

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

Trần Minh Tú - Đại học Xây dựng

## Chương 1

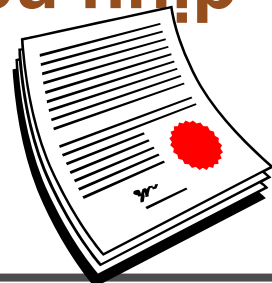
# NỘI LỰC TRONG BÀI TOÁN THANH



# Chương 1. Nội lực trong bài toán thanh

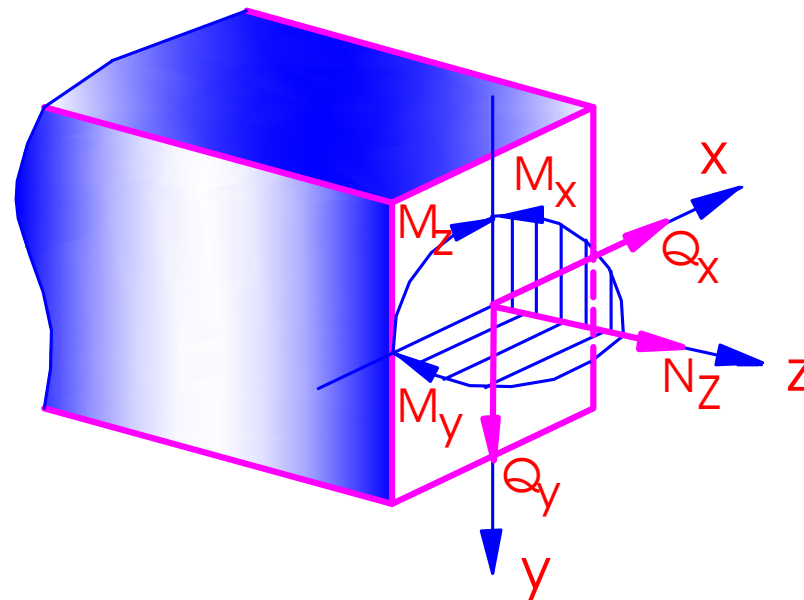
## NỘI DUNG

- 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang
- 1.2. Biểu đồ ứng lực – PP mặt cắt biến thiên
- 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải trọng ngang phân bố
- 1.4. Phương pháp vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt
- 1.5. Biểu đồ ứng lực của dầm tĩnh định nhiều nhịp
- 1.6. Biểu đồ ứng lực của khung phẳng



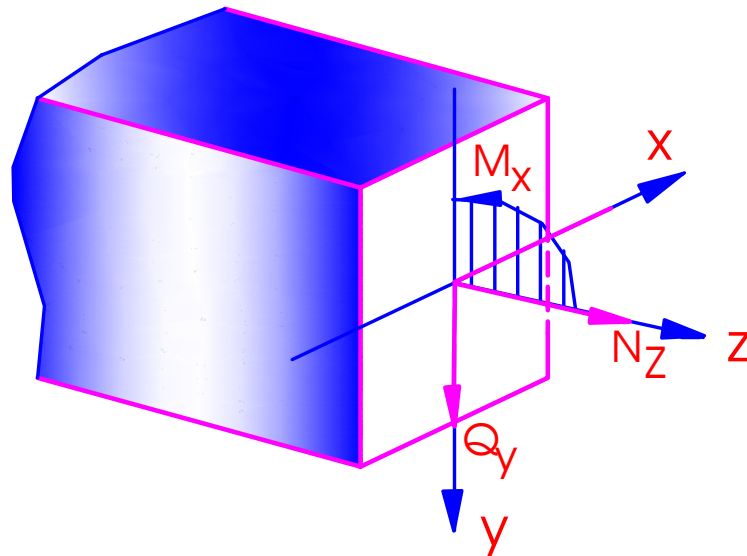
# 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (1)

- Trong trường hợp tổng quát trên mặt cắt ngang của thanh chịu tác dụng của ngoại lực có 6 ứng lực:



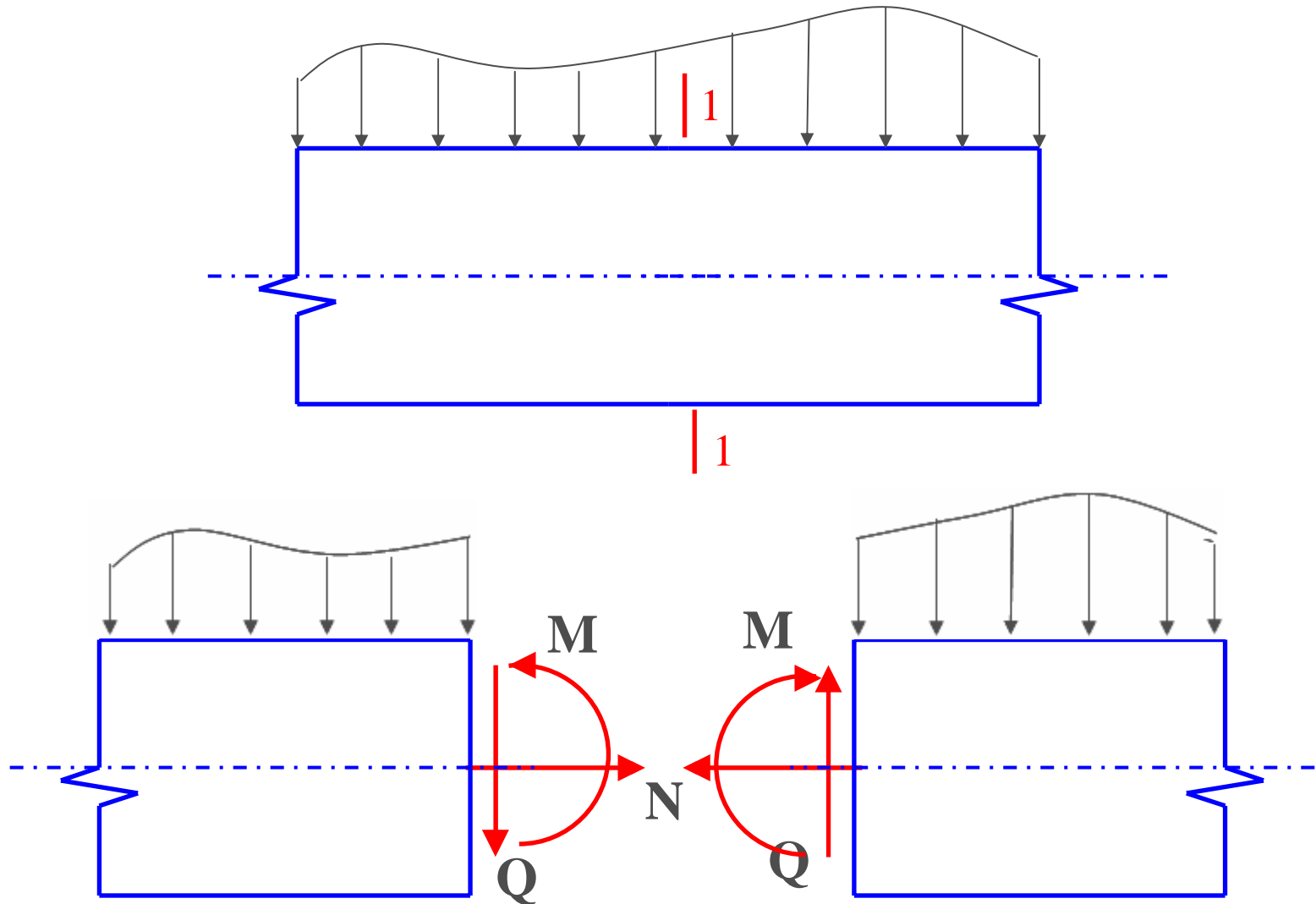
## 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (2)

- **Bài toán phẳng**: Ngoại lực nằm trong mặt phẳng đi qua trục  $z$  ( $yOz$ )  $\Rightarrow$  Chỉ tồn tại các ứng lực trong mặt phẳng này:  $N_z$ ,  $M_x$ ,  $Q_y$



- $N_z$  - lực dọc;  $Q_y$  - lực cắt;  $M_x$  – mô men uốn

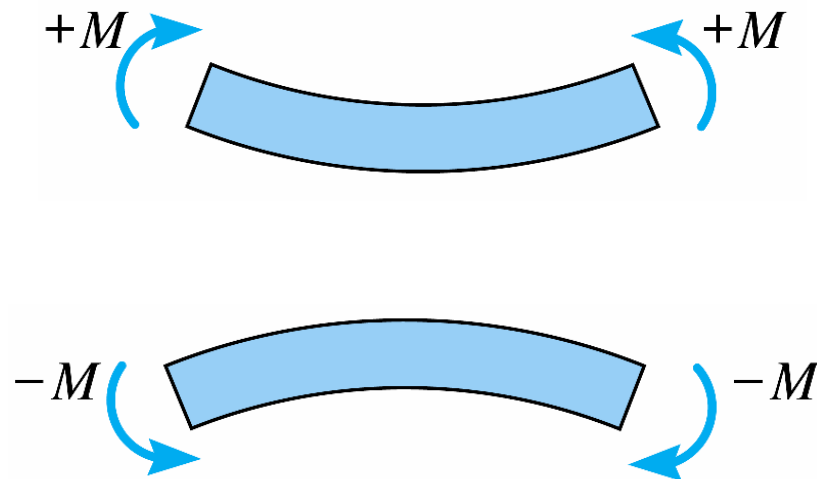
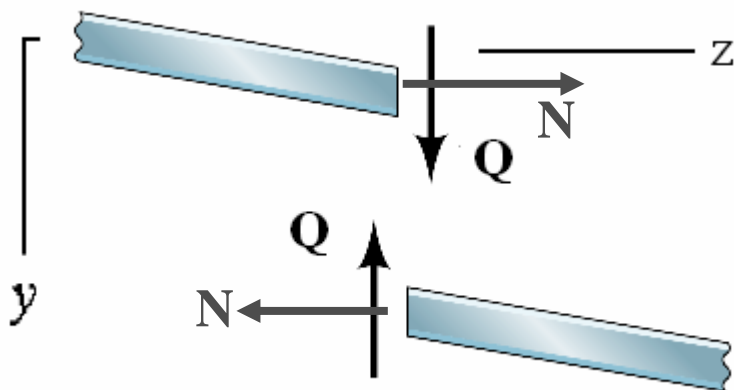
# 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (3)



# 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (4)

## ❖ Qui ước dấu các thành phần ứng lực

- Lực dọc:  $N > 0$  khi có chiều đi ra khỏi mặt cắt
- Lực cắt:  $Q > 0$  khi có chiều đi vòng quanh phần thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ
- Mô men uốn:  $M > 0$  khi làm căng các thớ dưới



# 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (5)

## ❖ Cách xác định các thành phần ứng lực

- Giả thiết chiều các thành phần  $M$ ,  $N$ ,  $Q$  theo chiều dương qui ước
- Thiết lập phương trình hình chiếu lên các trục  $z$ ,  $y$  và phương trình cân bằng mô men với trọng tâm  $O$  của mặt cắt ngang

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = \dots$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q = \dots$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow M = \dots$$



# 1.1. Các ứng lực trên mặt cắt ngang (6)

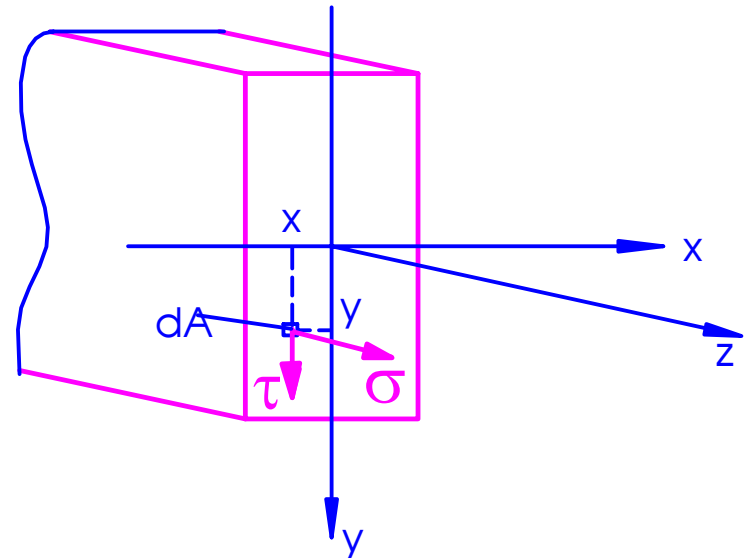
## ❖ Biểu thức quan hệ ứng lực - ứng suất

- Vì là bài toán phẳng nên chỉ tồn tại các thành phần ứng suất trong mặt phẳng  $zOy \Rightarrow$  ký hiệu  $\sigma_z, \tau_{zy} \Rightarrow (\sigma, \tau)$
- Các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang

$$N = \int_{(A)} \sigma dA$$

$$Q = \int_{(A)} \tau dA$$

$$M = \int_{(A)} y \sigma dA$$



- $dA(x,y)$  là phân tố diện tích của dt mặt cắt ngang  $A$

## 1.2. Biểu đồ ứng lực (1)

- ❖ Khi tính toán  $\Rightarrow$  cần tìm vị trí mặt cắt ngang có trị số ứng lực lớn nhất  $\Rightarrow$  biểu đồ
- ❖ **Biểu đồ ứng lực** - là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các thành phần ứng lực theo toạ độ mặt cắt ngang
- ❖ Các bước vẽ biểu đồ ứng lực

## 1.2. Biểu đồ ứng lực (3)

- a. Xác định phản lực tại các liên kết
- b. Phân đoạn thanh sao cho biểu thức của các ứng lực trên từng đoạn là liên tục
- c. Viết biểu thức xác định các ứng lực  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  theo tọa độ mặt cắt ngang bằng phương pháp mặt cắt
- d. Vẽ biểu đồ cho từng đoạn căn cứ vào phương trình nhận được từ bước (c)
- e. Kiểm tra biểu đồ nhờ vào các nhận xét mang tính trực quan

## 1.2. Biểu đồ ứng lực (4)

❖ **Biểu đồ lực dọc, lực cắt vẽ theo qui ước và mang dấu**



❖ **Biểu đồ mô men luôn vẽ về phía thớ căng**



# Ví dụ 1.1 (1)

Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực trên các mặt cắt ngang của thanh chịu tải trọng như hình vẽ

**GIẢI:**

1. Xác định phản lực

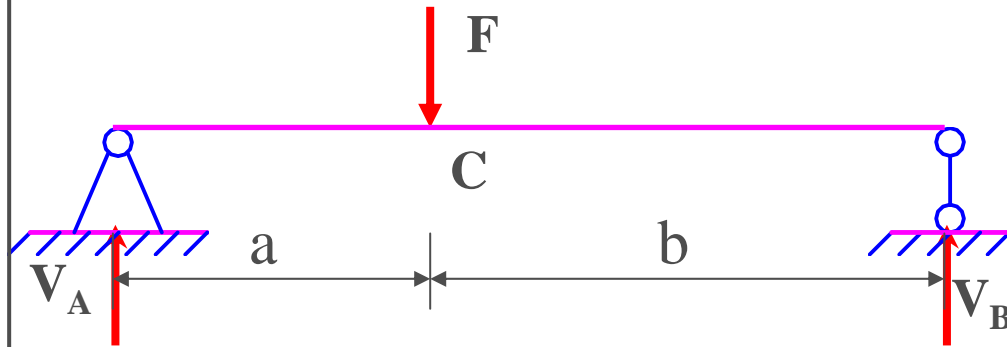
$$\sum M_A = V_B (a + b) - Fa = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{Fa}{(a + b)}$$

$$\sum M_B = V_A (a + b) - Fb = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Fb}{(a + b)}$$

Thử lại:  $\sum Y = 0$



# Ví dụ 1.1 (2)

## Đoạn AC

Mặt cắt 1 – 1:  $0 \leq z_1 \leq a$

$$N = 0$$

$$\sum Y = Q - V_A = 0 \Rightarrow Q = V_A = \frac{Fb}{(a+b)}$$

$$\sum M_0 = M - V_A z_1 = 0 \Rightarrow M = V_A z_1 = \frac{Fb z_1}{(a+b)}$$

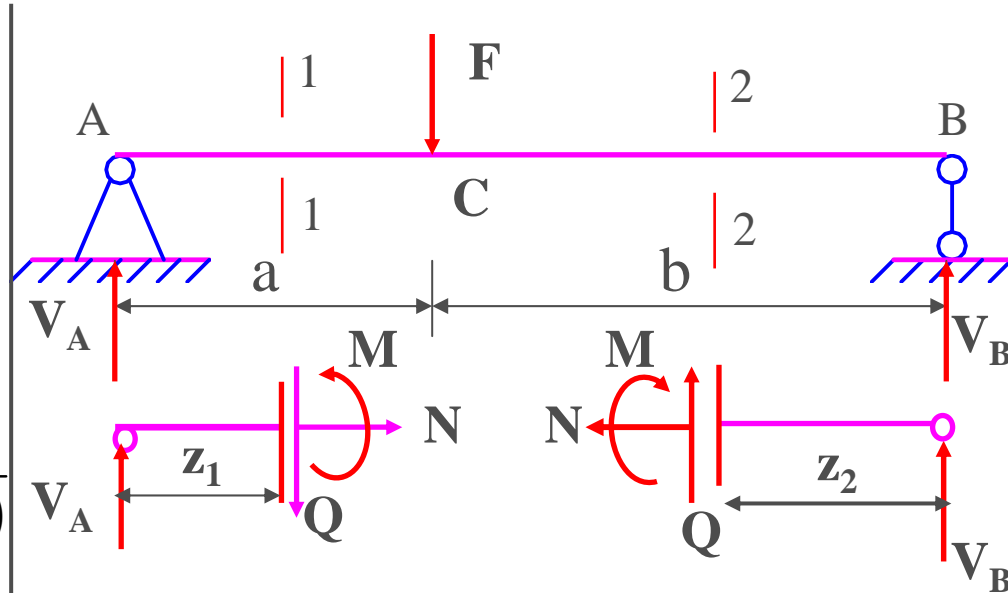
## Đoạn BC

Mặt cắt 2 – 2:  $0 \leq z_2 \leq b$

$$N = 0$$

$$\sum Y = Q + V_B = 0 \Rightarrow Q = -V_B = -\frac{Fa}{(a+b)}$$

$$\sum M_0 = M - V_B z_2 = 0 \Rightarrow M = V_B z_2 = \frac{Fa z_2}{(a+b)}$$



# Ví dụ 1.1 (3)

$$AC : Q = \frac{Fb}{(a+b)}$$

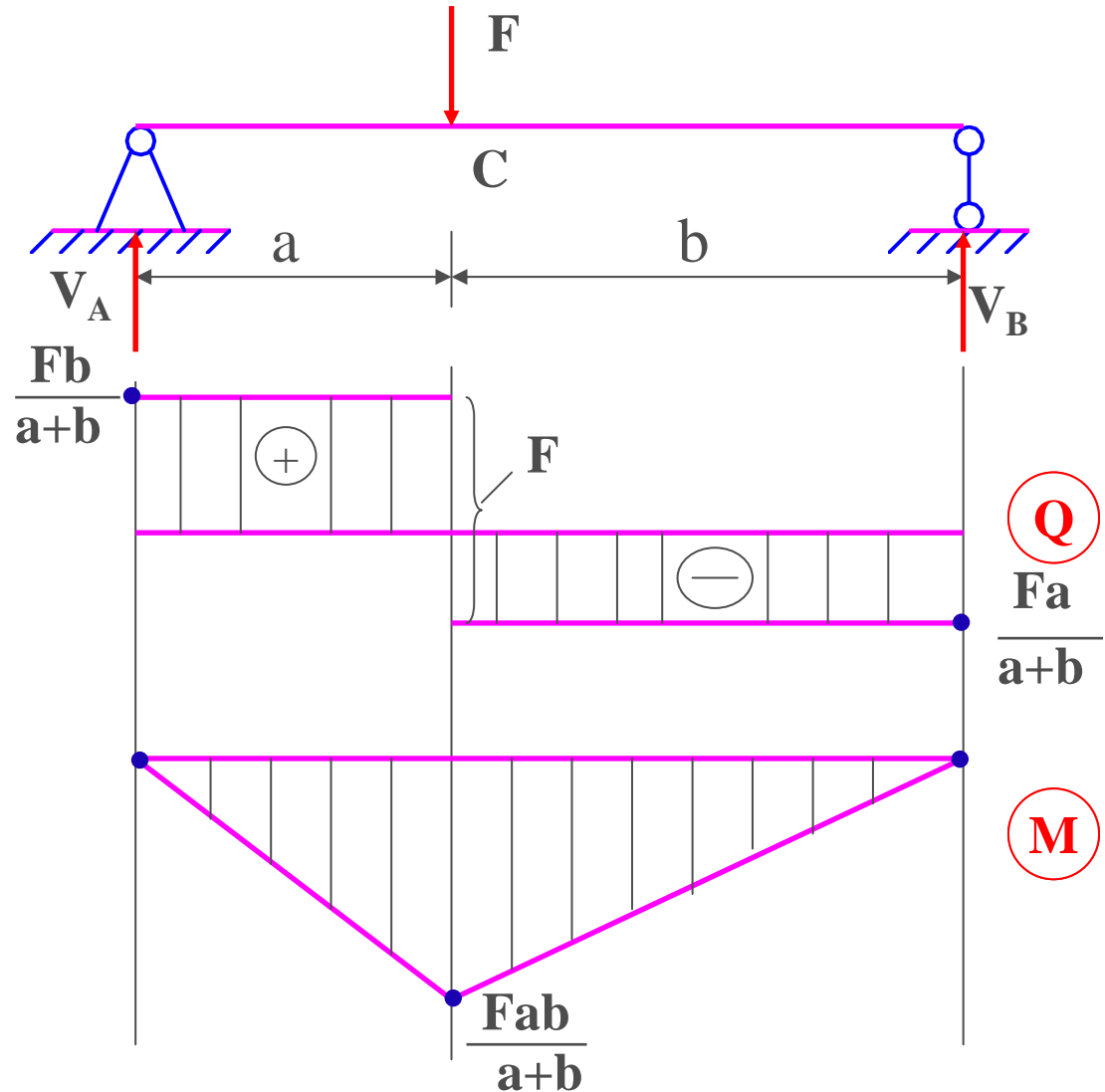
$$BC : Q = -\frac{Fa}{(a+b)}$$

$$AC : M = \frac{Fbz_1}{(a+b)}$$

$$BC : M = \frac{Faz_2}{(a+b)}$$

## Nhận xét 1

Tại mặt cắt có lực tập trung  $\Rightarrow$  biểu đồ lực cắt có bước nhảy, độ lớn bước nhảy bằng giá trị lực tập trung, xét từ trái qua phải, chiều bước nhảy cùng chiều lực tập trung



# Ví dụ 1.2 (1)

Vẽ biểu đồ các thành phần ứng lực trên các mặt cắt ngang của thanh chịu tải trọng như hình vẽ

**GIẢI**

1. Xác định các phản lực liên kết

Bài toán đối xứng:

$$\Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

Hoặc:

$$\sum M_A = V_B \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{ql}{2}$$

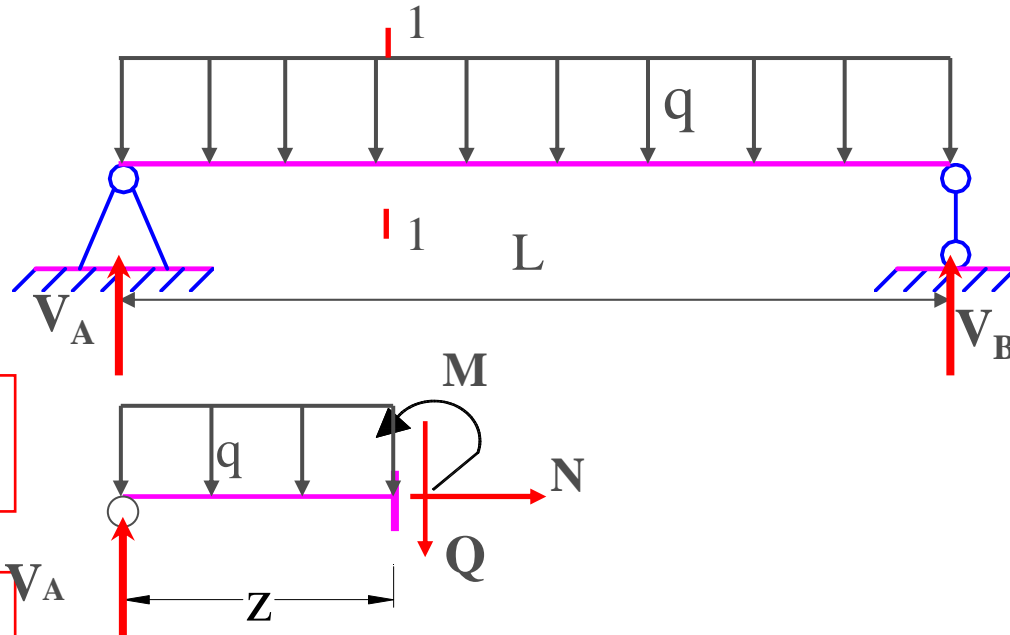
$$\sum M_B = V_A \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{ql}{2}$$

2. Biểu thức nội lực

Xét mặt cắt 1-1  
( $0 \leq z \leq L$ )

$$\sum Y = Q + qz - V_A = 0 \Rightarrow Q = \frac{ql}{2} - q \cdot z$$



$$\sum M_0 = M - V_A z_1 + \frac{qz_1^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{q}{2} \cdot z^2$$



# Ví dụ 1.2 (2)

$$Q = \frac{ql}{2} - q \cdot z \begin{cases} z = 0 \Rightarrow Q_A = \frac{qL}{2} \\ z = L \Rightarrow Q_B = -\frac{qL}{2} \end{cases}$$

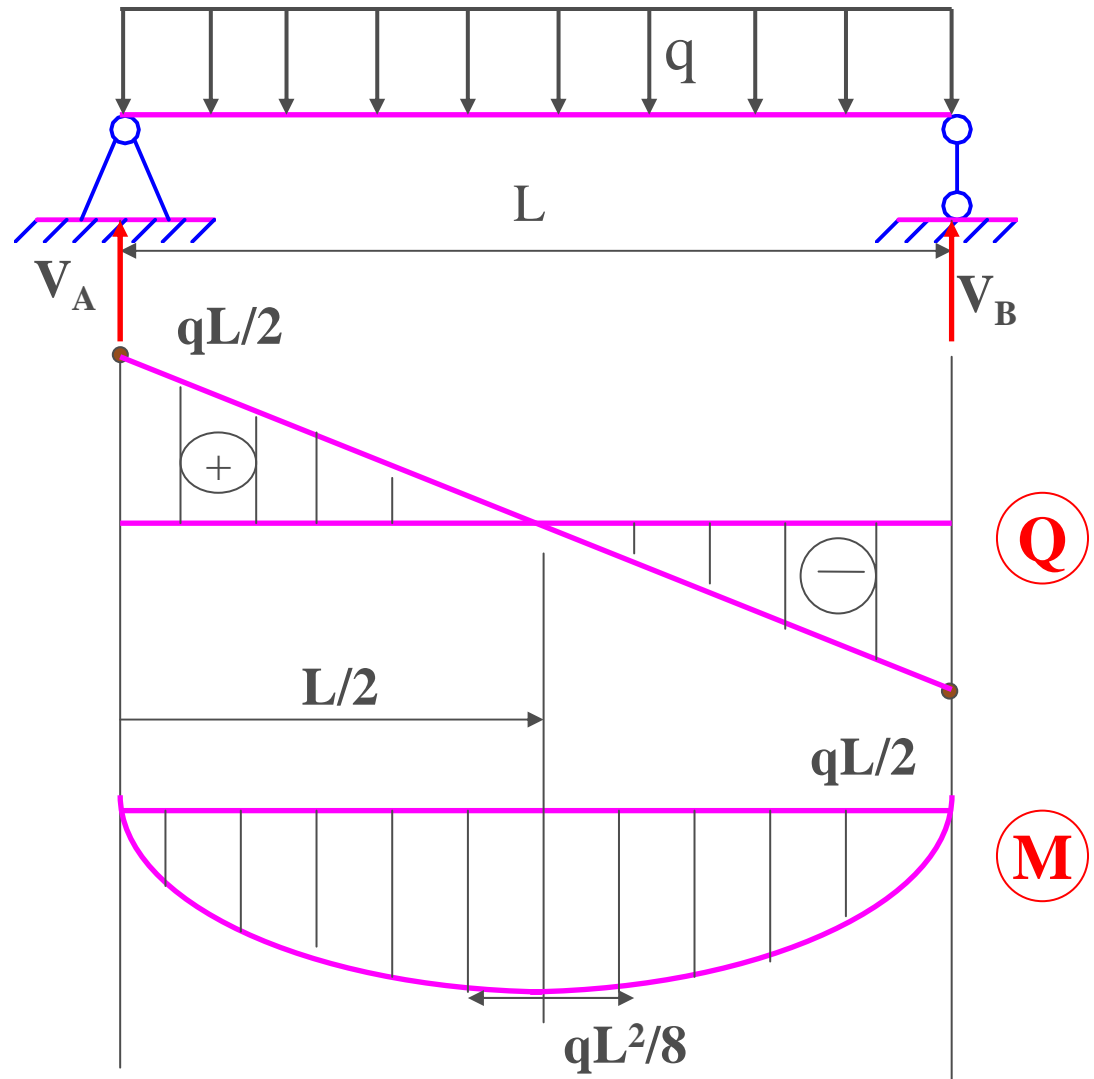
$$M = \frac{ql}{2} \cdot z - \frac{q}{2} \cdot z^2 \begin{cases} z = 0 \Rightarrow M_A = 0 \\ z = L \Rightarrow M_B = 0 \end{cases}$$

$$M' = \frac{qL}{2} - qz \quad M' = 0 \Rightarrow z = \frac{L}{2}$$

$$M'' = -q < 0 \Rightarrow M_{\max} = M_{(z=L/2)} = \frac{qL^2}{8}$$

▪ Nhận xét 2

Tại mặt cắt có lực cắt bằng 0, biểu đồ mô men đạt cực trị



# Ví dụ 1.3 (1)

## 1. Xác định phản lực:

$$\sum M_A = V_B \cdot (a + b) - M = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{M}{a + b}$$

$$\sum M_B = V_A \cdot (a + b) - M = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{M}{a + b}$$

## 2. Lập các biểu thức ứng lực:

AC: Xét mặt cắt 1-1 (  $0 \leq z_1 \leq a$  )

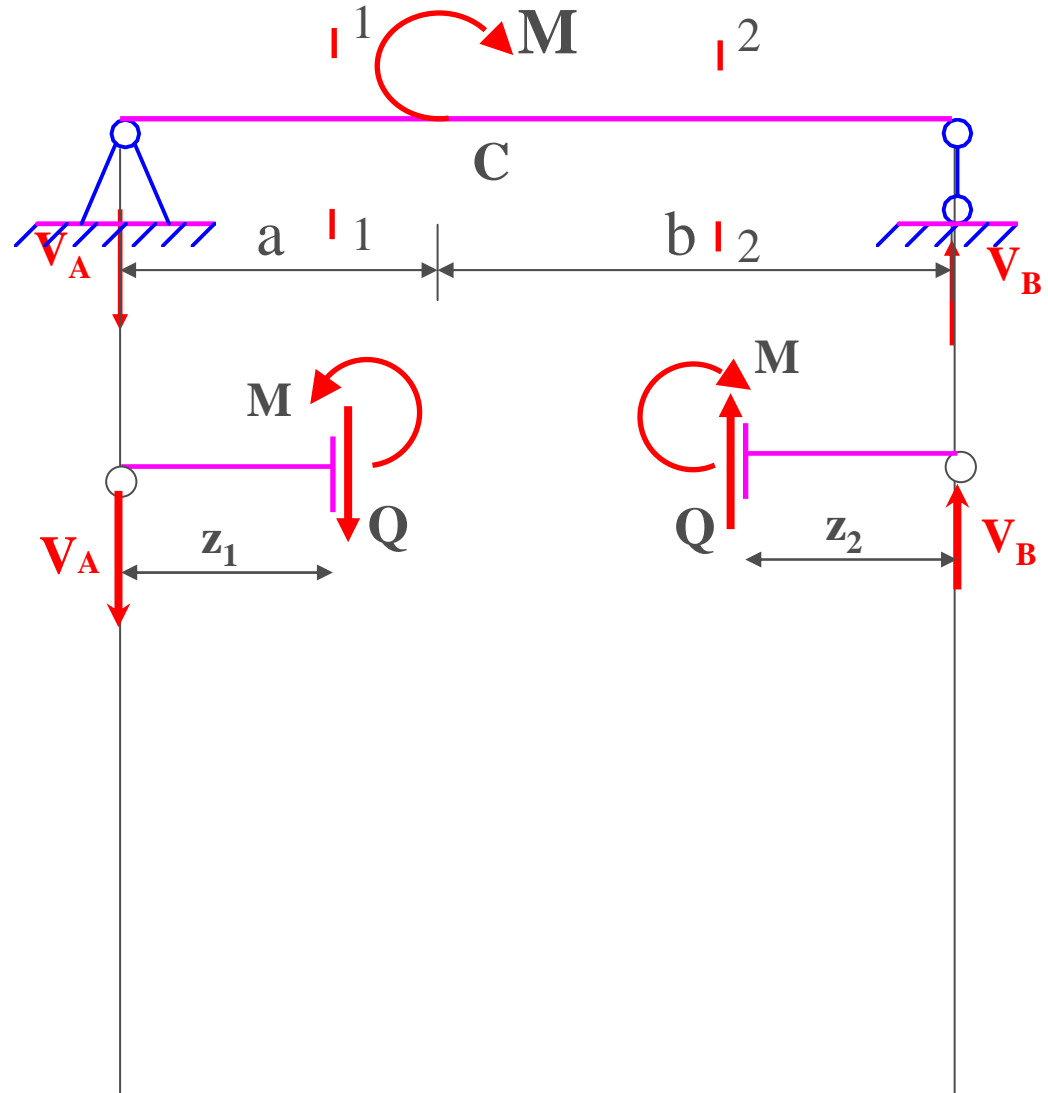
$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a + b}$$

$$M_x = -V_A \cdot z_1$$

Xét mặt cắt 2-2 (  $0 \leq z_2 \leq b$  )

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a + b}$$

$$M_x = V_B \cdot z_2$$



# Ví dụ 1.3 (2)



**AC: (  $0 \leq z_1 \leq a$  )**

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a+b}$$

$$M_x = -V_A \cdot z_1$$

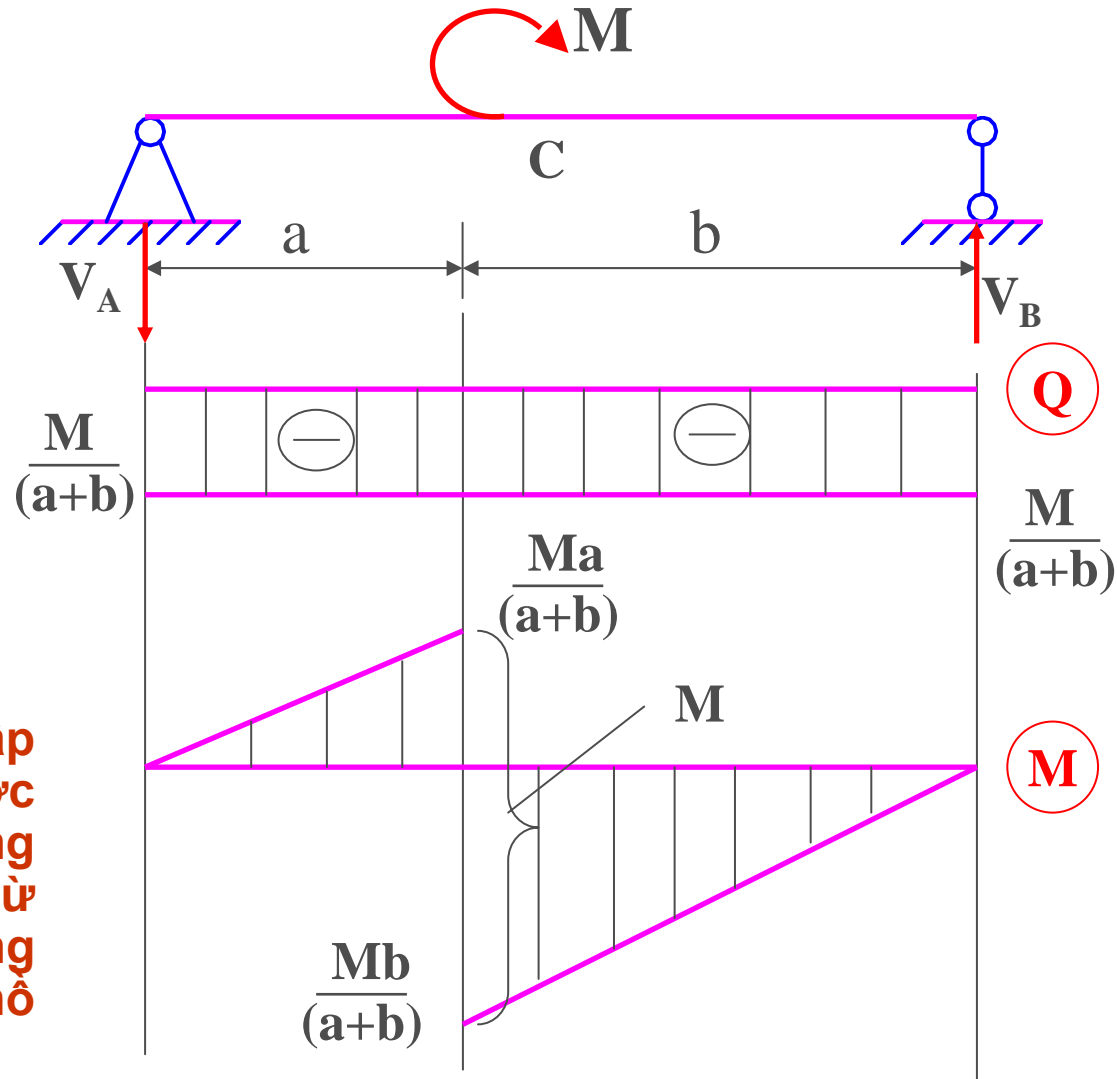
**BC: (  $0 \leq z_2 \leq b$  )**

$$Q_y = -V_A = -\frac{M}{a+b}$$

$$M_x = V_B \cdot z_2$$

**Nhận xét 3**

Tại mặt cắt có mô men tập trung, biểu đồ mô men có bước nhảy, độ lớn bước nhảy bằng giá trị mô men tập trung, xét từ trái qua phải, mômen tập trung quay thuận chiều kim đồng hồ thì bước nhảy đi xuống



# 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (1)

- Xét dầm chịu tải phân bố  $q(z) > 0$ : hướng lên ↑

Tách đoạn thanh có chiều dài  $dz$  giới hạn bởi 2 mặt cắt ngang 1-1 và 2-2

$$\sum Y = Q + dQ - Q - q(z)dz = 0$$

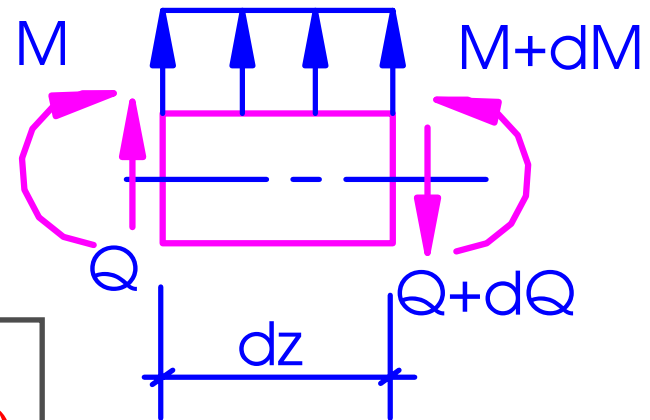
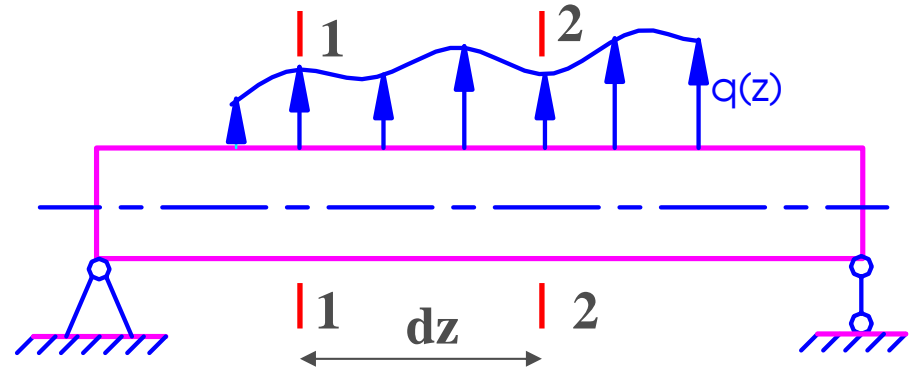
$$\Rightarrow \frac{dQ}{dz} = q(z)$$

$$\sum M = M + dM - M - (Q + dQ)\frac{dz}{2} - Q\frac{dz}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dz} = Q$$



$$\boxed{\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q(z)}$$



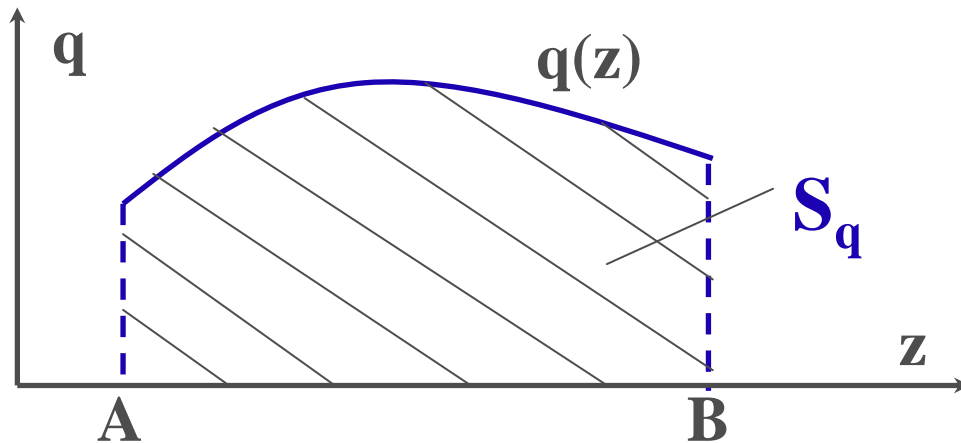
Đạo hàm bậc hai của mô men uốn bằng đạo hàm bậc nhất của lực cắt và bằng cường độ tải trọng phân bố

# 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (2)

## ❖ Ứng dụng

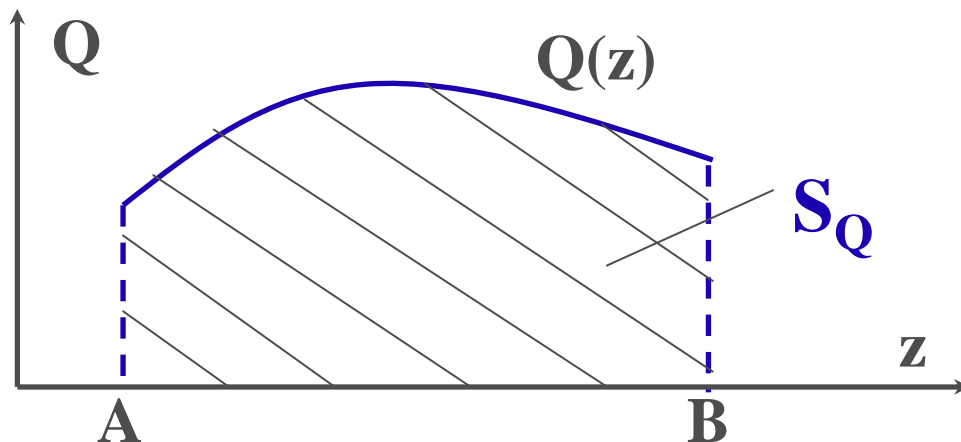
- Nhận dạng các biểu đồ  $Q$ ,  $M$  khi biết qui luật phân bố của tải trọng  $q(z)$ . Nếu trên một đoạn thanh biểu thức của  $q(z)$  bậc  $n$  thì biểu thức lực cắt  $Q$  bậc  $(n+1)$ , biểu thức mô men  $M$  bậc  $(n+2)$
- Tại mặt cắt có  $Q=0 \Rightarrow M$  cực trị
- Tính các thành phần  $Q$ ,  $M$  tại mặt cắt bất kỳ khi biết giá trị của chúng tại mặt cắt xác định
  - $Q_{\text{phải}} = Q_{\text{trái}} + S_q$  ( $S_q$  – Dtích biểu đồ  $q$ )
  - $M_{\text{phải}} = M_{\text{trái}} + S_Q$  ( $S_Q$  – Dtích biểu đồ  $Q$ )

# 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (3)



$$\int_A^B dQ = \int_A^B q(z) dz$$

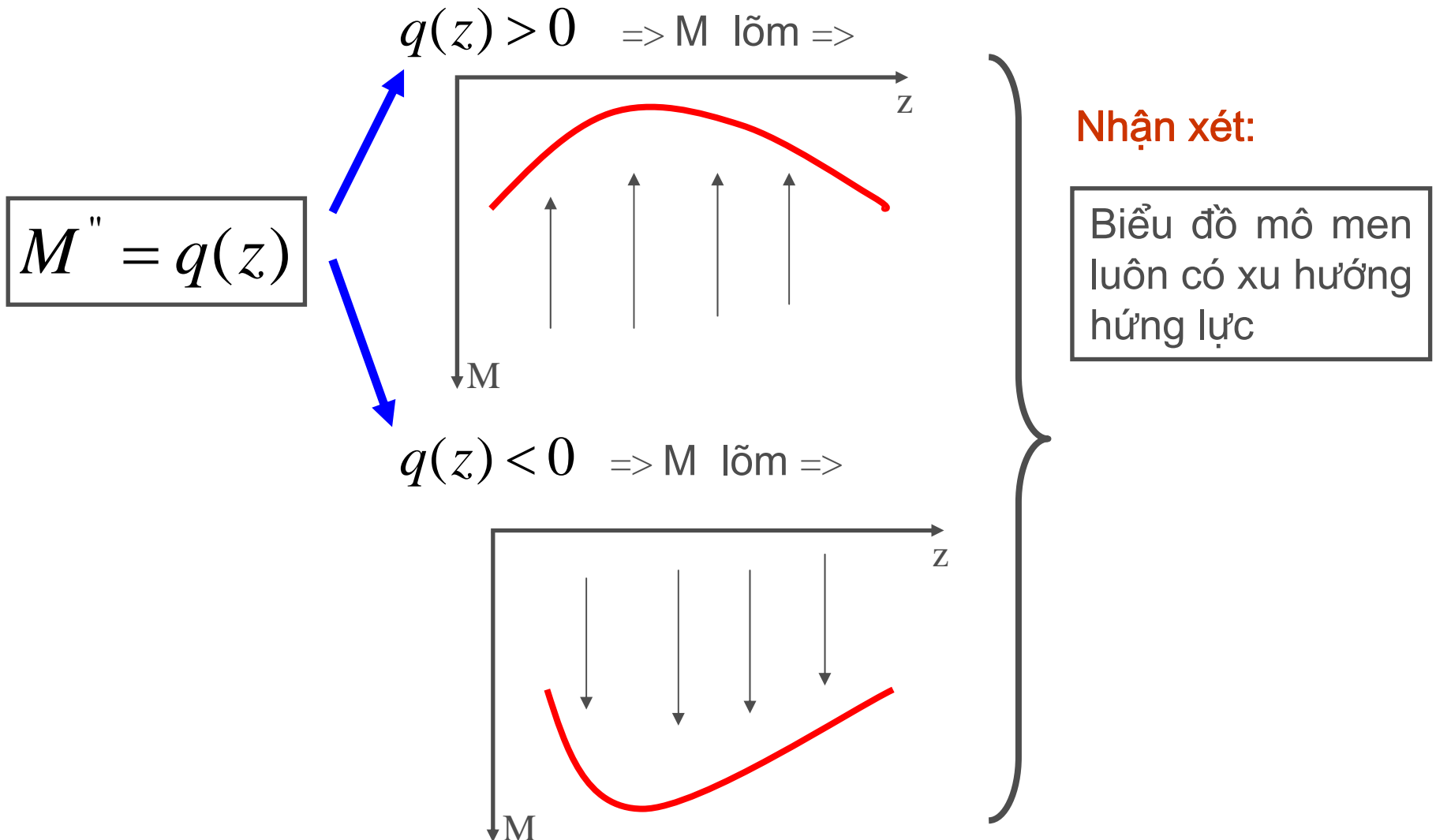
$$Q_B = Q_A + S_q$$



$$\int_A^B dM = \int_A^B Q(z) dz$$

$$M_B = M_A + S_Q$$

# 1.3. Liên hệ vi phân giữa mô men uốn, lực cắt và tải ngang phân bố (4)



## 1.4. Vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt

- ❖ **Cơ sở:** Dựa vào mối liên hệ vi phân giữa  $Q$ ,  $M$  và  $q(z)$
- ❖ **Biết tải trọng phân bố  $\Rightarrow$  nhận xét dạng biểu đồ  $Q$ ,  $M \Rightarrow$  xác định số điểm cần thiết để vẽ được biểu đồ**
  - $q=0 \Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_A=?$  (hoặc  $Q_B$ )  
 $M$  bậc 1  $\Rightarrow M_A=?$  và  $M_B=?$
  - $q=\text{const} \Rightarrow Q$  bậc 1  $\Rightarrow Q_A=?$   $Q_B=?$   
 $M$  bậc 2  $\Rightarrow M_A=?$ ;  $M_B=?$ ; cực trị?  
tính lồi, lõm,..?



## 1.4. Vẽ biểu đồ ứng lực theo điểm đặc biệt (2)

❖ Các giá trị  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $M_A$ ,  $M_B$ , cực trị - là giá trị các điểm đặc biệt. Được xác định bởi:

- Quan hệ bước nhảy của biểu đồ
- Phương pháp mặt cắt
- $Q_{\text{phải}} = Q_{\text{trái}} + S_q$  ( $S_q$  - Dtích biểu đồ  $q$ )
- $M_{\text{phải}} = M_{\text{trái}} + S_Q$  ( $S_Q$  - Dtích biểu đồ  $Q$ )

❖ Ví dụ

# Ví dụ 1.4 (1)

## ❖ Xác định phản lực

$$\sum M_B = V_A \cdot 3a - 2qa \cdot 2a - F \cdot a = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{5}{3}qa$$

$$\sum M_A = V_B \cdot 3a - 2qa \cdot a - F \cdot 2a = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \frac{4}{3}qa$$

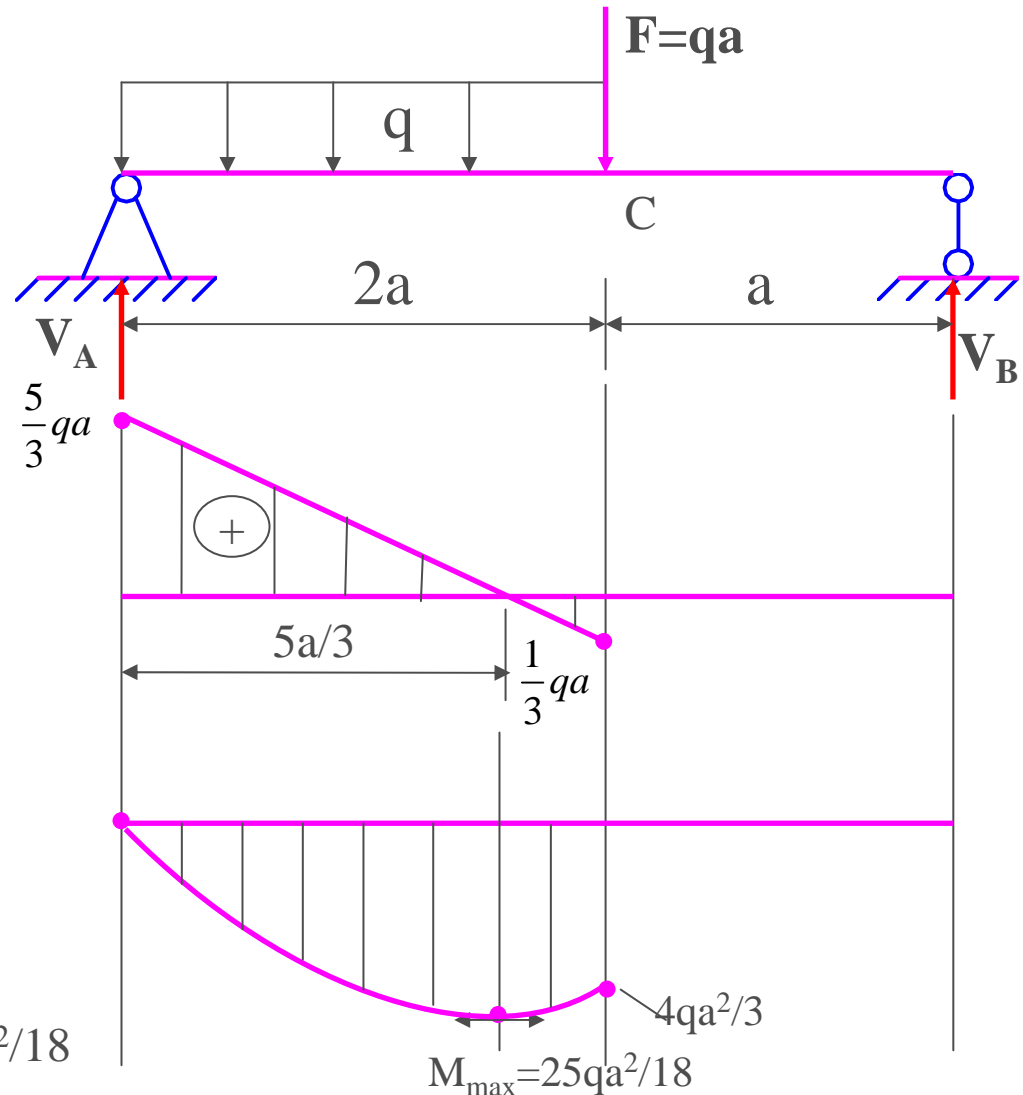
Xét đoạn AC:  $q = \text{const} \Rightarrow Q$  bậc 1

$$Q_A = V_A$$

$$Q_C = V_A + S_q = 5qa/3 - 2qa = -qa/3$$

$$M \text{ bậc 2: } M_A = 0$$

$$M_C = M_A + S_Q = 4qa^2/3; M_{\max} = 25qa^2/18$$



# Ví dụ 1.4 (2)

Xét đoạn BC:  $q = 0$

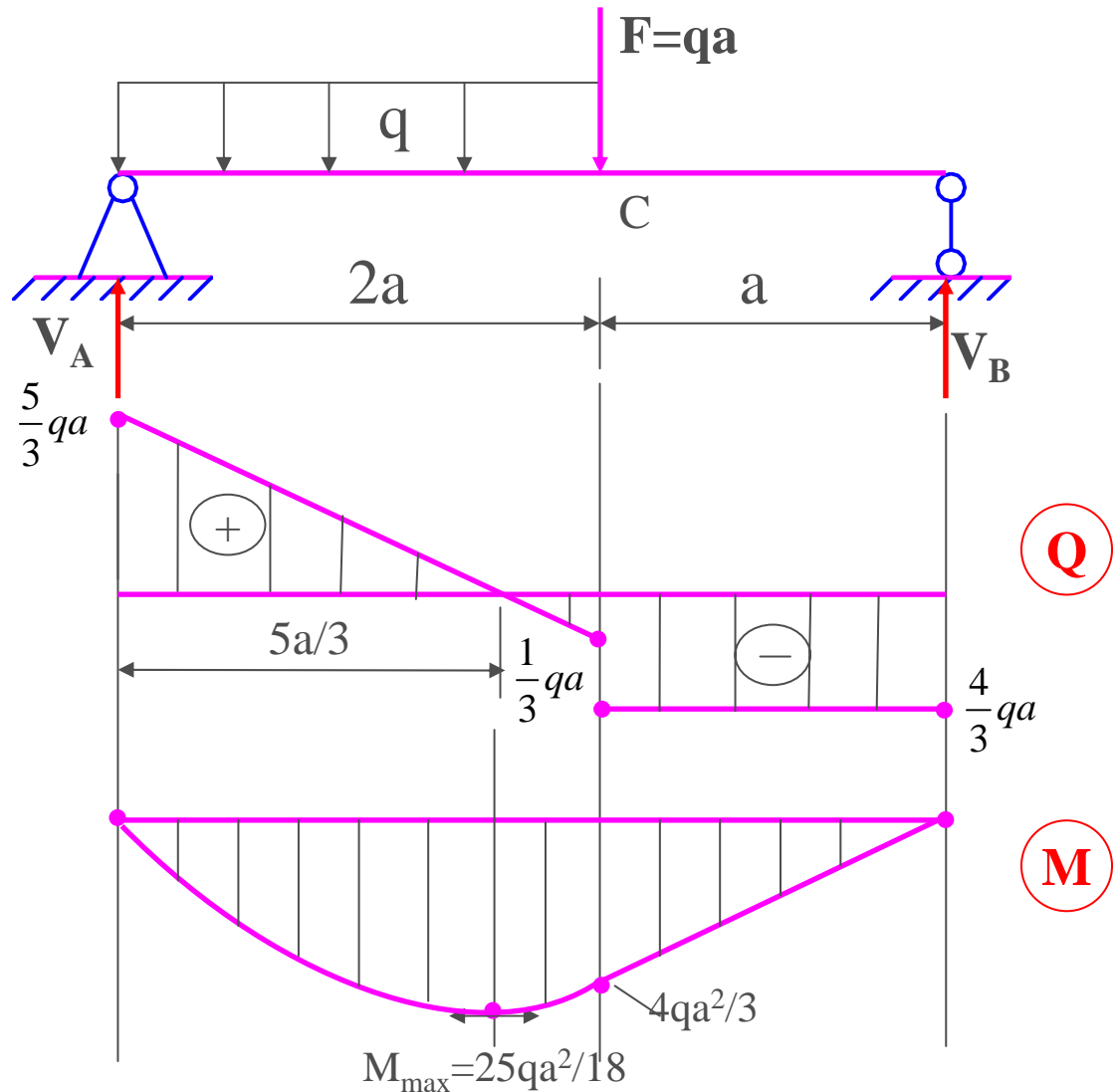
→  $Q = \text{const}$

$$Q_B = -V_B$$

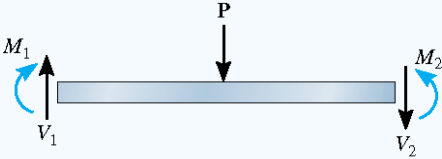
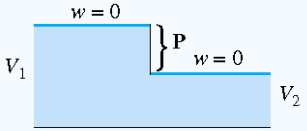
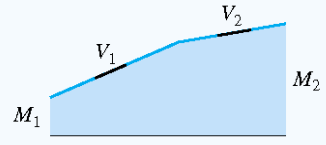
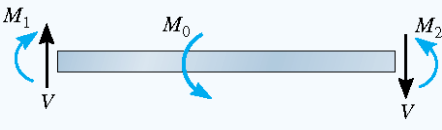
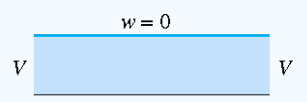
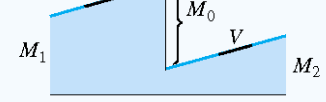
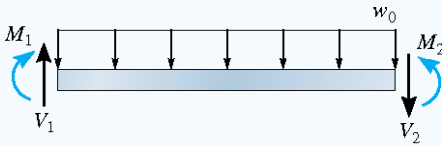
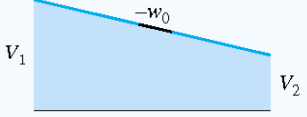
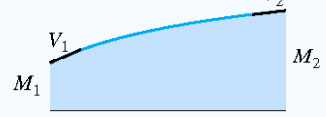
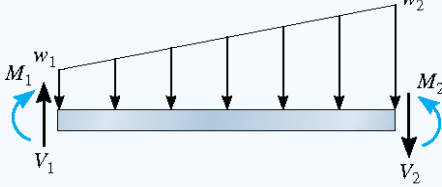
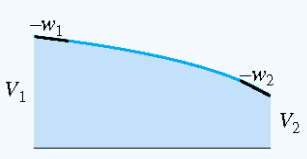
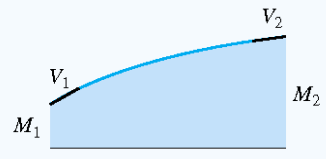
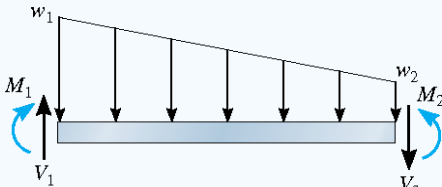
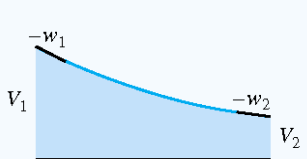
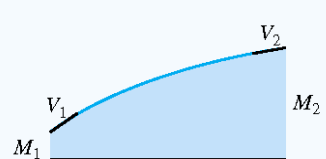
→ M bậc 1:

$$M_B = 0$$

$$M_C = M_B - S_Q = 4qa^2/3$$



# Biểu đồ Q, M các trường hợp chịu tải trọng đơn giản

Loading	Shear Diagram $\frac{dV}{dx} = -w$	Moment Diagram $\frac{dM}{dx} = V$
	 <p>Downward force <math>P</math> causes <math>V</math> to jump downward from <math>V_1</math> to <math>V_2</math>.</p>	 <p>Constant slope changes from <math>V_1</math> to <math>V_2</math>.</p>
	 <p>No change in shear since slope <math>w = 0</math>.</p>	 <p>Constant positive slope. Counterclockwise <math>M_0</math> causes <math>M</math> to jump downward.</p>
	 <p>Constant negative slope.</p>	 <p>Positive slope that decreases from <math>V_1</math> to <math>V_2</math>.</p>
	 <p>Negative slope that increases from <math>-w_1</math> to <math>-w_2</math>.</p>	 <p>Positive slope that decreases from <math>V_1</math> to <math>V_2</math>.</p>
	 <p>Negative slope that decreases from <math>-w_1</math> to <math>-w_2</math>.</p>	 <p>Positive slope that decreases from <math>V_1</math> to <math>V_2</math>.</p>

## 4.5. Biểu đồ ứng lực dầm tĩnh định nhiều nhịp

**Định nghĩa:** Là hệ tĩnh định gồm tập hợp các dầm, nối với nhau bằng các liên kết khớp

**Cách vẽ biểu đồ:**

- Phân biệt dầm chính và dầm phụ
- Dầm chính là dầm khi đứng độc lập vẫn chịu được tải trọng
- Dầm phụ là dầm khi đứng độc lập không chịu được tải trọng, phải tựa lên dầm chính mới chịu được tải trọng
- Tải trọng đặt lên dầm chính không ảnh hưởng tới dầm phụ, tải trọng đặt trên dầm phụ sẽ truyền tới dầm chính thông qua phản lực liên kết
- Vẽ biểu đồ cho dầm phụ trước rồi đến dầm chính, sau đó ghép lại với nhau

# Ví dụ 1.5 (1)

**Ví dụ 1.5:** Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm ghép tĩnh định sau:

Bài giải:

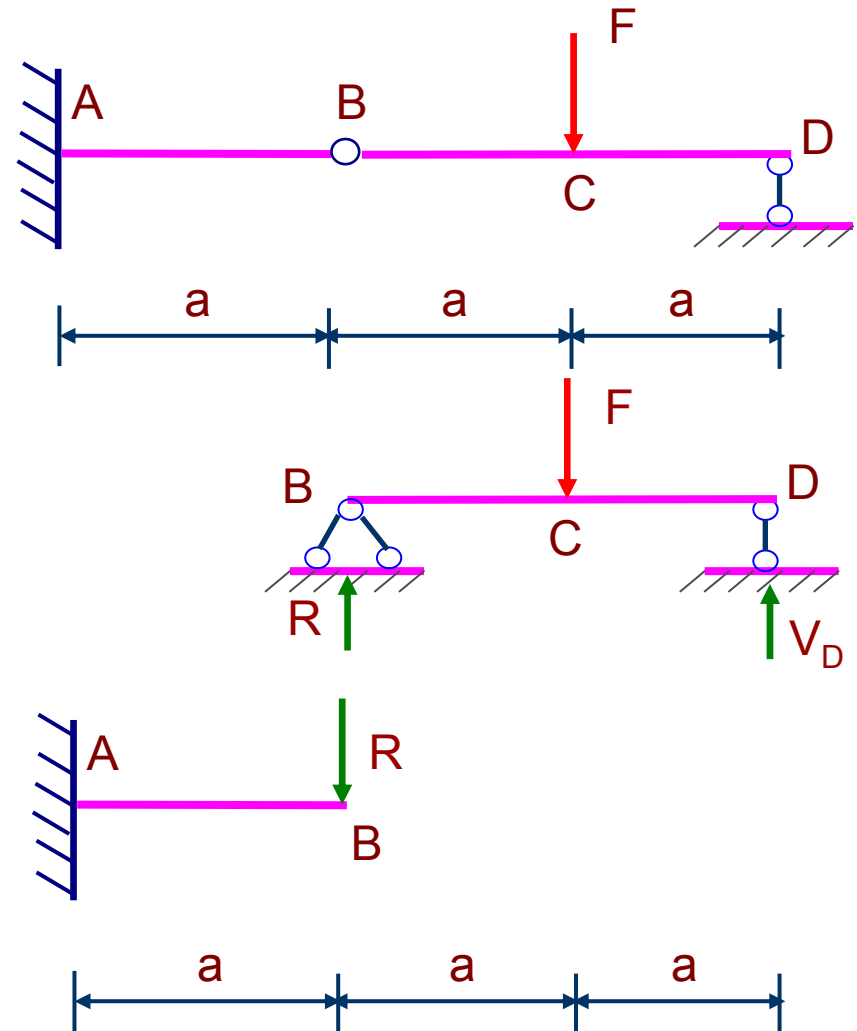
Hệ dầm ABCD là hệ dầm ghép gồm:

- + Dầm phụ BCD
- + Dầm chính AB

1) Dầm phụ BCD:

- Xác định phản lực:

$$V_D = R = \frac{F}{2}$$



# Ví dụ 1.5 (2)

a. Đoạn BC:  $q(z)=0$

$$\Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_B = R = F/2$$

$$\Rightarrow M \text{ bậc nhất} \Rightarrow M_B = 0$$

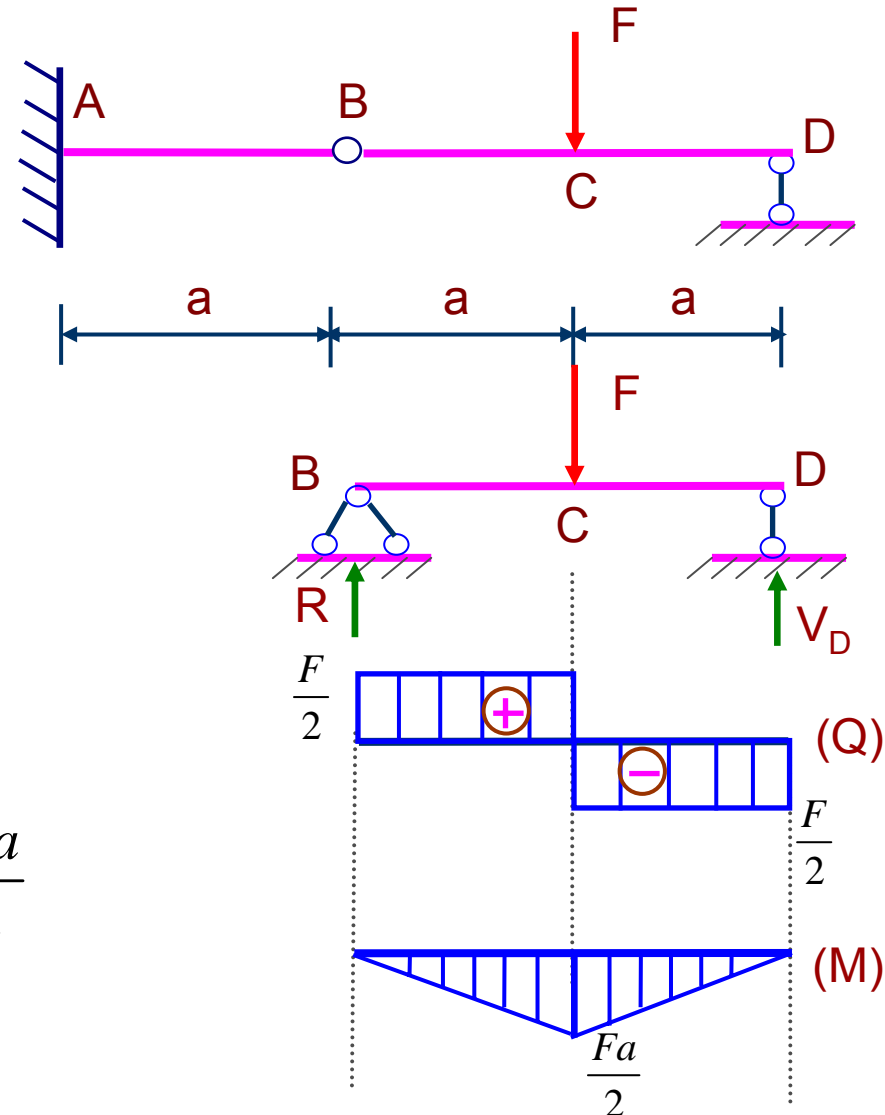
$$\Rightarrow M_C = M_B + S_Q = 0 + \left(\frac{F}{2}a\right) = \frac{Fa}{2}$$

b. Đoạn CD:  $q(z)=0$

$$\Rightarrow Q=\text{const} \Rightarrow Q_D = -V_D = -F/2$$

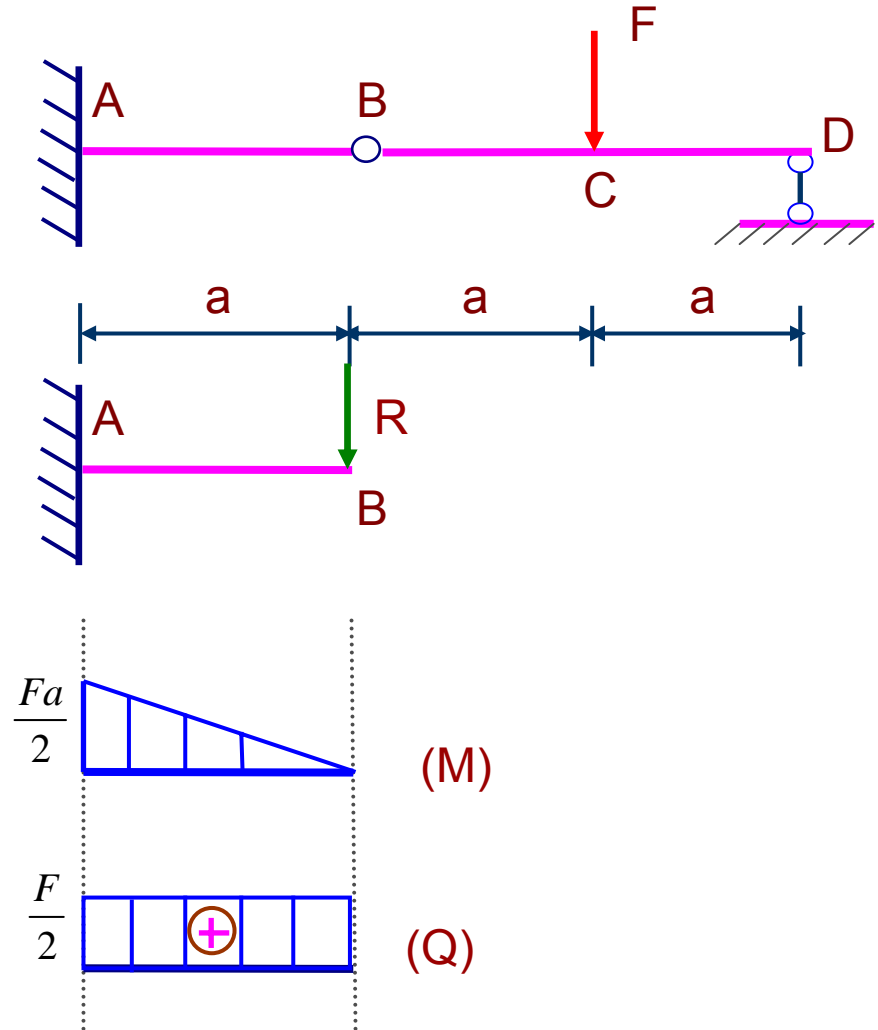
$$\Rightarrow M \text{ bậc nhất} \Rightarrow M_D = 0$$

$$\Rightarrow M_C = M_D - S_Q = 0 - \left(-\frac{Fa}{2}\right) = \frac{Fa}{2}$$



# Ví dụ 1.5 (3)

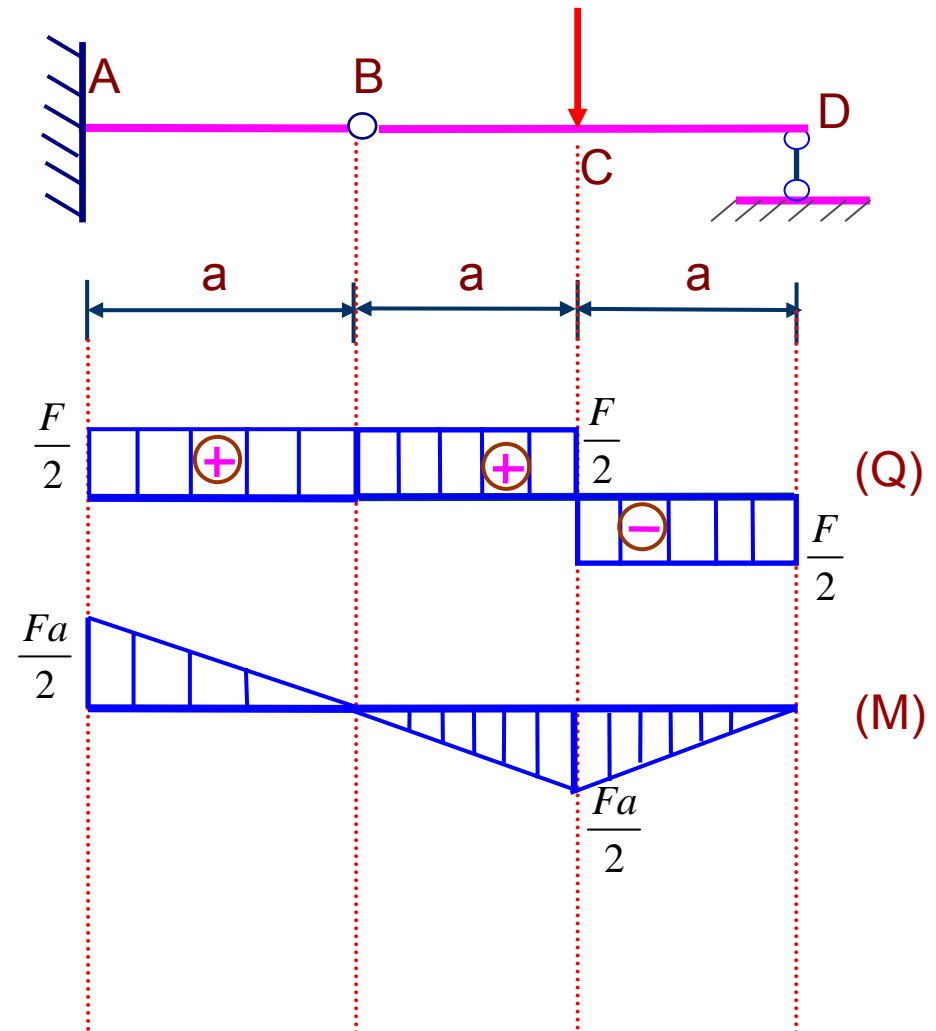
## 2.) Dầm chính AB:





# Ví dụ 1.5 (4)

## 3.) Biểu đồ ứng lực toàn hệ dầm ghép



## 4.6. Biểu đồ ứng lực khung phẳng

- ❖ Khung phẳng là hệ phẳng gồm những thanh nối nhau bằng các liên kết cứng (là liên kết mà góc giữa các thanh tại điểm liên kết không thay đổi khi khung chịu lực)
- ❖ Đối với các đoạn khung nằm ngang, biểu đồ các thành phần ứng lực vẽ như qui ước với thanh thẳng
- ❖ Đối với các đoạn khung thẳng đứng, biểu đồ  $N$ ,  $Q$  vẽ về phía tùy ý và mang dấu. Biểu đồ mô men vẽ về phía thứ căng
- ❖ Để kiểm tra biểu đồ ta cần kiểm tra điều kiện cân bằng các mắt khung: Tại mắt khung, nội lực và ngoại lực thỏa mãn điều kiện cân bằng tĩnh học.

## Ví dụ 1.6 (1)

**Ví dụ 5:** Vẽ biểu đồ ứng lực của khung phẳng sau:

Biết  $M=qa^2$ ,  $F=2qa$

**Bài giải:**

1. Xác định các phản lực:

Từ điều kiện cân bằng của khung ta có

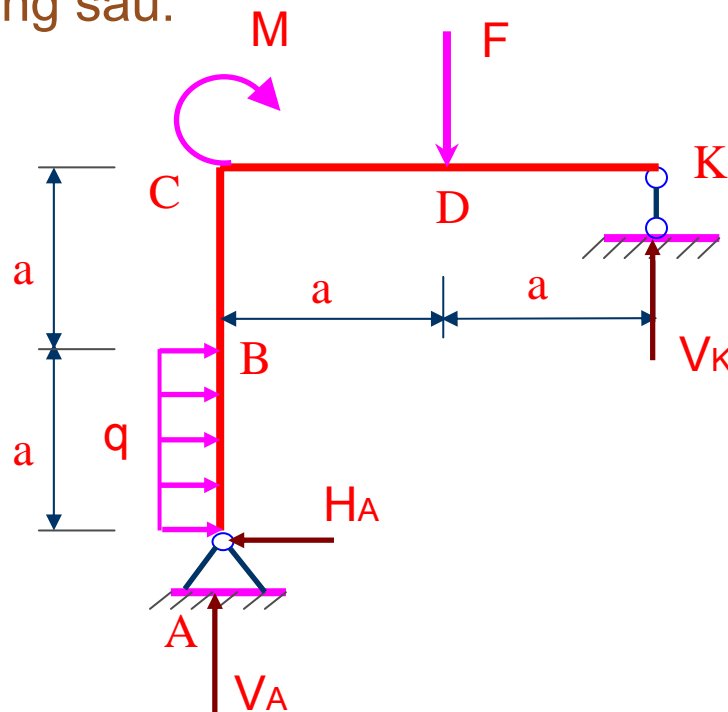
$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = qa$$

$$\sum M_A = 0$$

$$= V_K \cdot 2a - Fa - M_0 - \frac{1}{2} qa^2$$

$$= V_K \cdot 2a - 2qa^2 - qa^2 - \frac{1}{2} qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_K = \frac{7}{4} qa$$



## Ví dụ 1.6 (2)

$$\sum M_K = 0$$

$$= V_A \cdot 2a + H_A \cdot 2a - qa \cdot \frac{3a}{2} + M_0 - Fa$$

$$= V_A \cdot 2a + 2qa^2 - \frac{3}{2}qa^2 + qa^2 - 2qa^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{1}{4}qa$$

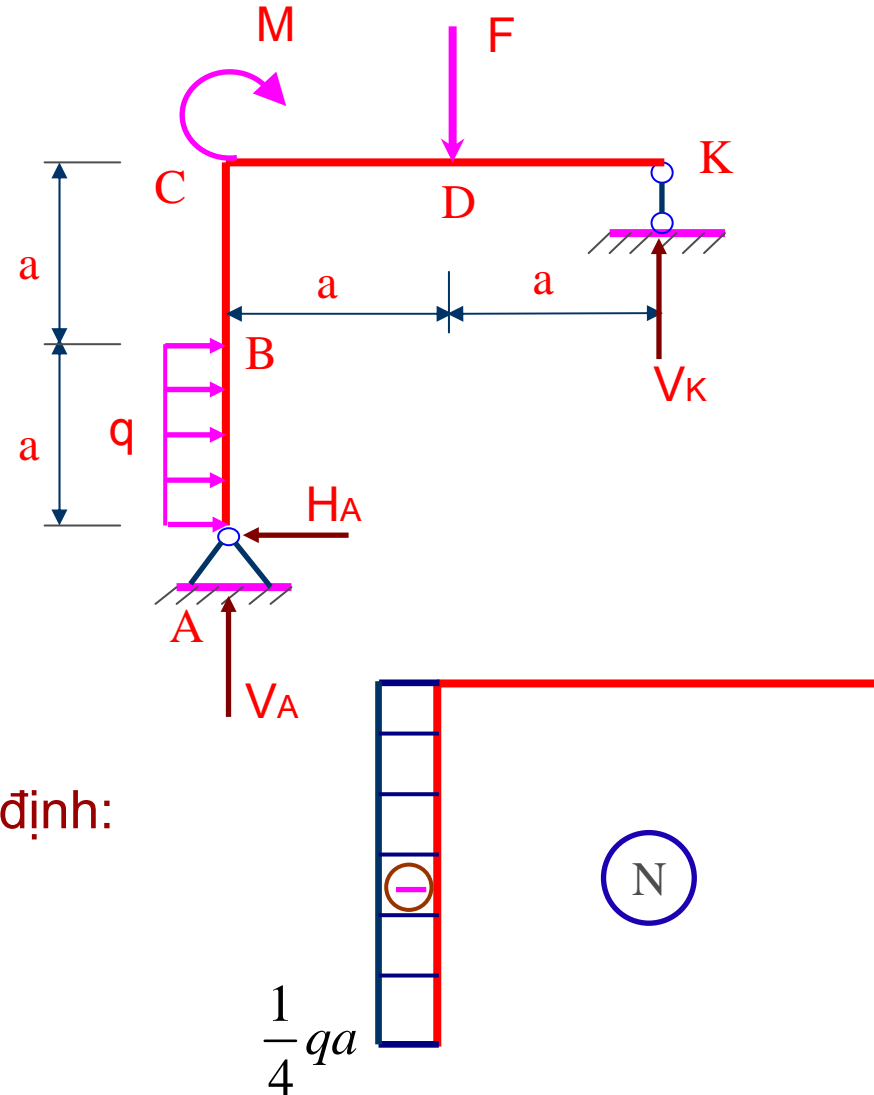
2. Nhận xét dạng biểu đồ các thành phần ứng lực trên từng đoạn:

+ Biểu đồ lực dọc:

Bằng phương pháp mặt cắt dễ dàng xác định:

$$N_{AB} = N_{BC} = -V_A = -\frac{qa}{4}$$

$$N_{DK} = N_{CD} = 0$$



# Ví dụ 1.6 (3)

Đoạn AB:  $q = \text{const}$

⇒ Biểu đồ Q bậc nhất

⇒ Cần xác định:  $Q_A = H_A = qa$

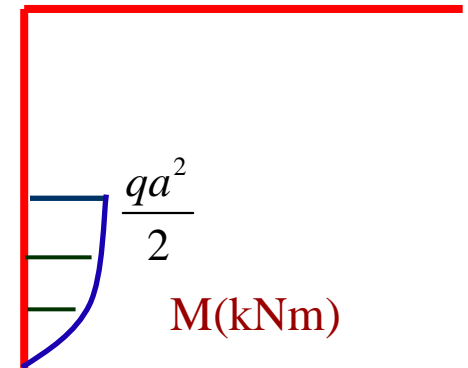
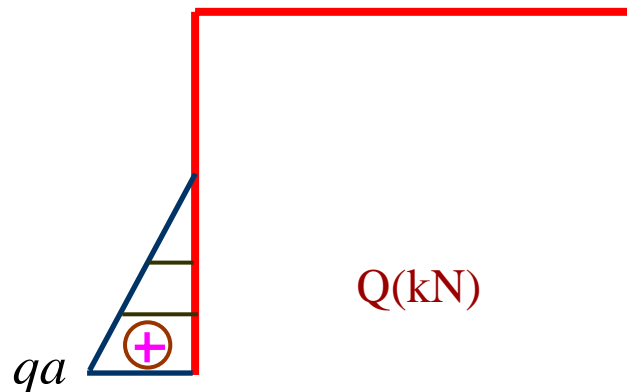
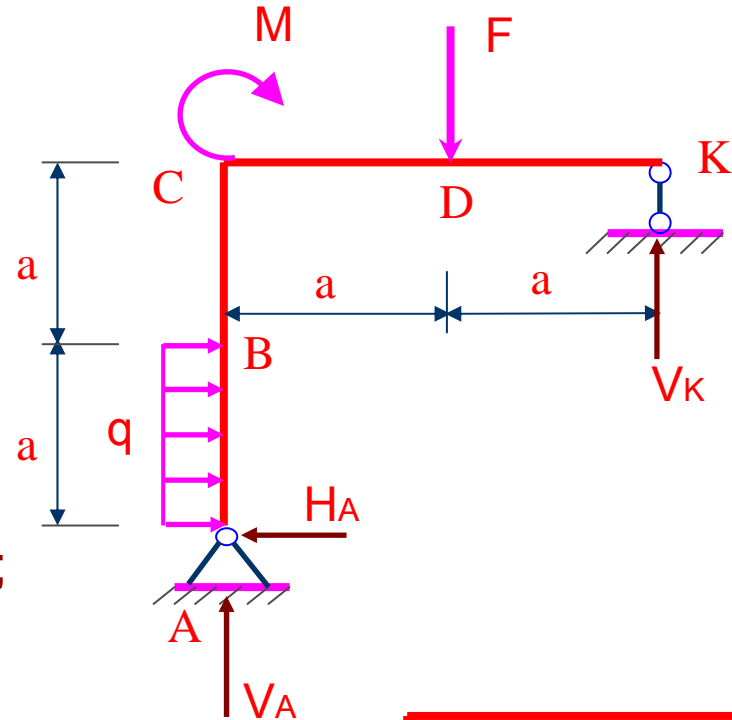
⇒  $Q_B = Q_A + S_q = qa + (-q) \cdot a = 0$

⇒ Biểu đồ M bậc hai

⇒ Cần xác định:  $M_A = 0$

⇒  $M_B = M_A + S_Q = 0 + qa \cdot a/2 = qa^2/2$ ;

⇒ tại B có  $Q = 0 \Rightarrow M_{\max} = qa^2/2$



# Ví dụ 1.6 (4)

Đoạn BC:  $q=0$

⇒ Biểu đồ  $Q=\text{const}$

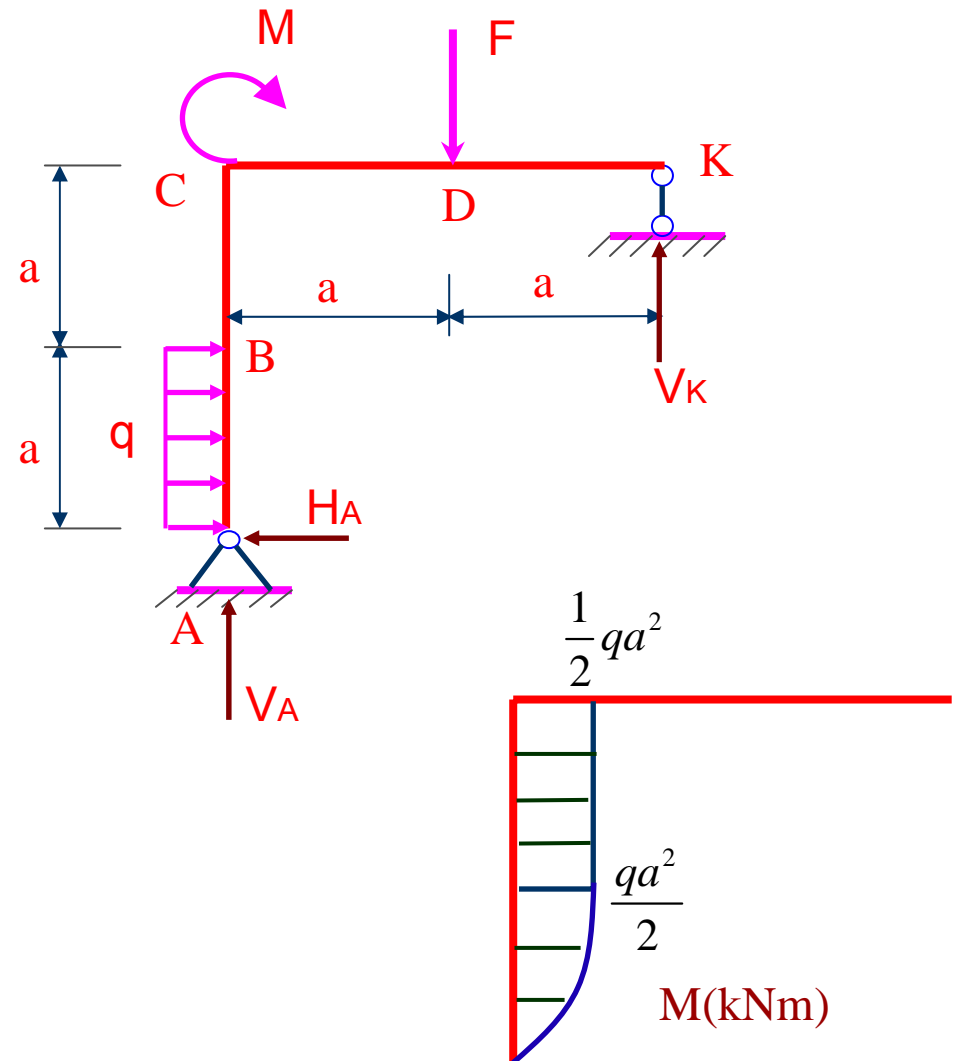
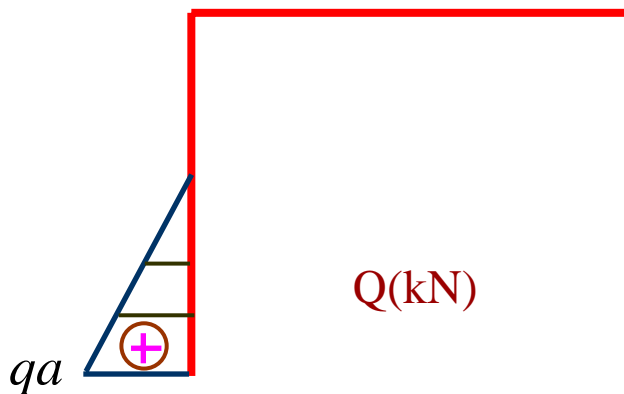
⇒ Cần xác định  $Q_B=0$

⇒ Biểu đồ  $M$  bậc nhất

⇒ Cần xác định

$$M_B = M_B^{(AB)} = qa^2 / 2;$$

$$M_C = M_B + S_Q = qa^2 / 2 + 0 = qa^2 / 2$$



# Ví dụ 1.6 (5)

Trên đoạn CD:  $q=0$

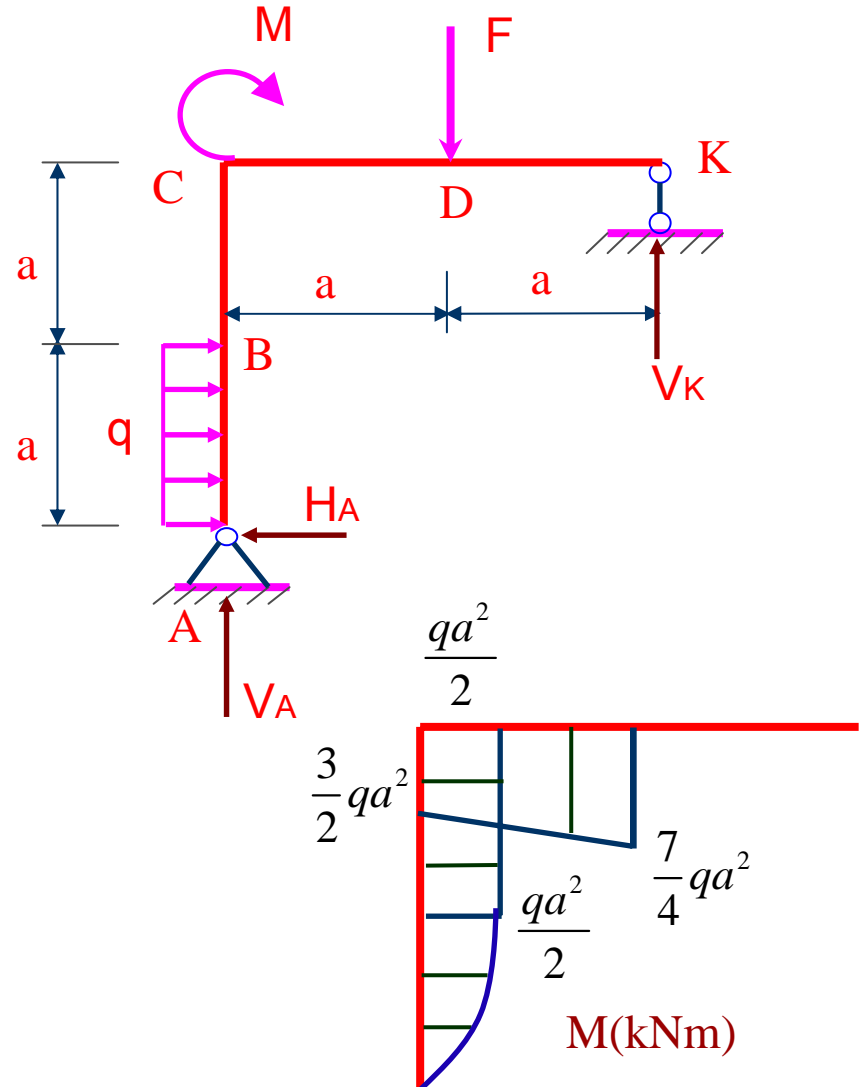
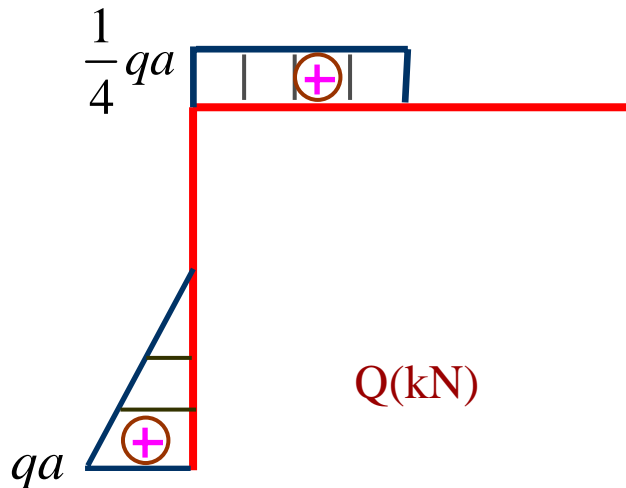
⇒ Biểu đồ  $Q=\text{const} \Rightarrow$  Cần xác định

$$Q_D = F - V_K = 2qa - \frac{7}{4}qa = \frac{1}{4}qa$$

⇒ Biểu đồ  $M$  bậc nhất ⇒ Cần xác định

$$M_D = V_K a = \frac{7}{4}qa^2$$

$$M_C = M_D - S_Q = \frac{7}{4}qa^2 - \left(\frac{1}{4}qa\right)a = \frac{3}{2}qa^2$$



# Ví dụ 1.6 (6)

Trên đoạn DK:  $q=0$

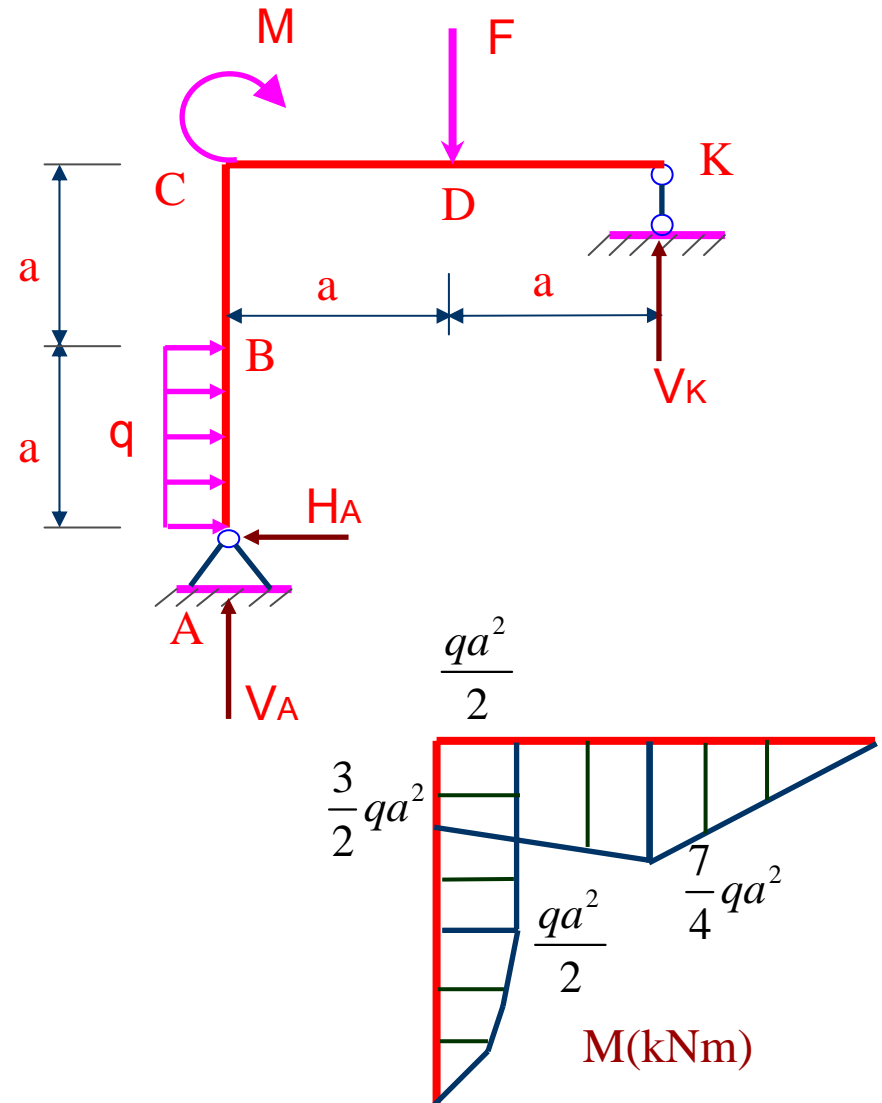
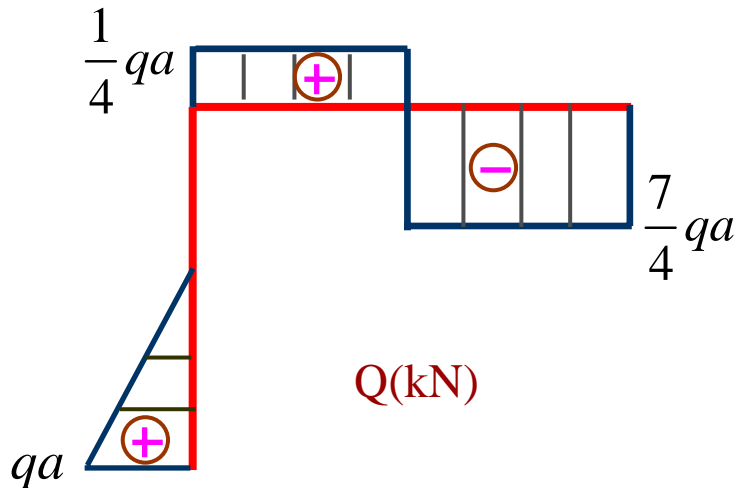
⇒ Biểu đồ  $Q=\text{const} \Rightarrow$  Cần xác định

$$Q_K = -V_K = -\frac{7}{4}qa$$

⇒ Biểu đồ  $M$  bậc nhất ⇒ Cần xác định

$$M_K = 0$$

$$M_D = M_D^{(CD)} = \frac{7}{4}qa^2$$





## Ví dụ 1.6 (7)

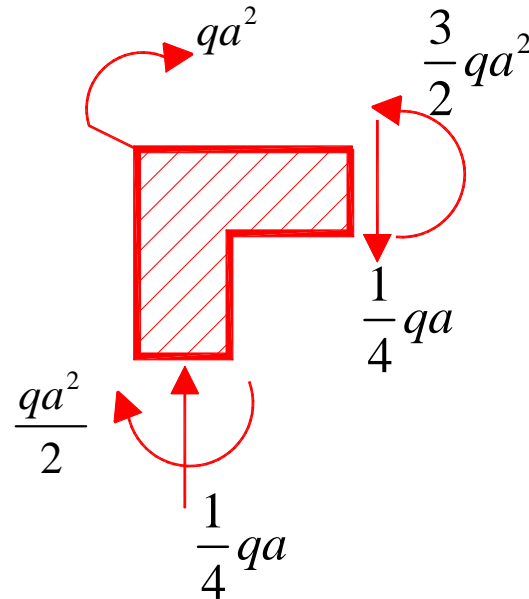
### 4. Xét cân bằng các mắt khung

Tại mắt C, biểu diễn các ngoại lực, các ứng lực trên hai mặt cắt ngay sát C thuộc đoạn BC và CD theo chiều thực (căn cứ vào các biểu đồ). Kiểm tra điều kiện cân bằng: Tại mắt khung tổng nội lực và ngoại lực bằng không.

$$\sum X = 0$$

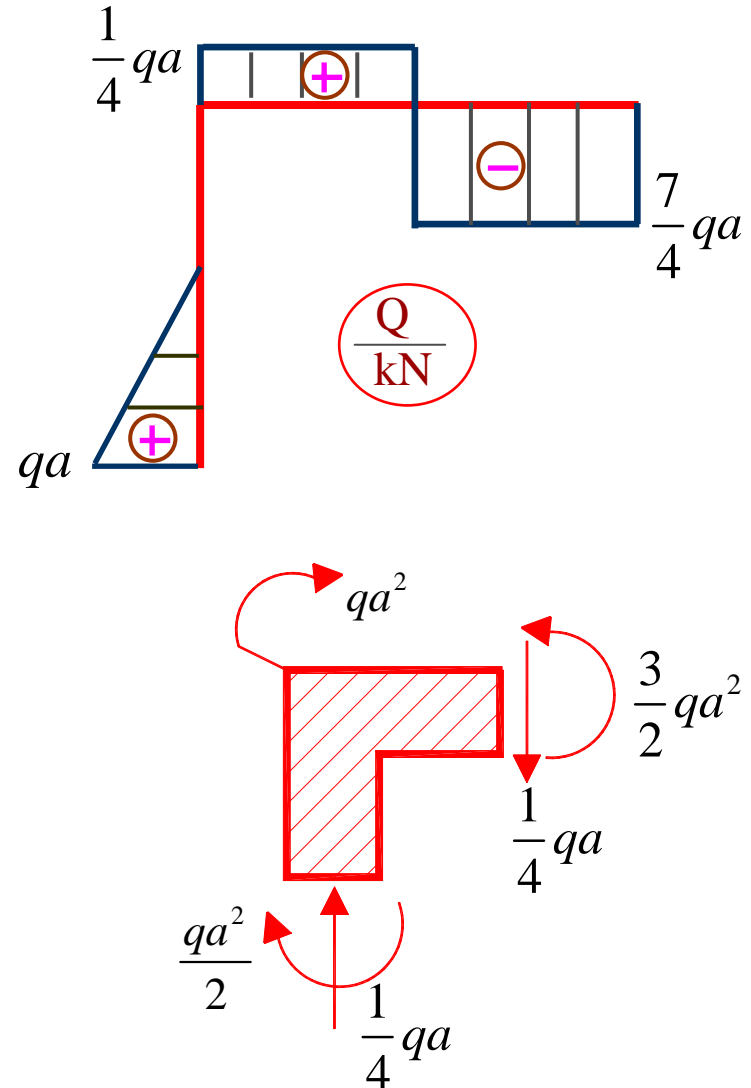
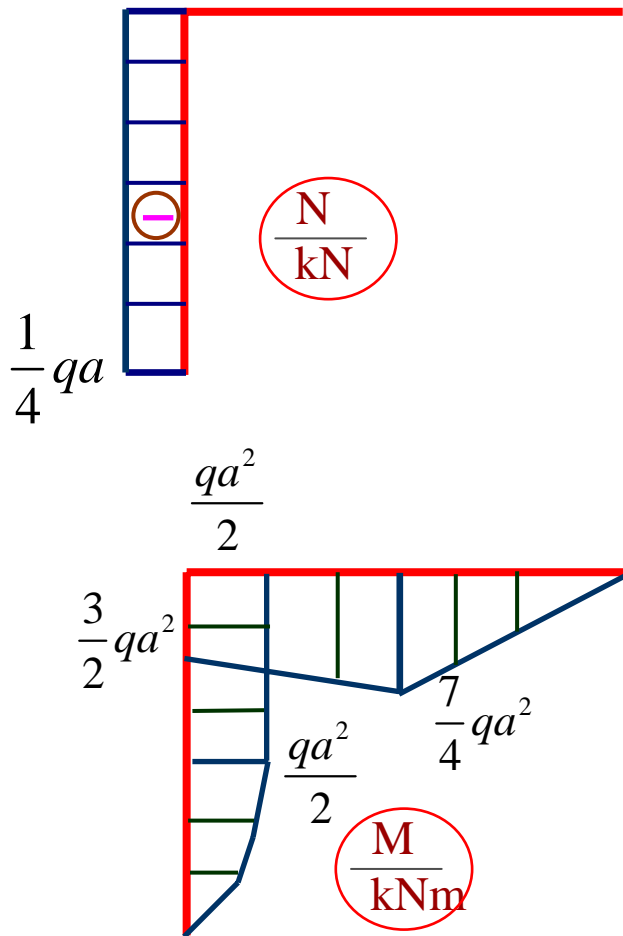
$$\sum Y = 0$$

$$\sum M_C = 0$$



# Ví dụ 1.6 (8)

Biểu đồ nội lực của khung



## 4.7. Biểu đồ ứng lực thanh cong

---

- ❖ Thanh cong: trục thanh là đường cong phẳng, ngoại lực nằm trong mặt phẳng chứa trục thanh
- ❖ Dùng phương pháp mặt cắt để xác định các thành phần ứng lực trên mặt cắt ngang

# Ví dụ 1.7 (1)

**Ví dụ 2:** Vẽ biểu đồ nội lực cho thanh cong như hình bên. Biết:  $R=2m$ ,  $M_1=5kNm$ ,  $M_2=10kNm$ ,  $P_1=15kN$ .

Bài giải:

1) Tính phản lực tại gối A và E

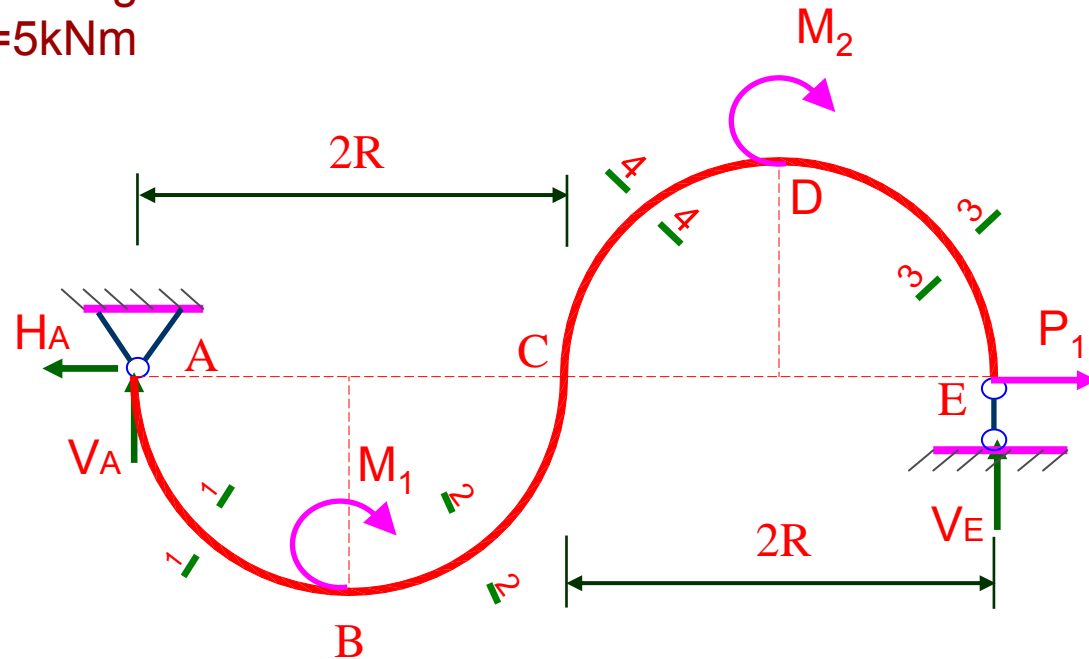
Ta có:

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = P_1 = 15kN$$

$$\sum M_A = M_1 + M_2 - V_E \cdot 4R = 0$$

$$V_E = \frac{M_1 + M_2}{4R} = \frac{10 + 5}{8} = 1,875(kN)$$

$$V_A = V_E = 1,875kN$$



# Ví dụ 1.7 (2)

2) Chia thành thành 4 đoạn

a. Xét đoạn AB:

Dùng mặt cắt 1 – 1, ta có:

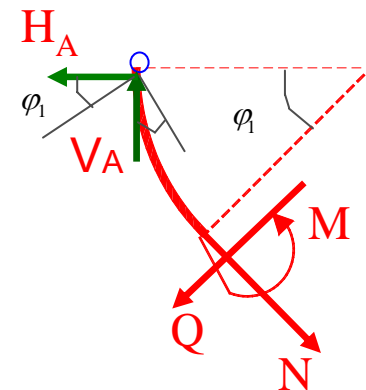
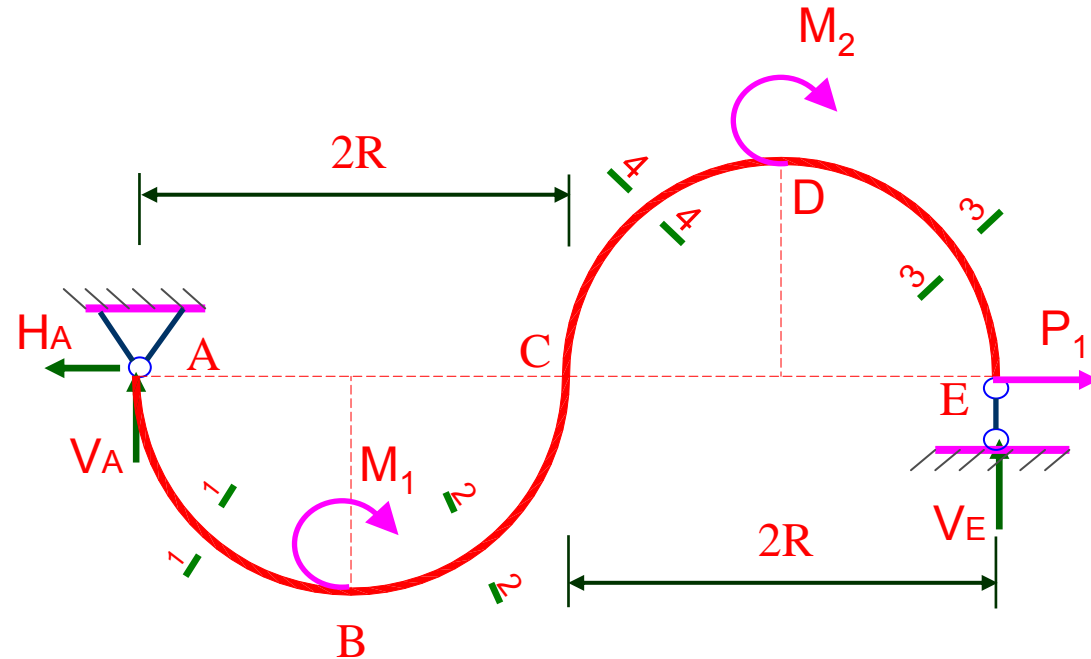
$$0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} N &= -V_A \cdot \cos \varphi_1 + H_A \cdot \sin \varphi_1 \\ &= -1,875 \cos \varphi_1 + 15 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

$$Q = -V_A \cdot \sin \varphi_1 - H_A \cdot \cos \varphi_1 = -1,875 \sin \varphi_1 - 15 \cos \varphi_1$$

$$M = -V_A \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_1) - R \cdot H_A \cdot \sin \varphi_1$$

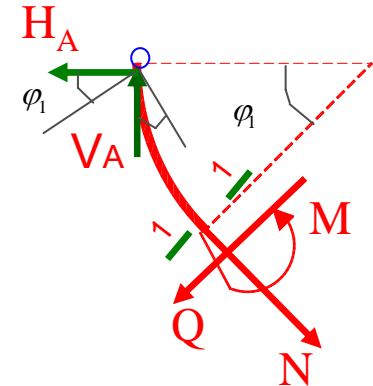
$$\Rightarrow M = 3,75 \cdot \cos \varphi_1 - 30 \sin \varphi_1 - 3,75$$



# Ví dụ 1.7 (3)

Bảng biến thiên:

$\varphi_1$ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15
Q[kN]	-15	-13,98	-11,93	-9,12	-1,88
M[kNm]	0	-15,50	-22,31	-27,86	-33,75



b, Xét đoạn BC:  $0 \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có (mặt cắt 2-2):

$$N = V_A \cdot \sin \varphi_2 + H_A \cdot \cos \varphi_2 = 1,875 \cdot \sin \varphi_2 + 15 \cdot \cos \varphi_2$$

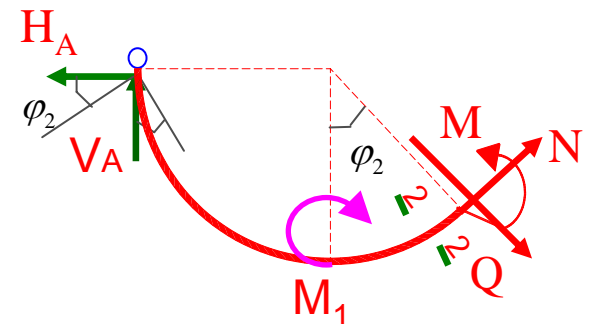
$$Q = -V_A \cos \varphi_2 + H_A \sin \varphi_2 = -1,875 \cos \varphi_2 + 15 \sin \varphi_2$$

$$Q = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 7,13^\circ$$

$$M = -V_A R (1 + \sin \varphi_2) + M_1 - H_A R \cos \varphi_2$$

$$M = -3,75 - 3,75 \sin \varphi_2 - 30 \cos \varphi_2 + 5$$

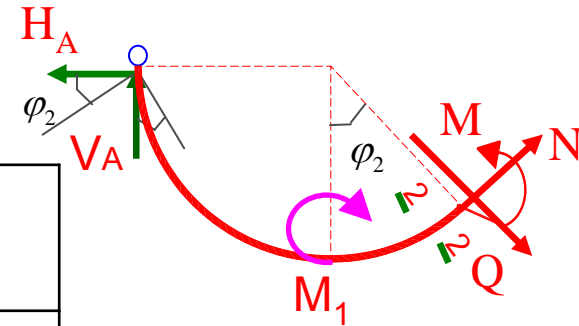
$$M_{\max} = M_{(\varphi_2=7,13^\circ)} = 29(kNm)$$



# Ví dụ 1.7 (4)

Bảng biến thiên:

$\varphi_2$ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	15,00	13,93	11,93	9,12	1,88
Q[kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15
M[kNm]	-28,75	-26,61	-22,61	-17,00	-2,5

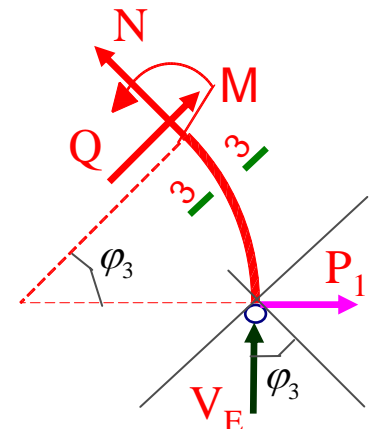


c, Xét đoạn ED:  $0 \leq \varphi_3 \leq \frac{\pi}{2}$   
Ta có:

$$N = -V_E \cdot \cos \varphi_3 + P_1 \cdot \sin \varphi_3 = -1,875 \cdot \cos \varphi_3 + 15 \cdot \sin \varphi_3$$

$$Q = -V_E \cdot \sin \varphi_3 - P_1 \cdot \cos \varphi_3 = -1,875 \cdot \sin \varphi_3 - 15 \cdot \cos \varphi_3$$

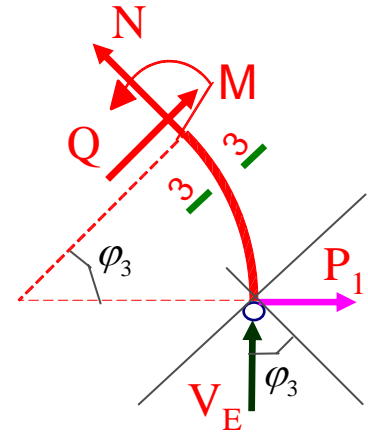
$$\begin{aligned} M &= -V_E \cdot R \cdot (1 - \cos \varphi_3) - R \cdot P_1 \cdot \sin \varphi_3 \\ &= -3,75 \cdot \cos \varphi_3 - 30 \cdot \sin \varphi_3 - 3,75 \end{aligned}$$



# Ví dụ 1.7 (5)

Bảng biến thiên:

$\varphi_3$ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15,00
Q[kN]	15,00	12,05	9,28	5,88	-1,88
M[kNm]	0	-15,5	-22,31	-27,86	-33,75



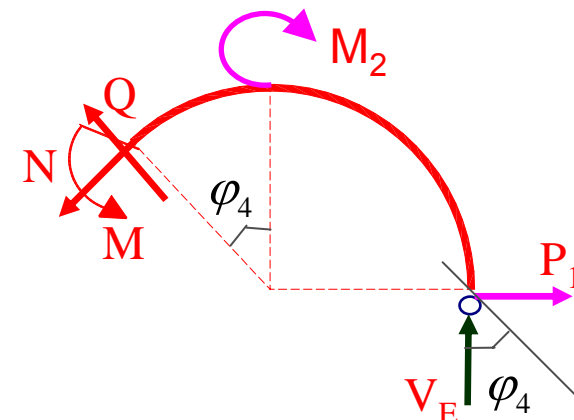
d, Xét đoạn CD:  $0 \leq \varphi_4 \leq \frac{\pi}{2}$

Ta có:

$$N = V_E \cdot \sin \varphi_4 + P_1 \cdot \cos \varphi_4 = 1,875 \cdot \sin \varphi_4 + 15 \cdot \cos \varphi_4$$

$$Q = -V_E \cdot \cos \varphi_4 + P_1 \cdot \sin \varphi_4 = -1,875 \cdot \cos \varphi_4 + 15 \cdot \sin \varphi_4$$

$$Q = 0 \Rightarrow \varphi_4 = 7,13^\circ$$





# Ví dụ 1.7 (7)

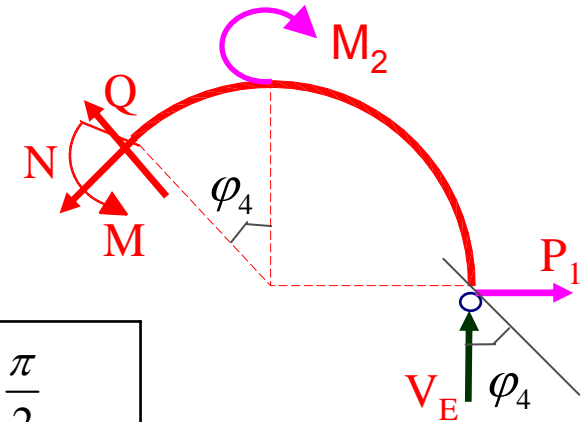
$$M = -V_E \cdot R \cdot (1 + \sin \varphi_4) + M_2 - P_1 R \cos \varphi_4$$

$$= -3,75 - 3,75 \sin \varphi_4 - 30 \cdot \cos \varphi_4 + 10$$

$$M_{\max} = M_{(\varphi_4 = 7,13^\circ)} = 24 \text{ (kNm)}$$

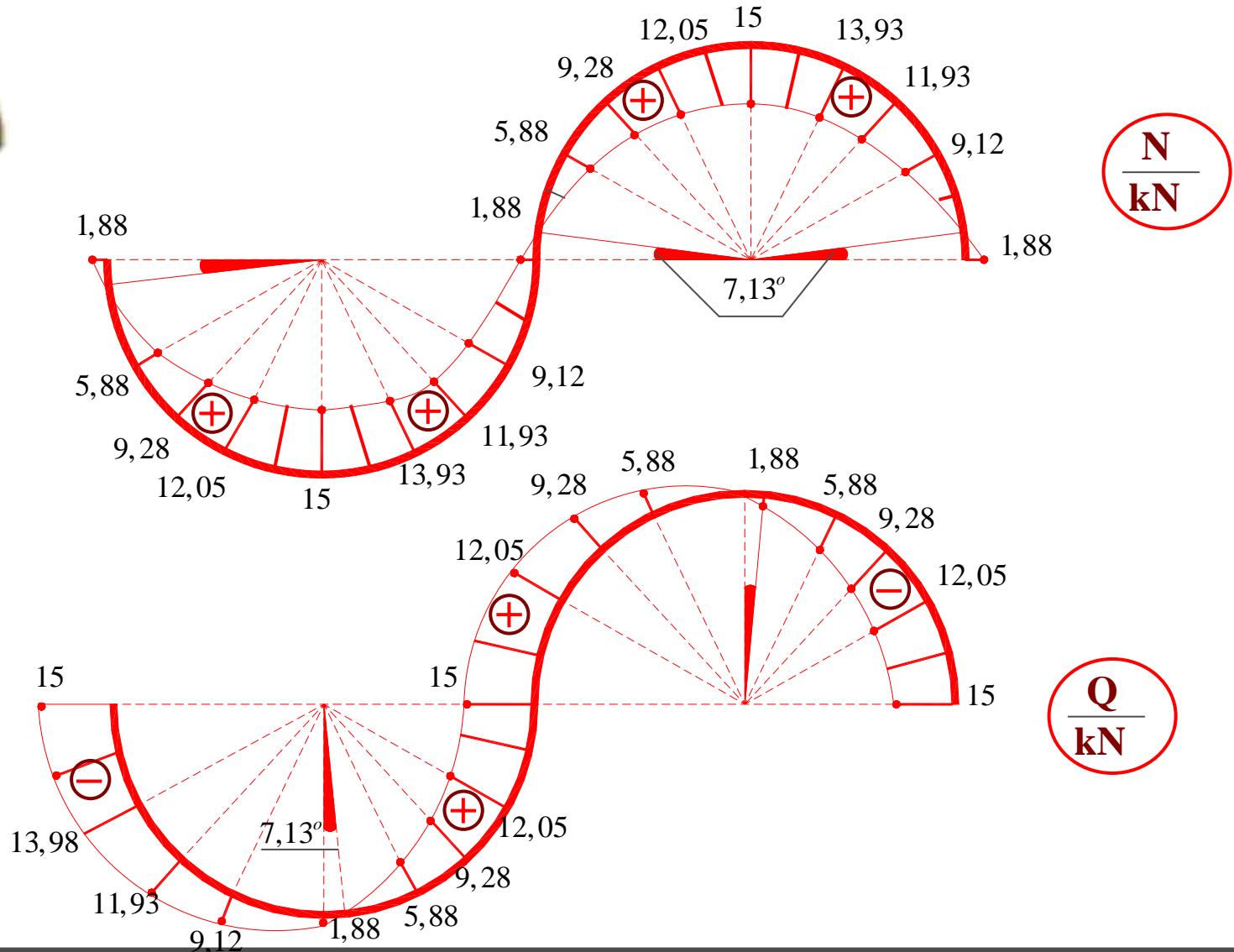
Bảng biến thiên:

$\varphi_4$ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
N [kN]	15,00	13,93	11,93	9,12	1,88
Q[kN]	-1,88	5,88	9,28	12,05	15,00
M[kNm]	-23,75	-21,61	-17,61	-12,00	2,50

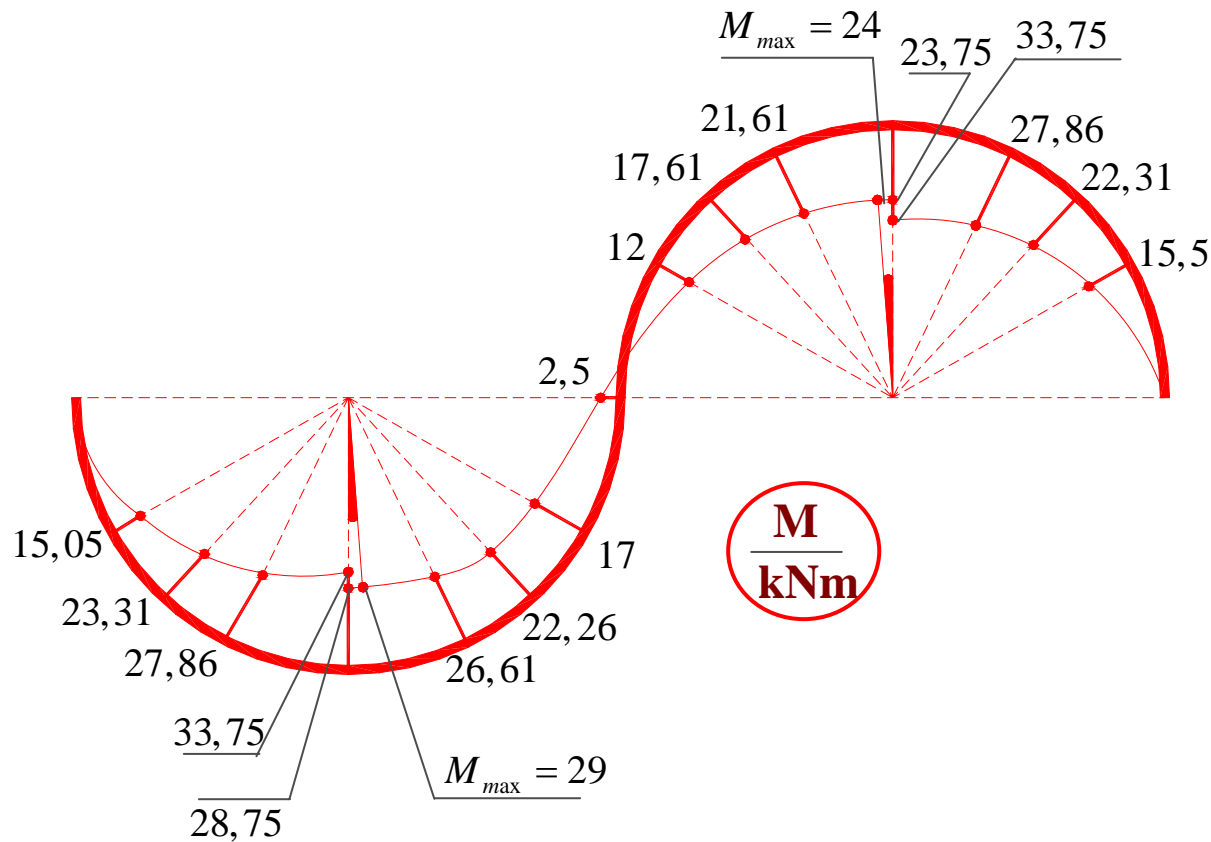


3, Biểu đồ nội lực:

# Ví dụ 1.7 (8)



# Ví dụ 1.7 (9)



## 4. Câu hỏi???





***Thank you for your attention***

E- mail:  
[tpnt2002@yahoo.com](mailto:tpnt2002@yahoo.com)