = x' A y$ en los siguientes casos:

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$g(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= (3x_1 - \sqrt{2}x_2, -\sqrt{2}x_1 + x_2, -x_3) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1y_1 - \sqrt{2}x_2y_1 - \sqrt{2}x_1y_2 + x_2y_2 - x_3y_3$$

Ejemplo.- Desarrollar la forma bilineal simétrica asociada a la matriz A,

$$\text{siendo: } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$f(x, y) = x^t A y = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_3y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2 + x_3y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_3y_3$$

Ejemplo.- Desarrollar la forma bilineal simétrica asociada a la matriz A,

$$\text{siendo: } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

$$f(x, y) = x^t A y = (x_1, x_2, x_3) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - 2x_3) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_3y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2 + x_3y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_3 - 2x_3y_3$$

6.15. FORMAS CUADRÁTICAS.-

DEFINICIÓN.- Sean $(V, +, \cdot, k)$ un espacio vectorial de dimensión finita y

$g: V^2 \rightarrow k$ una forma bilineal simétrica sobre V

entonces una forma cuadrática asociada a la forma bilineal simétrica g es la función $f: V \rightarrow k$ definida por $f(x) = g(x, x) = \langle x, x \rangle$ donde

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Si $V = k^n$ y si $A \in k^{n \times n}$ es la matriz simétrica de la forma bilineal g, entonces la forma cuadrática asociada está definida por:

$$f(x) = x^t A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

observamos que el desarrollo de una forma cuadrática, en términos de las variables x_1, x_2, \dots, x_n , corresponde a un polinomio homogéneo de grado 2 donde los coeficientes de los términos cuadráticos son los elementos de la diagonal de la matriz simétrica correspondiente, y cada coeficiente de un término rectangular $x_i x_j$ es el duplo del elemento Q_{ij} de la ecuación.

DEFINICIÓN.- Una forma cuadrática $x'Ax$ es no degenerada sí y sólo si A es no singular.

La matriz correspondiente a la forma cuadrática $f: R^3 \rightarrow R$ definida por:

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 \quad \text{es } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.- Determinar la matriz de la forma cuadrática sobre R^3 definida por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo.- La matriz de la forma cuadrática $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es:

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN.- Sea $V = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ y sea A una matriz simétrica de $n \times n$ entonces una forma cuadrática en x_1, x_2, \dots, x_n es un exponente de la forma: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Av.v$

Ejemplo.- Encuentre una matriz simétrica A , tal que la forma cuadrática se puede escribir en la forma $AX.X$

$$1) \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$$

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \frac{7}{2} \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ \frac{7}{2} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6.16. EJERCICIOS PROPUESTOS.-

- 1 Hallar la matriz simétrica que corresponde a cada uno de las siguientes formas cuadráticas.
 - a) $f(x, y) = 4x^2 - 6xy - 7y^2$
 - b) $f(x, y) = xy + y^2$
 - c) $f(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + 3z^2$
 - d) $f(x, y, z) = x^2 - 2yz + 5xz$

2) Hallar una matriz ortogonal de Transformación de coordenadas que diagonalice la forma cuadrática $f(x, y) = 16x^2 + 24xy + 9y^2$, así como la relación que existe entre las coordenadas iguales (x, y) y la transformación (x', y') .

3) Sea $g: V^2 \rightarrow k$ una forma bilineal. Demostrar que $g_v: V \rightarrow k$, definida por $g_v(x) = g(x, y)$ es una forma lineal.

4) Una función bilineal f sobre R^3 está caracterizada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Obtener $f(x, y)$

ii) Determinar la matriz de $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

5) Sean g una forma bilineal simétrica sobre V y f la forma cuadrática asociada. Demostrar que:

i) $g(x, y) = \frac{1}{4}[f(x+y) - f(x-y)]$

ii) $g(x, y) = \frac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]$

6) Determinar la matriz de la forma cuadrática sobre R^3 definida por $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2$

BIBLIOGRAFÍA

- 1) Fundamentales of Linear Algebra por **KATSUMI NOMIZU**
- 2) Elementos de Algebra Lineal por **LOWELL J. PAIGE y J. DEAN SWIFT**
- 3) Algebra y Análisis de Funciones Elementales por **M. POTAPOV, V. ALEXANDROV**
- 4) Algebra Lineal por **KOLMAN BERNARD**
- 5) Algebra Lineal por **SEYMOUR LIPSCHUTZ**
- 6) Algebra Superior por **A. G. KUROSCH**
- 7) Algebra Lineal por **SERGE LANG**
- 8) Introducción al Algebra Lineal por **MISCHA COTLAR**
- 9) Linear Algebra por **ROBERT R. STOLL y EDWARD T. WONG**
- 10) Linear Algebra por **GEORGI E. SHILOV**
- 11) Algebra Lineal por **JORGE ANTONIO LUDLOW - WIECHERS**
- 12) Introducción al Algebra Lineal por **HOWARD ANTON**
- 13) Algebra Lineal por **PALERMO SAENZ, FRANCISCO JOSE VASQUEZ**
- 14) Algebra Lineal por **STANLEY I. GROSSMAN**
- 15) Problemas de Algebra Lineal por **D. FADDIEEV, I. SOMINSKI**
- 16) Fundamentos de Algebra Lineal por **A. I. MALTSEV**
- 17) Introducción al Algebra Lineal por **B.C. TETRA**
- 18) Algebra Lineal por **JOSEPH HEINHOLD y BRUNO RIEDMÜLLER**