

INTRODUCCIÓN A LA ROBÓTICA

Introducción a la **robótica**

Introducción a la **robótica**

Subir Kumar Saha

Indian Institute of Technology

Revisión técnica:

Jorge Eduardo Aguirre Aguilar

Francisco Javier Sandoval Palafox

Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Campus Estado de México



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor sponsor: Pablo Roig Vázquez

Coordinadora editorial: Marcela Rocha Martínez

Editora de desarrollo: Karen Estrada Arriaga

Supervisor de producción: Zeferino García García

Diseño de portada: María Josefa Vaca García

Traducción: Dr. Thomas W. Bartenbach

INTRODUCCIÓN A LA ROBÓTICA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2010, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A

Pisos 16 y 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,

Delegación Álvaro Obregón

C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0313-8

Copyright © 2008 de la primera edición en inglés de *Introduction to robotics*, by Subir
Kumar Saha, published by Tata McGraw-Hill Education Private Limited, NOIDA, India.
ISBN: 978-0-07-066900-0

All rights reserved

1234567890

109876543210

Impreso en México

Printed in Mexico

Dedicado a
Los estudiantes de la India



Contenido

Sobre el autor x

Prefacio xii

1. Introducción 1

1.1 Historia 1

1.2 Robots 5

1.3 El uso de robots 8

Resumen 13

Ejercicios 13

Ejercicios basados en la web 13

2. Robots seriales 14

2.1 Subsistemas de robots 14

2.2 Clasificación de robots por aplicación 24

2.3 Clasificación de robots por sistema de coordenadas 24

2.4 Clasificación de robots por su sistema de potencia 29

2.5 Clasificación de robots por el método de control 29

2.6 Clasificación de robots por método de programación 30

Resumen 30

Ejercicios 31

Ejercicios basados en la web 31

3. Actuadores 32

- 3.1 Actuadores neumáticos 33
- 3.2 Actuadores hidráulicos 36
- 3.3 Actuadores eléctricos 38
- 3.4 Selección de motores 49
- Resumen 50*
- Ejercicios 51*
- Ejercicios basados en la web 51*

4. Sensores 52

- 4.1 Clasificación de sensores 52
- 4.2 Sensores internos 53
- 4.3 Sensores externos 62
- 4.4 Sistema de visión 66
- 4.5 Selección de sensores 72
- Resumen 74*
- Ejercicios 75*
- Ejercicios basados en la web 75*

5. Transformaciones 76

- 5.1 Arquitectura de robots 76
- 5.2 Posición de un cuerpo rígido 83
- 5.3 Transformación de coordenadas 92
- 5.4 Los parámetros de Denavit y Hartenberg (DH) 100
- Resumen 109*
- Ejercicios 109*
- Ejercicios basados en MATLAB 110*

6. Cinemática 112

- 6.1 Análisis de la posición directa 113
- 6.2 Análisis de la posición con cinemática inversa 121
- 6.3 Análisis de velocidad: la matriz jacobiana 130
- 6.4 Velocidades de eslabones 133
- 6.5 Computación jacobiana 134
- 6.6 Jacobiano usando el DeNOC 138
- 6.7 Singularidad 142
- 6.8 Análisis de aceleración 143
- Resumen 144*
- Ejercicios 145*
- Ejercicios basados en la web 145*

7. Estática 146

- 7.1 Balance de fuerzas y momentos 147
- 7.2 Cálculo recursivo 149
- 7.3 Pares de torsión equivalentes 151
- 7.4 El papel del jacobiano en la estática 157
- 7.5 Elipsoide de fuerza 161
 - Resumen* 162
 - Ejercicios* 162
 - Ejercicios basados en MATLAB* 162

8. Dinámica 163

- 8.1 Propiedades de inercia 164
- 8.2 Formulación de Euler-Lagrange 172
- 8.3 La formulación Newton-Euler 181
- 8.4 Algoritmo recursivo de Newton-Euler 186
- 8.5 Algoritmos dinámicos 195
 - Resumen* 203
 - Ejercicios* 203
 - Ejercicios basados en la web* 203
 - Ejercicios basados en MATLAB* 204

9. Dinámica recursiva de robots 205

- 9.1 Modelado dinámico 206
- 9.2 Expresiones analíticas 211
- 9.3 La dinámica inversa recursiva usando RIDIM 221
- 9.4 La dinámica directa recursiva y la simulación 229
 - Resumen* 236
 - Ejercicios* 236
 - Ejercicios basados en RIDIM* 236
 - Ejercicios basados en MATLAB* 237

10. Control 239

- 10.1 Técnicas de control 240
- 10.2 Sistemas lineales de segundo orden 242
- 10.3 Control retroalimentado 246
- 10.4 El desempeño de sistemas de control retroalimentados 252
- 10.5 Una articulación robótica 255
- 10.6 Controlador de articulaciones 260
- 10.7 Control de trayectoria no lineal 266
- 10.8 Representación de estado-espacio y control 270
- 10.9 Estabilidad 276
- 10.10 Controles cartesianos y de fuerza 279
 - Resumen* 281
 - Ejercicios* 282
 - Ejercicios basados en MATLAB* 282

11. Planeación de movimientos 283

- 11.1 Planeación de espacios articulares 284
- 11.2 Planeación del espacio cartesiano 290
- 11.3 Trayectorias de posición y orientación 295
- 11.4 Planeación de punto a punto 300
- 11.5 Generación de ruta continua 306

Resumen 314

Ejercicios 314

Ejercicios basados en MATLAB 315

12. Computadoras para robots 316

- 12.1 Velocidad de computación 316
- 12.2 Requerimientos de hardware 320
- 12.3 Consideraciones de control 322
- 12.4 Programación de robots 325
- 12.5 La arquitectura de hardware 334

Resumen 337

Ejercicios 337

Ejercicios basados en la web 337

<i>Apéndice A: Principios básicos matemáticos</i>	338
<i>Apéndice B: El uso de MATLAB y RIDIM</i>	346
<i>Apéndice C: Proyectos de estudiantes: Estudios de caso</i>	357
<i>Referencias</i>	365
<i>Índice analítico</i>	369



Sobre el autor

Nacido en Maldaha, Bengala Occidental (India), el profesor Subir Kumar Saha realizó la mayor parte de sus estudios escolares en Vidyasagar Vidyapith, Midnapore (también en Bengala Occidental). En 1983, completó su BE (Mech.) en el RE College (hoy NIT), en Durgapur, seguido por la maestría del IIT en Kahargpur en 1985. Obtuvo su doctorado por la McGill University de Canadá en 1991 y se afilió inmediatamente después al centro de investigación y desarrollo de la Toshiba Corporation de Japón. En 1995 regresó al IIT Madras como docente invitado, y luego se incorporó como profesor asistente en el IIT Delhi. El profesor Saha es receptor de la beca Humboldt y pasó nueve meses en la University of Stuttgart, Alemania, durante 1999-2000. También ha sido profesor invitado de varias universidades en el extranjero, entre otras: McGill University en Canadá, Monash University en Australia y la University of Verona en Italia.

Él está activamente involucrado en la docencia, investigación y desarrollo de tecnologías y estableció la sección de Delhi del SAE-IIT en 1997, así como el Laboratorio de Mecatrónica del IIT Delhi en julio de 2001. Sus actividades de investigación, consultoría y capacitación incluyen muchas empresas privadas como Asahi India, Sona Steering, Minda-Huf, SAMTEL, Colour Rubes; así como del sector público entre las que se encuentran BHEL, CEPC; además de agencias gubernamentales como DST, MIT, CWDB; todas estas empresas son una clara indicación de la confianza que tiene la industria en el compromiso del profesor Saha. A su favor tiene más de 125 publicaciones de investigación en revistas que gozan de reputación y en memorias de congresos.

Dos de sus intereses más recientes son los siguientes: 1) popularizar el concepto de la formación en ingeniería por medio de la participación en concursos de robótica. Por ejemplo, desde 2003, ha dirigido los equipos de estudiantes del IIT Delhi en su participación

en los concursos Doordarshan-Robocon. El equipo liderado por él fue campeón en 2007 y representó a la India en el concurso internacional celebrado en Hanoi, Vietnam. A fin de fortalecer ese concepto, el profesor Saha ha emprendido una serie de conferencias llamadas *Robotics [AT]?* durante su estancia en el IIT Madras entre diciembre de 2006 y diciembre de 2007. Hasta la fecha, ha pronunciado ocho conferencias en diferentes universidades e institutos. 2) A fin de popularizar los problemas de ingeniería que enfrentan las industrias rurales de la India, por ejemplo, la industria alfombrera, el profesor Saha ha formulado, entre los estudiantes de los IIT y de otras escuelas de ingeniería, los problemas técnicos rurales como problemas de investigación a fin de resolverlos mediante herramientas modernas, ya sea de software o teóricas. Este concepto ha conducido a varias publicaciones en revistas nacionales e internacionales, así como a una tesis de doctorado cuya publicación como libro especial se espera en 2009 por parte de una editorial internacional de renombre.



Prefacio

La *robótica* es un tema que atrae a muchas mentes jóvenes, lo cual se debe principalmente a la abundante representación de robots en muchas historias de ciencia ficción y en películas populares. A partir de los años sesenta, los robots se han usado sobre todo en aplicaciones industriales, particularmente en la industria automotriz para la soldadura de carrocerías. Incluso, hoy día, los usuarios más importantes de robots son los gigantes automovilísticos. Los robots también encuentran aplicaciones cada vez mayores en la cirugía médica, la industria minera y la exploración del espacio, y aun en instituciones que se preocupan del cuidado de personas de la tercera edad.

Introducción a la robótica tiene por objetivo la comprensión de los conceptos subyacentes en el diseño y construcción de un robot, y en su funcionamiento. En el mercado existe un número de libros que normalmente tienen en cuenta a investigadores que trabajan fundamentalmente en los aspectos de análisis de robots, por ejemplo, cinemática, dinámica, control, etc., o a ingenieros en activo interesados en el estudio de viabilidad del uso de robots para aplicaciones particulares, su adquisición, programación, economía, etc. En un plan de estudios de licenciatura, es importante que los estudiantes conozcan tanto los aspectos de análisis como las aplicaciones. Por lo tanto, se percibió la necesidad de un libro que cubriera ambos aspectos de manera lúcida.

La inspiración para escribir este tipo de libro, sin embargo, llegó hace casi una década (abril de 1999), cuando el profesor Gayatri Kansal, de la Indira Gandhi National Open University (IGNOU), en Nueva Delhi, me pidió algunos materiales de instrucción sobre robótica para sus estudiantes. Al mismo tiempo, no encontré ningún libro de texto sobre robótica disponible en la India a un precio accesible. Por lo tanto, sentí el impulso de escribir uno que debía tener calidad internacional, pero con precio indio. Esto no sólo ayudaría a los estudiantes

de la India a poseer un libro de robótica, sino también a los de otros de países de condiciones económicas parecidas.

A pesar de que el libro se dirige básicamente a estudiantes universitarios de las ingenierías mecánica y eléctrica y a alumnos de ciencias de la computación que se inscriben en un curso de robótica, también puede servir a las necesidades de un curso de robótica de nivel avanzado dirigido a estudiantes de maestría o doctorado que se enfoquen, por ejemplo, en cinemática, dinámica y control de robots. El material que ofrece este libro también pueden utilizarlo ingenieros activos con o sin previa experiencia en el tema de la robótica, con el propósito de adoptar, mantener o incluso diseñar un robot. De hecho, debido a los múltiples ejemplos y ejercicios que ofrece el libro, cualquiera podrá prepararse para un examen competitivo sobre robótica.

La intención de este libro es la de servir tanto a los estudiantes de licenciatura como a los de posgrado en sus cursos de robótica. La siguiente es una guía para los maestros que atienden los siguientes niveles:

Para cursos de licenciatura

En el nivel introductorio (de preferencia estudiantes del 2o. y 3er. año)

Para la disciplina mecánica, utilice los capítulos 1 a 6.

Para los estudiantes de electricidad y ciencias computacionales, utilice los capítulos 1 a 5 y 12.

En el nivel superior (de preferencia estudiantes del 3er. y 4o. año)

Para la disciplina mecánica, utilice los capítulos 2, 6 a 8 y 11.

Para los estudiantes de electricidad y ciencias computacionales, utilice los capítulos 2, 5, 6, 8, 10 y 11.

Para cursos del nivel de posgrado (estudiantes de maestría y doctorado)

Sin antecedentes de un curso de robótica

Para la disciplina mecánica, utilice los capítulos 1 a 8.

Para la disciplina eléctrica, utilice los capítulos 1 a 5, 10 y 12.

Con antecedentes de cursos del nivel licenciatura sobre robótica

Para la disciplina mecánica, utilice los capítulos 5 a 11.

Para los estudiantes de electricidad y ciencias computacionales, utilice los capítulos 5 a 8, 10 y 11.

Además, el libro es adecuado para cursos sobre mecatrónica y dinámica multicuerpo. Por ejemplo, los capítulos 3 a 6, 8 y 10 cubren aproximadamente de 75 a 80% de un curso sobre mecatrónica, mientras que los capítulos 5, 6, 8 y 9 pueden cubrir hasta 80% de un curso sobre dinámica de multicuerpos que sólo trate de los cuerpos rígidos, y aproximadamente 60% de un curso sobre dinámica de multicuerpos que trate de los cuerpos deformables.

En este libro se introducen varias características especiales que lo distinguen de cualquier otro texto contemporáneo sobre robótica:

- **Flujo natural del contenido**, es decir, los temas están organizados de tal modo que el estudiante pueda comprender el tema de manera lógica. Por ejemplo, cada vez que escuchamos sobre alguna cosa nueva, tenemos curiosidad acerca de cómo se ve o cómo funciona. Por ende, los aspectos de los diferentes robots y su clasificación se cubren en los capítulos 1 y 2. Entonces despertará el interés de conocer los componentes de un robot. Por lo tanto, se explican los actuadores y sensores en los capítulos 3 y 4. Después de conocer la estructura del robot y sus componentes, es natural sentir curiosidad sobre cómo se mueve un robot y cuáles son las fuerzas causantes. Aquí se presenta la necesidad de transformación, cinemática, estática y dinámica. Esto se cubre en los capítulos 5 a 9, respectivamente. A esto le siguen las leyes de control en el capítulo 10. Entonces el robot está listo para el uso práctico, y el usuario tiene que decidir cómo moverlo para una tarea particular. La planeación de movimiento del capítulo 11 es la que explica los movimientos del robot. Finalmente, se estudia el hardware y software que accionan al robot, lo que se explica en el capítulo 12.
- Se ofrecen **cuadros de texto** para resaltar información histórica, contemporánea y de otros intereses que podrán ayudarle al lector a complementar sus conocimientos teóricos obtenidos en los contenidos de los capítulos.
- **Ejercicios basados en la web y en MATLAB** aparecen al final de cada capítulo y ayudan al estudiante a mantenerse al tanto de lo que está pasando en la robótica alrededor del mundo y a saber cómo implementar los conceptos matemáticos para las aplicaciones reales.

La organización completa del libro es la siguiente:

Capítulo 1: Introducción Se introducen los diferentes tipos de robots con sus campos de aplicación, población, etcétera.

Capítulo 2: Robots seriales Se presentan diferentes metodologías que se usan para la clasificación de robots.

Capítulo 3: Actuadores Se explican varios tipos de actuadores, a saber: neumáticos, hidráulicos y eléctricos, y se recomienda cómo proceder a su selección.

Capítulo 4: Sensores Se explican los sensores, los componentes importantes de un sistema robótico.

Capítulo 5: Transformaciones Se definen las arquitecturas de un robot, además, se presenta la descripción matemática de la postura del robot, es decir, la posición y orientación de su efector final, junto con la definición de los parámetros de Denavit y Hartenberg (DH).

Capítulo 6: Cinemática Forma la base fundamental para el diseño y control de un robot. Se calculan ecuaciones, relacionando las coordenadas de articulaciones con las coordenadas cartesianas del efector final.

Capítulo 7: Estática Cuando los robots se mueven lentamente, es suficiente considerar las fuerzas que actúan sobre los robots, independientemente de los movimientos que las causan. Esto se llama estática.

Capítulo 8: Dinámica La dinámica es útil para el control y la representación virtual de un sistema robótico. Aquí se infieren diferentes metodologías, como las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y Newton-Euler.

Capítulo 9: Dinámica recursiva de robots* Se presenta la dinámica recursiva de robots, un conjunto de algoritmos modernos y avanzados. El asterisco (*) que hay junto al título indica que este capítulo puede saltarse en un curso de licenciatura o posgrado preliminar. Sólo deberá abordarse en el curso de posgrado avanzado dirigido a estudiantes de maestría y doctorado o por los que desean aceptar un proyecto de maestría o una investigación de doctorado en el área de la dinámica de robots.

Capítulo 10: Se cubren las leyes de control lineal, P, PD, PID, estabilidad, etcétera.

Capítulo 11: Planeación de movimientos Se analizan varios aspectos de la planeación de movimientos. Se calculan ecuaciones de planeación de trayectorias basadas en la articulación y en el espacio cartesiano.

Capítulo 12: Computadoras para robots Una vez que los algoritmos se hayan desarrollado, es importante implementarlos en el hardware electrónico. Por ende, se describen diferentes programas de robots, tales como ACL, etcétera.

Referencias Contiene la lista de libros, artículos y otras fuentes de las que se toman diferentes materiales para su uso en este libro.

Apéndice A: Principios básicos de matemáticas Se introducen muchos conceptos básicos de álgebra lineal, teoría del control y otros que le ayudarán al lector en la comprensión de las expresiones que se usan en diferentes capítulos, en particular en los capítulos 5 a 10.

Apéndice B: Uso de software de MATLAB y RIDIM Se explica cómo usar las dos aplicaciones de software, a saber: MATLAB y el software de desarrollo propio, RIDIM.

Apéndice C: Estudios de caso, proyectos de estudiantes Se explican varios estudios de caso, es decir, robots desarrollados por estudiantes para competencias de robótica, así como para proyectos de licenciatura y posgrado.

El libro cuenta con varios complementos que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para mayor información sobre este material de soporte, póngase en contacto con su representante local.

Finalmente, es mi deber agradecer a las personas sin cuyo apoyo el libro no hubiese visto la luz del día. Fue un largo viaje desde abril de 1999, pero estoy feliz de que finalmente terminó; ciertamente, fue un esfuerzo “lento pero seguro” para mí. Después del profesor Gayatri Kansal, como mencioné anteriormente, quisiera recordar a mis estudiantes de posgrado, Mahesh Sharma, Subhashis Pati, T. Gopala Rao, Tamogna Das y Naveen Sukumar, por escribir algunas partes de los capítulos y dibujar varios diagramas para este libro. Estoy agradecido con S. S. Petkar, Arvind Patle, estudiantes del MTech, y con Pankaj Marothiya y Amit, estudiantes del BTech, por generar el código C++ para el desarrollo interno del software RIDIM (Recursive Inverse Dynamics for Industrial Manipulators) que se usa para resolver muchos ejemplos de este libro y que también está disponible en la página web del mismo. Estoy en deuda con dos de mis ex estudiantes de doctorado, Dr. Prasad Bhargale y Dr. Himanshu Chaudhary, por el uso del RIDIM durante su trabajo de investigación y por atestiguar su confiabilidad. Quisiera agradecer a muchos estudiantes del IIT Delhi, particularmente a los que han participado en las competencias ROBOCON bajo mi supervisión y que han mostrado gran entusiasmo para construir los múltiples robots en funcionamiento que aparecieron en el apéndice C. Gracias también al Dr. I. N. Kar, profesor titular del de-

partamento de Ingeniería Eléctrica del IIT Delhi, por ofrecerse amablemente para la lectura del capítulo 10 sobre control y por darme sus comentarios oportunos al respecto. Agradezco en especial a Suril V. Dhah, un alumno que actualmente está estudiando su doctorado y que leyó meticulosamente los capítulos y me ayudó a preparar las soluciones a los problemas que se dan en los ejercicios de este libro. Me gustaría dar las gracias a los muchos revisores por sus valiosos comentarios que realmente han elevado la calidad de este libro.

Revisores de la India

A.K. Jha	Departamento de Ingeniería Mecánica, Instituto de Tecnología, Banaras Hindu University (BHU), Varanasi
Rajeev Gupta	Departamento de Ingeniería Mecánica, Harcourt Butler Technological Institute (HBTI), Kanpur
Shubhashis Sanyal	Departamento de Ingeniería Mecánica, Government Engineering College, Raipur
S. Natarajan	Departamento de Ingeniería Mecánica, Global Academy of Technology, Bangalore
Umesh M. Daivagna	Departamento de Ingeniería Mecánica, Sei Taralabalu Jagadguru Institute of Technology, Ranebennur, Karnataka
Arul Sanjivi	Departamento de Tecnología de Producción, Amrita Viswa Vidya Peetham Deemed University, Coimbatore
Tanmoy Mohanty	Departamento de Ingeniería Mecánica, Kalinga Institute of Industrial Technology, Bhubaneswar
D. R. K. Parhi	Departamento de Ingeniería Mecánica, National Institute of Technology, Rourkela
M. T. Puranik	Departamento de Ingeniería Mecánica, Vishwakarma Institute of Technology, Pune

Revisores internacionales

Gregory P. Starr	University of New Mexico, Albuquerque, USA
Harvey Lipkin	Georgia Institute of Technology, USA
Mark Minor	University of Utah, Salt Lake City, Utah, USA
Warren Dixon	University of Florida en Gainesville, USA

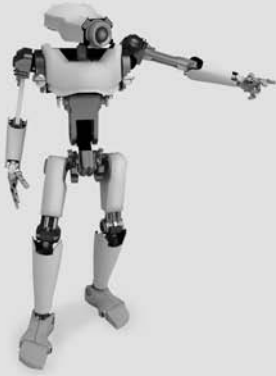
Mis agradecimientos estarían incompletos si no menciono a Tata-McGraw Hill por estar de acuerdo con la publicación de este libro, así como a sus ejecutivos, Vibha Mahajan, Shukti Mukherjee, Surabhi Shukla, Sohini Mukherjee, Baldev Raj, Anjali Razdan y muchos otros en el fondo, por su convicción y ayuda. Sin ellos, el libro no se hubiera hecho realidad. Finalmente, mi familia —mi esposa Bulu y mi hija Esha— ha estado esperando mucho tiempo por más atención de mi parte, para pasar tiempo de familia conmigo. Les agradezco su paciencia, comprensión, apoyo y cooperación.

Estoy convencido de que los lectores encontrarán este libro verdaderamente valioso en su calidad y lúcida presentación, de tal modo que podrán adquirir fácilmente los conocimientos

requeridos. Sin embargo, tratándose de la primera edición, podrá contener algunos errores y fallas tipográficas involuntarias, y les ruego a los lectores que me las señalen en forma directa (saha@mech.iitd.ac.in) o que escriban a la página web del libro cuya dirección se ha mencionado anteriormente. ¡Feliz lectura!

IIT Delhi
14 de febrero de 2008

SUBIR KUMAR SAHA



Lista de abreviaturas

ABU	Asian Broadcasting Union
AC	Corriente alterna
ADC	Convertidor de análogo a digital
AGV	Vehículo guiado automáticamente
BRA	British Robot Association
CCD	Dispositivo de carga acoplada
CID	Dispositivo de inyección de carga
CNC	Control numérico por computadora
CP	Ruta continua
CPL	Lenguaje de programación de computadoras
CPU	Unidad central de procesamiento
CSG	Geometría sólida constructiva
D	Derivativo
DAC	Convertidor de digital a análogo
DAE	Ecuaciones algebraicas diferenciales
DC	Corriente directa
DeNOC	Complemento ortogonal natural desacoplado
det.	Determinante
DH	Denavit y Hartenberg
DOF	Grados de libertad

DSP	Procesamiento digital de señales
EL	Euler-Lagrange
EMF	Fuerza electromotriz
GIM	Matriz de inercia generalizada
HaPRA	Brazo robótico planar suspendido
I	Integral
ISO	International Standad of Organization
JIRA	The Japan Industrial Robot Association
JV	Variable articular
KE	Energía cinética
LED	Diodo de Emisión luminosa
LSI	Integraciones de gran escala
LVDT	Transformador diferencial de variables lineales
MCI	Matriz de inercia convectiva
MIMO	Múltiples entradas-múltiples salidas
MOS	Semiconductor de óxido metálico
MTTF	Tiempo promedio entre fallas
MTTR	Tiempo promedio de reparación
NASA	National Aeronautic Society of America
NC	Normalmente cerrado
NE	Newton-Euler
NO	Normalmente abierto
NOC	Complemento ortogonal natural
ODE	Ecuaciones diferenciales ordinarias
P	Proporcional
PD	Proporcional derivativo
PE	Energía potencial
PI	Proporcional integral
PID	Proporcional integral derivativo
PLC	Controlador lógico programable
PM	Imán permanente
PO	Porcentaje de sobrealimentación
PR	Revoluto o Rotacional prismático
PSD	Detector sensible a la posición
PTP	Punto a punto
PUMA	Programmable Universal Manipulator for Assembly
RAM	Random Access Memory
RIA	Robotics Institute of America
RIDIM	Dinámica inversa recursiva para manipuladores industriales (Recursive Inverse Dynamics for Industrial Manipulators)
RNE	Newton-Euler recursivo
RP	Revoluta o rotacional prismática

RPL	Lenguaje de programación de robots
RUR	Rossum's Universal Robots
RVDT	Transformador diferencial de variables rotativas
SCARA	Selective Compliance Assembly Robot Arm SBED Hombro atrás/codo abajo
SBEU	Hombro atrás/codo arriba
SFED	Hombro al frente/codo abajo
SFEU	Hombro al frente/codo arriba
SISO	Entrada única/salida única
TF	Función de transferencia
WMR	Robot móvil sobre ruedas
VCI	Vector de inercia convectiva
VLSI	Integraciones a muy grande escala
5P	<i>Proper Planning Prevents Poor Performance</i> (la planeación correcta impide el desempeño defectuoso)



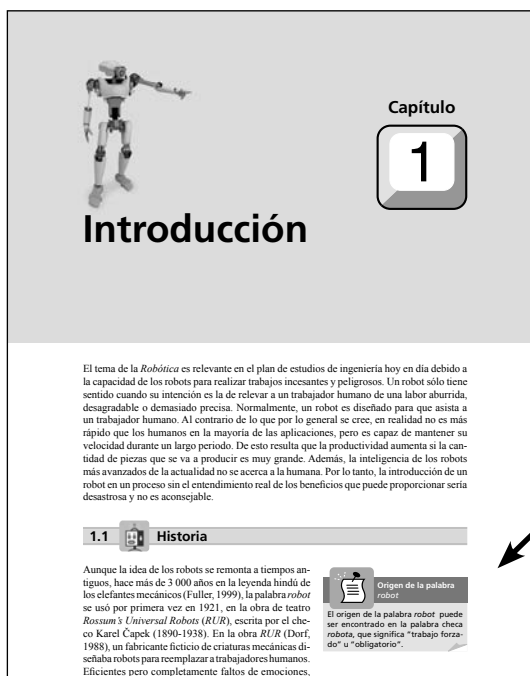
Lista de símbolos

γ	Vector n -dimensional de aceleraciones gravitacionales
Π^c	Potencia debida a la llave de torsión de restricción \mathbf{w}^c
θ	Vector n -dimensional de coordenadas generalizadas
$\dot{\theta} \quad \ddot{\theta}$	Vectores n -dimensionales de velocidades y aceleraciones, respectivamente
ρ	Función <i>spline</i>
τ	Vector n -dimensional de fuerzas generalizadas debido a fuerzas y momentos externos
τ_i	Par torsional en cada articulación
ω_e	Vector tridimensional de velocidad angular del efector final
ω_i	Vector tridimensional de velocidad angular del i -ésimo cuerpo
$\omega_i \dot{\omega}_i$	Vectores tridimensionales de velocidad angular y aceleración del eslabón i , respectivamente
\mathbf{a}_i	Vector tridimensional denotando el punto O_{i+1} de O_i
\mathbf{B}_{ij}	Matriz de propagación de torsión 6×6 desde $\#i$ hasta $\#j$
b	Coefficiente de amortiguamiento
$b_i, \theta_i, a_i, \alpha_i$	Cuatro parámetros DH
\mathbf{C}	Matriz de $n \times n$ para términos de inercia convectiva (MCI)
c	Número total de restricciones impuestas por articulaciones p
c_i	Número de restricciones impuestas por cada articulación

\mathbf{c}_i	Vector tridimensional denotando el centro de masa C_i del origen F
$\dot{\mathbf{c}}_i, \ddot{\mathbf{c}}_i$	Vectores tridimensionales de velocidad y aceleración lineales del centro de masa <i>dele</i> eslabón i , <i>respectivamente</i>
\mathbf{d}_i	Vectores tridimensionales de velocidad y aceleración lineal del centro de masa C_i desde el punto de origen O_i
e_{ss}	Error de estado estacionario
\mathbf{e}_i	Vector unitario tridimensional a lo largo del eje de la i -ésima articulación
\mathbf{f}_{ij}	Vector tridimensional de la fuerza resultante ejercida sobre el eslabón i por el eslabón j en O_i
\mathbf{g}	Vector tridimensional de aceleración debida a la gravedad
\mathbf{h}	Vector n -dimensional de términos de inercia convectiva (VCI)
\mathbf{I}	Matriz de inercia generalizada de $n \times n$ (GIM)
\mathbf{I}_i	Tensor de inercia de 3×3 del i -ésimo cuerpo o eslabón alrededor de su centro de masa, C_i
$\tilde{\mathbf{I}}_i$	Tensor de inercia de 3×3 del i -ésimo cuerpo compuesto consistente de eslabones rígidamente conectados, a $\#i$ y $\#n$
\mathbf{J}	Matriz jacobiana de 6×6 para un robot de n DOF
k	Constante de resorte
kp, kv, ki	Ganancias proporcionales, derivativas e integrales, respectivamente
L	Lagrangiano
\mathbf{M}	Matriz de masa generalizada de $6n \times 6n$
$\tilde{\mathbf{M}}$	Matriz de masa compuesta de $6n \times 6n$
\mathbf{M}_i	Matriz de masa de 6×6 para el i -ésimo cuerpo
$\tilde{\mathbf{M}}_i$	Matriz de masa de 6×6 para el i -ésimo cuerpo compuesto
$\tilde{\mathbf{M}}_w, \tilde{\mathbf{M}}_i, \tilde{\mathbf{M}}_e$	Matrices de $6n \times 6n$ que constituyen MCI
m_i	Masa del i -ésimo cuerpo
\mathbf{m}	Momento lineal
$\tilde{\mathbf{m}}$	Momento angular
\mathbf{N}	Matriz NOC de $6n \times 6n$
\mathbf{N}_d	Matriz de bloque diagonal de $6n \times 6n$ de las matrices DeNOC
\mathbf{N}_l	Matriz triangular de bloque inferior de $6n \times 6n$ de las matrices DeNOC
\mathbf{N}_u	Matriz triangular de bloque superior de $6n \times 6n$ de las matrices DeNOC
n	Grado de libertad del sistema completo
n_i	Grado de libertad relativo de cada articulación
\mathbf{n}_{ij}	Vector tridimensional del momento resultante ejercido sobre el eslabón i por el eslabón j en O_i
p	Número de pares cinemáticos o articulaciones en el sistema
\mathbf{p}	Vector de posición de un punto P . El vector de posición de cualquier otro punto se representa de forma semejante
p_i	Vector de propagación 6-dimensional de movimiento de articulación
$[\mathbf{p}]_F$	Representación del vector P en el sistema fijo F . Representación similar para otros sistemas

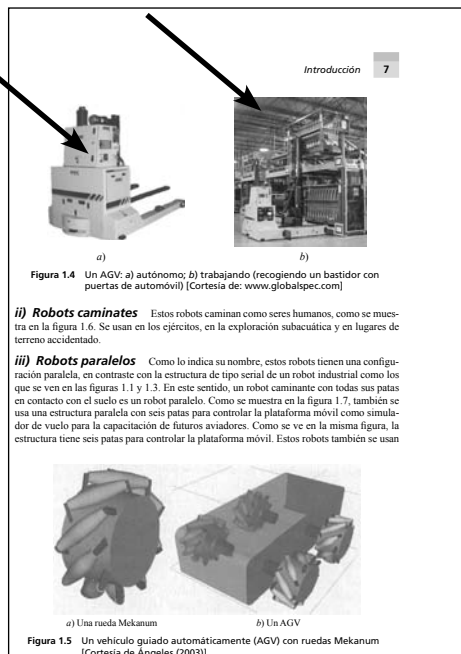
Q	Matriz de rotación de 3×3
Q_i	Matriz de rotación de 3×3 transformando el sistema i al sistema $i+1$, es decir, cualquier representación vectorial en el sistema $i+1$ se premultiplica por esta matriz para encontrar la representación en el sistema i
r	Número de cuerpos rígidos o eslabones en el sistema
r_i	Vector tridimensional del origen O_{i+1} desde el centro de masa C_i
s	Dimensión del espacio de trabajo (para planar, $s = 3$; para espacial, $s = 6$)
T	Energía cinética
T	Matriz de transformación homogénea de 4×4
T_l	Matriz DeNOC triangular de $6n \times 6n$ del bloque inferior
T_d	Matriz DeNOC diagonal de bloque de $6n \times 6n$
t	Vector $6n$ -dimensional de torsión generalizada
t_e	Vector de torsión 6-dimensional del efector final
t_i	Vector de torsión 6-dimensional de torsión asociado al i -ésimo cuerpo
ṫ_i	Vector de rapidez de torsión 6-dimensional del i -ésimo cuerpo
U	Energía potencial
W	Matriz generalizada de 6×6 de las velocidades angulares
W_i	Matriz de velocidad angular de 6×6 para el i -ésimo cuerpo
w_i	Vector 6-dimensional de llave de torsión actuando sobre el i -ésimo cuerpo compuesto
w	Vectores 6-dimensionales de llave de torsión generalizada
w^E, w^C	Vectores 6-dimensionales de llaves de torsión externas y de restricción, respectivamente
w̃_i^E	Vector 6-dimensional de llave de torsión externa para el i -ésimo cuerpo compuesto
x, y, z	Vectores unitarios a lo largo de los ejes X , Y y Z , respectivamente. Notaciones similares para otros vectores unitarios
1	Matriz identidad de dimensión compatible
O	Matriz de dimensión compatible en donde todos sus elementos son ceros
0	Vector de dimensión compatible en donde todos sus elementos son ceros
[•]^T	Transpuesta del argumento [•]

DEMOSTRACIÓN PASO A PASO



Los cuadros de texto en cada capítulo proporcionan hechos históricos e información relacionada con el tema para complementar el conocimiento obtenido a través del texto del libro.

Las fotos de robots en la práctica y sus aplicaciones reales ofrecen un entendimiento y utilidad verdadera del tema que cubre este libro.



seguridad varían de un país a otro y son esenciales para asegurar que toda instalación cumpla con la legislación local. La seguridad se refiere principalmente a mantener al personal fuera del alcance de trabajo del robot y sirve para asegurar que los movimientos puedan detenerse fácilmente en caso de una emergencia. Para este fin, los robots tienen cadenas de seguridad dual o cadenas de marcha integradas. Estos son dos circuitos paralelos que detendrán el movimiento del robot cuando sean interrumpidos. También se prevén conexiones externas, incluidos los paros de emergencia. Asimismo, cabe mencionar que casi todos los robots tienen frenos de disco operados eléctricamente en cada eje, y activados sólo si se aplica la energía para soltarlos. Por lo tanto, en caso de un corte del suministro eléctrico o si el paro de emergencia es aplicado, el robot se detiene en seco, en una fracción de segundo, en su posición. No sufre un colapso y retiene sus datos posicionales y de programa.

RESUMEN

En este capítulo se presentan los robots, su historia, definiciones, categorías, aplicaciones y poblaciones. También se exponen las leyes de robótica y cuándo deben usarse los robots.



EJERCICIOS

- 1.1 ¿Qué es un robot?
- 1.2 ¿Cuáles son los tipos de robots?
- 1.3 Mencione algunas aplicaciones típicas de un robot industrial.
- 1.4 ¿Cuáles son las diferencias entre un robot y una máquina-herramienta CNC?
- 1.5 ¿Cómo debe decidirse sobre el uso de un robot para un determinado trabajo?
- 1.6 ¿Qué son las cuatro D de la robótica?
- 1.7 ¿Qué es R.U.R.?
- 1.8 ¿Cuáles son las leyes de la robótica?
- 1.9 Añote las diferencias entre robots seriales y paralelos.
- 1.10 ¿Cuáles son los problemas de seguridad en el uso de robots?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

Basándose en búsquedas en la web, conteste las siguientes preguntas:

- 1.11 Busque nombres de diferentes fabricantes de robots.
- 1.12 ¿Cómo se especifica un robot industrial?
- 1.13 ¿Cuál es la población de robots en el mundo?
- 1.14 ¿Qué industria es considerada el usuario más grande de robots industriales de tipo serial?
- 1.15 ¿Cuáles son las áreas nuevas de aplicaciones de robots?

Los **resúmenes** al final de cada capítulo dan una visión general del tema que se ha explicado.

Los **ejercicios basados en la web** mantienen a los lectores al corriente de los últimos desarrollos en este campo.

La **selección de componentes (motores en este ejemplo)** y los cálculos necesarios, ofrecen al estudiante un planteamiento práctico del tema y proporcionan información útil al ingeniero en planta para las aplicaciones de productos reales.

3.4 Selección de motores

Para cualquier aplicación de robots tiene que decidirse cuál de los actuadores disponibles es el más adecuado. Tiene que tomarse en consideración precisión de posicionamiento, confiabilidad, velocidad de operación y costo, así como otros factores.

Los motores eléctricos son por naturaleza limpios y con capacidad para trabajar con alta precisión si son operados correctamente. En contraste, los sistemas neumáticos no son capaces de operar una trayectoria continua de alta precisión, y los actuadores hidráulicos requieren del uso de aceite a presión. Los sistemas hidráulicos pueden generar mayor potencia en un volumen compacto que en los motores eléctricos. El aceite a presión puede conducirse por tuberías hacia actuadores sencillos, capaces de generar pares de torsión con altos valores y operaciones rápidas. También hay que tomar en cuenta que la potencia necesaria para controlar una válvula electrohidráulica es pequeña. Básicamente, este trabajo se realiza mediante la compresión del aceite y suministrarlo a los accionamientos del brazo del robot. Toda la energía puede ser suministrada por un solo motor eléctrico poderoso y eficiente que acciona la bomba hidráulica que está en la base del robot o ubicada en alguna distancia. La potencia es controlada en válvulas electrohidráulicas compactas. Sin embargo, las válvulas electrohidráulicas de alta precisión son más costosas y menos confiables que los amplificadores y controladores electrónicos de baja potencia. Por otra parte, los motores eléctricos deben tener controles individuales capaces de controlar su potencia. En robots de mayores dimensiones, esto requiere la conmutación de 10 a 50 amperios con 20 a 100 voltios. La conmutación de la corriente tiene que ser rápida; de lo contrario, habrá una gran disipación de potencia en el circuito de conmutación que causará un exceso de calor. Los motores eléctricos pequeños usan circuitos de conmutación sencillos y son fáciles de controlar por medio de los circuitos de baja potencia. Los motores a pasos son particularmente sencillos para la operación de un lazo abierto. La ventaja más grande de un sistema hidráulico es la seguridad de su operación.

Como regla general, se prefieren actuadores hidráulicos donde se requieren movimientos rápidos con altos pares de torsión, en rangos de potencia que estén aproximadamente en el orden de los 3.5 kW, a menos que no pueda tolerarse la ligera posibilidad de una fuga de aceite. Los motores eléctricos son preferidos para niveles de potencia que estén por debajo de 1.5 kW aproximadamente, a menos que haya un peligro debido al posible incendio de materiales explosivos. En rangos entre 1-5 kW, podrá determinar la decisión la disponibilidad de un robot en un sistema de coordenadas particular con características específicas o por un costo más bajo. La confiabilidad de todo tipo de robots manufacturados por fabricantes reconocidos industrialmente es suficientemente buena. No obstante esto no es el factor más determinante.

3.4.1 Cálculos

Se necesitan cálculos matemáticos simples para determinar el par torsor, velocidad y características de potencia de un actuador o motor para diferentes aplicaciones. El par torsor se define en términos de una fuerza multiplicada por distancia o momento. Una fuerza f , a la distancia a del centro de rotación, tiene un momento o par torsor τ , o sea $\tau = fa$. En términos

```

th21=atan2(s21,c21); th22=atan2(s22,c22);
th23=pi-th21; th24=pi-th22;

%Angles in degree
r2d=180/pi;
th11d=th11*r2d, th12d=th12*r2d, th13d=th13*r2d, th21d=th21*r2d, th22d=th22*r2d, th23d =
th23*r2d,
th24d = th24*r2d, th31d=th31*r2d, th32d=th32*r2d

```

6.2.3 Una muñeca

Considere la muñeca de la figura 6.9, cuyas relaciones cinemáticas pueden darse mediante la ecuación (6.12). Se buscan las variables de las articulaciones θ_1 , θ_2 y θ_3 , correspondientes a una orientación del efector final \mathbf{Q} con la siguiente forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

donde q_{ij} para $i, j = 1, \dots, 3$ son los elementos de la matriz de bloque \mathbf{Q} de la matriz de transformación homogénea \mathbf{T} , ecuación (6.12). Entonces es posible computar las soluciones de los ángulos de las articulaciones directamente como

$$\theta_1 = a \tan 2(q_{23}, q_{13}) \quad (6.30a)$$

$$\theta_2 = a \tan 2\left(\sqrt{q_{13}^2 + q_{23}^2}, q_{33}\right) \quad (6.30b)$$

$$\theta_3 = a \tan 2(-q_{32}, q_{31}) \quad (6.30c)$$

para θ_2 entre 0 y π . Observe que si se permite que cada articulación gire 360° , existen dos posibles soluciones para los últimos tres desplazamientos de las articulaciones. En efecto, ya que las ecuaciones (6.30a-c) involucran la función de arcotangente, el ángulo θ_1 podrá tener dos valores que se encuentran a 180° . Las dos configuraciones que corresponden a las dos soluciones se ilustran en la figura 6.9.

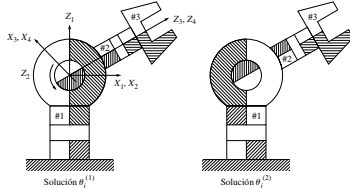


Figura 6.9 Múltiples configuraciones de la muñeca

Los conceptos complejos, como las rotaciones, se explican con diagramas detallados y expresiones matemáticas.

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49b)$$

La resultante transformación de coordenadas entre los sistemas conectados con los cuerpos $i-1$ e i , es decir, \mathbf{T}_i , se obtiene ahora mediante la posmultiplicación de las cuatro transformaciones elementales de arriba, como se hace en la ecuación (5.31d), es decir,

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\alpha \mathbf{T}_a \mathbf{T}_\alpha \quad (5.50a)$$

La expresión \mathbf{T}_i también puede leerse como matriz de transformación del sistema adjunto al cuerpo i , es decir, sistema $i+1$, como se representa en el sistema incorporado al cuerpo $i-1$, es decir, sistema i . Por medio de sustitución de las expresiones de matriz de las ecuaciones (5.49 a-d) a la ecuación (5.50a), se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50b)$$

Ejemplo 5.24 Obtenga la ecuación (5.50b) por medio de MATLAB

Para obtener la ecuación (5.50b), las operaciones simbólicas tienen que ejecutarse en MATLAB. Para este fin, se usan los siguientes comandos:

```

>syms bi thi ai ali;
>tbn=[1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
>tthm=[cos(thi),-sin(thi),0,0;sin(thi),cos(thi),0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
>tam=[1,0,0,ai;0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
>talm=[1,0,0,0;0,cos(ali),-sin(ali),0;0,sin(ali),cos(ali),0;0,0,0,1];
>tim=tbn*tthm*tam*talm
tim =
[ cos(thi), -sin(thi)*cos(ali), sin(thi)*sin(ali), cos(thi)*ai]
[ sin(thi), cos(thi)*cos(ali), -cos(thi)*sin(ali), sin(thi)*ai]
[ 0, sin(ali), cos(ali), bi]
[ 0, 0, 0, 1]

```

donde el comando "syms" se usa para definir las variables simbólicas "bi", "thi", "ai" y "ali" para los parámetros DH b , θ , a y α , respectivamente. Además, se usan las notaciones "tbn", "tthm", "tam" y "talm" para representar las matrices \mathbf{T}_θ , \mathbf{T}_α , \mathbf{T}_a y \mathbf{T}_α , dadas por las ecuaciones (5.49a-d), respectivamente. Finalmente, la resultante matriz \mathbf{T}_i denotada como "tim" en el ambiente de MATLAB, se evalúa arriba, lo que coincide con la ecuación (5.50b).

Los ejemplos de la programación MATLAB ayudan al estudiante a resolver problemas complejos con facilidad.

esfera unitaria de n dimensiones en el espacio torsional de la articulación se traza sobre un cilindro de 6 dimensiones en el espacio de fuerza del efector final. De este modo, la ventaja mecánica del manipulador se torna infinitamente grande en alguna dirección.

RESUMEN

En este capítulo se derivan los pares de torsión que se requieren para ejercer una fuerza y un momento por el efector final mientras el robot está en equilibrio estático. Se demuestra cómo el jacobiano de velocidad entra en consideración en el análisis estático. Finalmente, se da una interpretación física de la matriz Jacobiana en el dominio de la fuerza.



EJERCICIOS

- 7.1 ¿Qué es un equilibrio estático en la robótica?
- 7.2 ¿Cómo se relacionan las matrices de propagación de torsión y de llave de torsión?
- 7.3 Define el desplazamiento y el trabajo virtuales.
- 7.4 ¿Cómo entra en consideración la matriz del jacobiano de velocidad en el análisis estático?
- 7.5 ¿Qué le pasaría a las fuerzas del efector final si se aplicaran pares de torsión de articulación mientras el jacobiano asociado fuese singular?
- 7.6 Extraiga la matriz jacobiana para el brazo planar rotacional-prismático (RP) del ejemplo 7.2.
- 7.7 Busque la expresión de la matriz Jacobiana arriba mencionada en el sistema fijo.
- 7.8 ¿Por qué es importante el concepto de elipsoide de fuerza en el estudio de la estática?
- 7.9 ¿Qué pasa si uno de los ejes principales del elipsoide de fuerza desaparece?
- 7.10 Derive las expresiones del par de torsión y fuerza para el brazo planar prismático-rotacional (PR) que se presenta en la figura 5.26 si se aplica la fuerza \mathbf{f} del efector final y no se consideran los pesos de eslabones.



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 7.11 Verifique los resultados del ejercicio 7.7 usando un programa MATLAB.
- 7.12 Verifique los resultados del ejercicio 7.10.
- 7.13 Busque las expresiones de par torsional para el robot SCARA que se presenta en la figura 5.28.
- 7.14 Averigüe los pares torsionales para el brazo antropomórfico del ejemplo 7.6, mientras $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y $\theta_3 = \pi/2$.
- 7.15 ¿Cuáles son los valores del par torsional para la muñeca esférica que se muestra en la figura 5.30 si se aplica solamente un momento \mathbf{n}_1 en su efector final?

Los ejercicios basados en **MATLAB** aumentan las destrezas para la solución de problemas.

El software de desarrollo propio no sólo permite que el lector obtenga resultados para problemas complejos, sino también ofrece la posibilidad de escribir nuevos programas basados en los ya existentes.

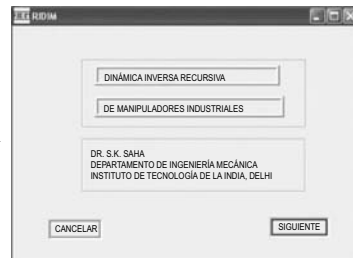


Figura 9.5 Interfaz de MS-Windows de RIDIM

- separación articular, ángulo articular, longitud de eslabón y ángulo de torsión, respectivamente.
2. Historial de tiempo del parámetro DH variable, es decir, θ_i para un par rotacional y b_i para una articulación prismática, así como su primera y segunda derivada en el tiempo, es decir, $\dot{\theta}_i$, $\ddot{\theta}_i$, \dot{b}_i y \ddot{b}_i , respectivamente.
3. Masa de cada cuerpo m_i .
4. Vector que denota la distancia de la $(i+1)$ ésima articulación del i ésimo centro de masa C_i en el $(i+1)$ ésimo sistema de referencia, es decir, $[\mathbf{r}_{i+1}]_i$.
5. Tensor de inercia del i ésimo eslabón alrededor de su centro de masa C_i en el $(i+1)$ ésimo sistema $[\mathbf{I}_{i+1}]_i$.

Observe que RIDIM tiene las siguientes características:

- Puede manejar manipuladores con pares o articulaciones tanto rotacionales o revolutas como prismáticas:
- Toma en cuenta la gravedad, pues considera la aceleración negativa debido a la gravedad denotada por g al primer cuerpo #1, como se muestra en la ecuación (9.32).

Ejemplo 9.3 Dinámica inversa de un manipulador planar de tres DOF

En la figura 9.6 se presenta el manipulador de tres eslabones en estudio, cuyos parámetros DH e inerciales se muestran en la tabla 9.2. Se supone que el manipulador se mueve en el plano X - Y , donde la gravedad está trabajando en la dirección negativa Y . Suponga que i y j son los dos vectores unitarios paralelos a los ejes X y Y , respectivamente,

Tabla A.1 Evaluación de la función "Atan2"

x	$\text{Atan2}(y, x)$
+ve	$\text{Atan}(z)$
0	$\text{Sgn}(y)\pi/2$
-ve	$\text{Atan}(z) + \text{Sgn}(y)\pi$

la tabla $\text{Atan2}(-1, 1) = \pi/4$ y $\text{Atan2}(1, -1) = 3\pi/4$, mientras que $\text{Atan}(-1)$ devuelve $-\pi/4$ en ambos casos.

A.2 Vectores

Mientras no se señale algo diferente, los vectores serán definidos como vectores de columna y denotados con letras minúsculas en negritas. Por ende, un vector \mathbf{a} n -dimensional se define como

$$\mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde a_1, \dots, a_n son los elementos del vector \mathbf{a} . El vector \mathbf{a} también puede representarse como

$$\mathbf{a} \equiv [a_1, \dots, a_n]^T \quad (\text{A.3})$$

donde el superíndice T denota transposición. La magnitud, longitud o norma del vector \mathbf{a} , denotada con letras itálicas, se determina por

$$a \equiv \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \quad (\text{A.4})$$

A.2.1 Vectores unitarios

Un vector unitario se define como un vector con magnitud igual a 1. Por tanto, el vector unitario a lo largo del vector \mathbf{a} , denotado con $\hat{\mathbf{a}}$, puede definirse como

$$\hat{\mathbf{a}} \equiv \frac{\mathbf{a}}{a} \quad (\text{A.5})$$

donde a se determina por la ecuación (A.4). Por ende, la magnitud del vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$ es $\hat{a} = 1$. Ahora, si \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} denotan los vectores unitarios a lo largo de los ejes X , Y y Z , respectivamente, del sistema de coordenadas como se presenta en la figura A.1, cualquier vector cartesiano tridimensional que se muestra en la figura A.1, por decir, $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^T$, puede expresarse como

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (\text{A.6})$$

en la que los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} tienen las siguientes representaciones:

$$\mathbf{i} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Los principios básicos matemáticos repasan rápidamente los fundamentos matemáticos necesarios para los temas cubiertos en el libro, sin la necesidad de consultar inmediatamente otras fuentes.

Los robots construidos por estudiantes le dan a los lectores la confianza para crear sus propios robots que, ciertamente, aumentarán sus conocimientos acerca de estos temas.



Figura C.2 Robot automático de 2007



Figura C.3 Robot manual de 2007

mecanismo de un paralelogramo de cuatro barras para el robot manual de la figura C.3. Este último puede extenderse casi medio metro enfrente del robot para poder colocar el bloque dentro de la línea de límite del polígono de 10 lados. Una vez terminado el diseño, el siguiente nivel de desafío es su fabricación, ensamble, programación y funcionamiento exitoso.

Según la experiencia del autor, normalmente deberán revisarse los siguientes aspectos para completar este tipo de proyecto con éxito:

1. Una planeación correcta, tomando en cuenta las 5 P (Proper Planning Prevents Poor Performance —la planeación correcta impide el desempeño defectuoso—).
2. Cada estudiante debe llevar una bitácora de proyecto para registrar actividades diarias, esbozos, informaciones, etc.
3. Seguimiento estricto de un diagrama de Gantt bien planeado. Un típico diagrama Gantt se presenta en la figura C.4. En caso de que no pueda cumplirse con las fechas límite, deberán averiguarse las causas y deben tomarse medidas sin redefinición del diagrama de Gantt. De hecho, el calendario actual podrá colocarse debajo del calendario planeado.
4. Es de extrema importancia que los estudiantes aprendan cómo trabajar en grupo. En particular, los coordinadores de diferentes tareas, por ejemplo, mecánico, eléctrico, fabricación, etc., deberán saber cómo distribuir el trabajo entre otros miembros de sus grupos. De lo contrario, ellos terminarán haciendo la mayor parte de los trabajos mientras que otros no tendrán trabajo. Este último grupo podrá frustrarse e incluso abandonar el proyecto.



Capítulo

1

Introducción

El tema de la *Robótica* es relevante en el plan de estudios de ingeniería hoy en día debido a la capacidad de los robots para realizar trabajos incesantes y peligrosos. Un robot sólo tiene sentido cuando su intención es la de relevar a un trabajador humano de una labor aburrida, desagradable o demasiado precisa. Normalmente, un robot es diseñado para que asista a un trabajador humano. Al contrario de lo que por lo general se cree, en realidad no es más rápido que los humanos en la mayoría de las aplicaciones, pero es capaz de mantener su velocidad durante un largo periodo. De esto resulta que la productividad aumenta si la cantidad de piezas que se va a producir es muy grande. Además, la inteligencia de los robots más avanzados de la actualidad no se acerca a la humana. Por lo tanto, la introducción de un robot en un proceso sin el entendimiento real de los beneficios que puede proporcionar sería desastrosa y no es aconsejable.

1.1



Historia

Aunque la idea de los robots se remonta a tiempos antiguos, hace más de 3 000 años en la leyenda hindú de los elefantes mecánicos (Fuller, 1999), la palabra *robot* se usó por primera vez en 1921, en la obra de teatro *Rossum's Universal Robots (RUR)*, escrita por el checo Karel Čapek (1890-1938). En la obra *RUR* (Dorf, 1988), un fabricante ficticio de criaturas mecánicas diseñaba robots para reemplazar a trabajadores humanos. Eficientes pero completamente faltos de emociones,



Origen de la palabra *robot*

El origen de la palabra *robot* puede ser encontrado en la palabra checa *robota*, que significa "trabajo forzado" u "obligatorio".

se pensaba al principio que estos robots eran mejores que las personas, puesto que hacían lo que se les ordenaba sin preguntar. Al final, los robots se volvieron contra sus amos. Acabaron con la raza humana, salvo un solo hombre para que pudiera seguir produciendo más robots. Desgraciadamente, la fórmula se había perdido en la destrucción causada por los robots.

Este sentimiento de odio hacia los robots parece existir hasta hoy. El miedo de que vayan a apoderarse del trabajo de las personas ha dado como resultado el retraso en el desarrollo en esta área. Sin embargo, Isaac Asimov, en sus historias de ciencia ficción de los años cuarenta, se imaginaba al robot como ayudante de la humanidad y postulaba tres reglas básicas para robots. Por lo general, éstas se conocen como las leyes de la robótica.

Las leyes de la robótica

1. Un robot no debe dañar a un ser humano ni, por su inacción, dejar que un ser humano sufra daño.
2. Un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto si éstas entran en conflicto con la primera ley.
3. Un robot debe proteger su propia existencia, a menos que ésta entre en conflicto con las dos primeras leyes.

Más tarde, Fuller (1999) introdujo una cuarta ley que dice:

4. Un robot podrá tomar el trabajo de un ser humano, pero no debe dejar a esta persona sin empleo.



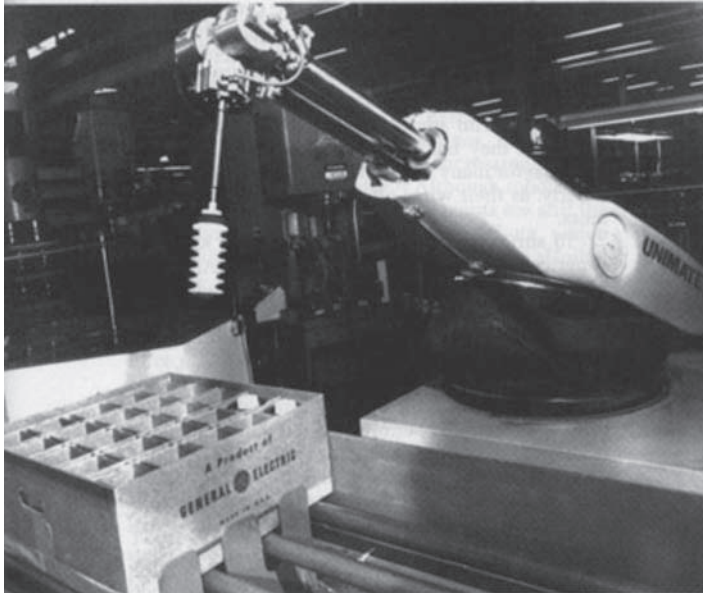
El porqué del nombre UNIMATION

La palabra UNIMATION es la contracción de los términos UNiversal y auTOMATION, debido a la creencia de que el robot es una herramienta universal que puede usarse para muchos tipos de tareas.

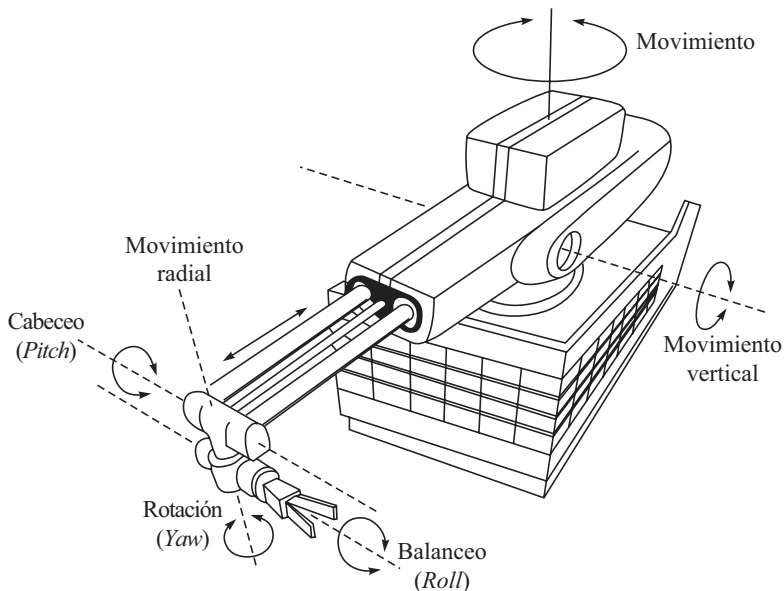
Existen intentos de apegarse a estas leyes de la robótica, pero no hay modos automáticos para su implementación. Por ejemplo, lo más probable es que el robot militar, por su propia naturaleza, se haya diseñado con la intención de romper estas reglas. La mayoría de los robots industriales de la actualidad están diseñados para trabajar en ambientes que son peligrosos y muy difíciles para trabajadores humanos. Por ejemplo, la mano de un robot puede diseñarse para la manipulación de un objeto muy caliente o muy frío, que la

mano humana no podría manipular de manera segura. Inspirado por los libros de Asimov sobre robots, Joseph H. Engelberger intentó diseñar un robot trabajador en la década de los cincuenta. Junto con George C. Devol, fundó la empresa UNIMATION Robotics Company en 1958. Sin embargo, el primer robot de esta compañía fue instalado hasta 1961, en la compañía automotriz de General Motors en Nueva Jersey, Estados Unidos. Se trataba de un molde automatizado de fundición para dados (o matrices) que arrojaban manijas de puertas al rojo vivo, así como otras partes de autos dentro de tanques con refrigerante en una línea que las transportaba hacia los trabajadores para su recorte y pulido. Su característica más interesante era una tenaza sobre una armadura de acero que eliminaba la necesidad de que un operario tocara piezas de acero fundido de autos recién fabricados. Este robot tenía 5 grados de libertad (*Degrees of freedom*: DOF), pero había algunas aplicaciones donde se requerían 6 DOF. La figura 1.1 muestra un robot Unimate con 6 DOF.

Desde entonces, la robótica ha evolucionado en un sinnúmero de aplicaciones, desde su uso en soldadura, pintura, ensamble, carga y descarga de herramientas de máquinas,



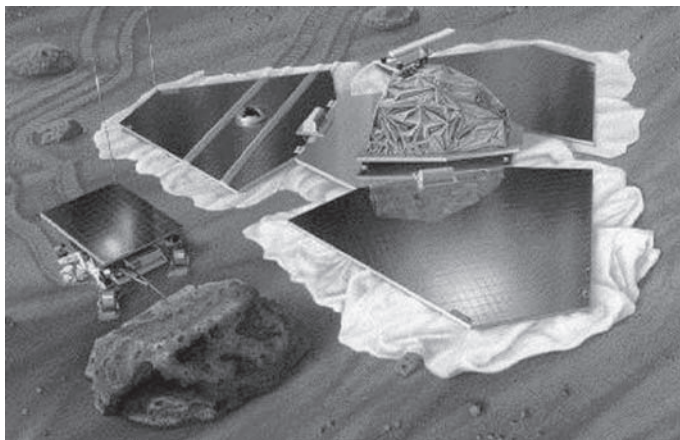
a) Fotografía de un robot Unimate [Cortesía de <http://www.robthalloffame.org/unimate.html>]
Armado para el servicio. Un manipulador Unimate —en realidad sólo un brazo— levanta y coloca piezas en una planta de General Electric.



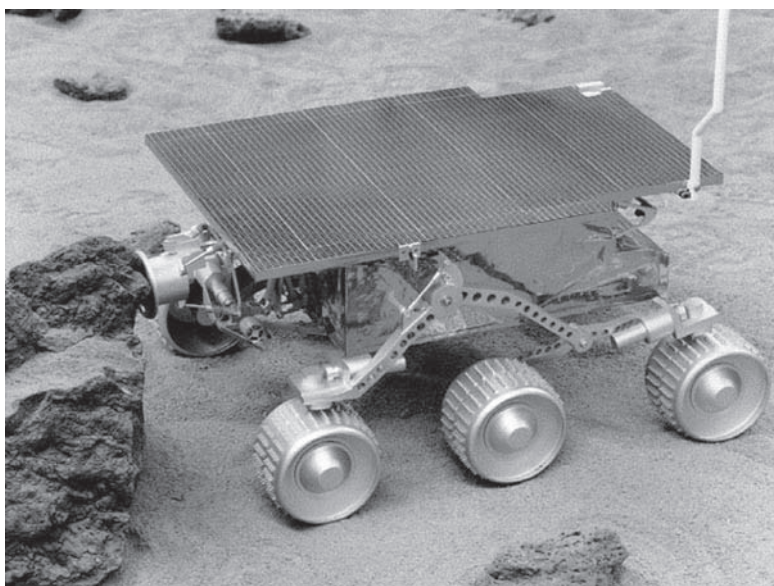
b) Bosquejo de un robot Unimate [Cortesía de Critchlow (1985)]

Figura 1.1 Robot Unimate

inspección, agricultura, enfermería, cirugía médica, usos militares y seguridad hasta las exploraciones subacuáticas y del espacio. La mayoría de estos robots se siguen usando en la soldadura (aprox. 25%) y en el montaje (aprox. 33%). Los últimos en la serie son el *Pathfinder Lander* y el *microrover Sojourner*, que aterrizó en Marte el 4 de julio de 1997. Éstos fueron desarrollados por la *National Aeronautic Society of America* (NASA) de Estados Unidos. Las figuras 1.2 a) y b), respectivamente, muestran el *Mars Pathfinder Lander* y el *microrover Sojourner*.



a) *Pathfinder Lander* con el *microrover* a bordo afuera.



b) *Microrover Sojourner*

Figura 1.2 Sistemas robóticos para la exploración de Marte
[Cortesía: <http://mpfwww.jpl.nasa.gov>]

1.2



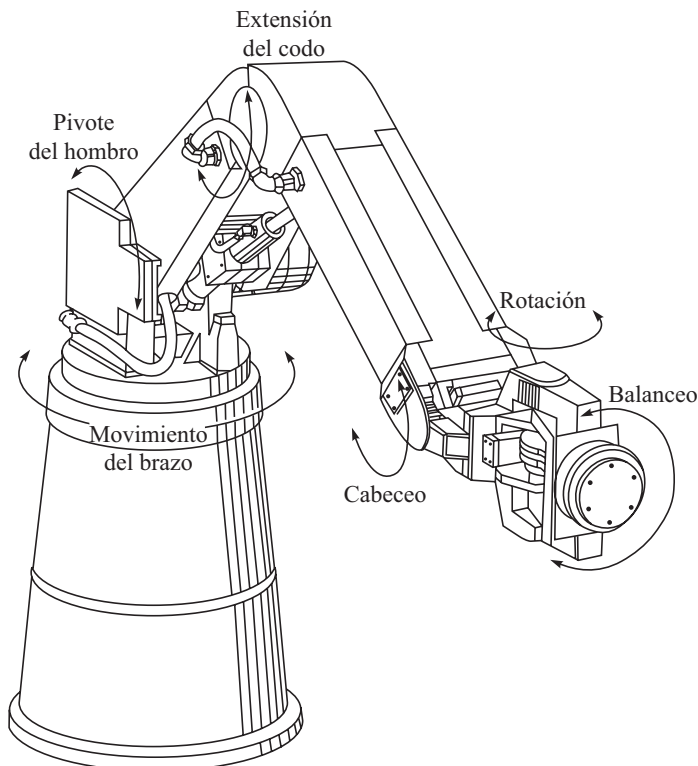
Robots

El robot se define, de manera formal en la Organización Internacional para la Estandarización (ISO), como un manipulador *multifuncional reprogramable*, capaz de mover materiales, piezas, herramientas o dispositivos especiales, a través de movimientos variables programados, para el desempeño de tareas diversas. Existen otras definiciones dadas por otras asociaciones, como por ejemplo, el Robotics Institute of America (RIA), la Japan Industrial Robot Association (JIRA), la British Robot Association (BRA) y otras. Todas ellas coinciden en dos puntos: la capacidad de reprogramación y la multifuncionalidad de los robots.

En términos generales, los robots son clasificados como *industriales*, *no industriales* o para *usos especiales*. Un típico robot industrial fabricado por la compañía Cincinnati Milacron de Estados Unidos se muestra en la figura 1.3a) y un robot indio apropiado para aplicaciones industria-

**Máquinas-herramienta con control numérico computarizado (CNC) vs. Robots**

Las máquinas-herramienta con control numérico computarizado (CNC) se distinguen de los robots porque éstos tienen capacidades de reprogramación y multifuncionalidad.



a) Cincinnati Milacron (T3) [Cortesía: Koivo (1989)]



b) Robot *pick and place* de Systemantics India

Figura 1.3 Robots industriales

les ligeras se puede ver en la figura 1.3b). Estrictamente hablando, un robot es un manipulador controlado por una computadora. En el estudio de la robótica, sin embargo, siempre se supone que un manipulador como el que se muestra en la figura 1.3 es controlado por computadora. Por lo tanto, puede ser considerado un robot. El objetivo de los robots industriales es el de servir a un propósito universal y de mano de obra no calificada o semicalificada, por ejemplo, para soldar, pintar, realizar mecanizados, etc. Por otro lado, un robot de uso especial es el que se emplea en ambientes distintos del entorno normal de una fábrica. Por ejemplo, un robot de serie montado sobre una nave espacial para la recuperación de un satélite defectuoso o para volver a colocarlo después de la reparación puede ser considerado un robot de uso especial. El *rover Sojourner* de la figura 1.2b) también puede calificarse como robot de uso especializado. Otros robots de uso especial se clasifican como sigue:



¿Es AGV lo mismo que WMR?

Un vehículo guiado automáticamente (AGV) es un tipo de robot móvil que tiene ruedas para su locomoción. Por lo tanto, también se llama robot móvil con ruedas (WMR). Resulta entonces que un AGV es lo mismo que un WMR.

i) Vehículos guiados automáticamente (AGV)

Son sistemas robóticos móviles que se usan comúnmente para el manejo de materiales en fábricas. Las figuras 1.4a) y b), respectivamente, muestran un AGV de este tipo y su aplicación en el manejo de materiales. Por lo general, estos AGV siguen una trayectoria que está señalada en el piso de la nave. También existen AGV autónomos que no necesitan una trayectoria cableada. Asimismo, hay características adicionales, por ejemplo, la capacidad

de movimiento omnidireccional, como se muestra en la figura 1.5. Las ruedas omnidireccionales o Mecanum de la figura 1.5a), a diferencia de las ruedas convencionales de dos grados de libertad (DOF) que se usan en automóviles y otros AGV, proporcionan tres DOF; es decir, estos AGV también pueden moverse lateralmente. Los AGV se usan asimismo en hospitales en enfermería, en vigilancia y otras aplicaciones.



AGV vs. robots caminante

Un robot caminante es otro tipo de robot móvil, en el cual se usan patas en lugar de ruedas para la locomoción como es el caso de los AGV. Por lo tanto, un robot caminante es distinto de un AGV o WMR.

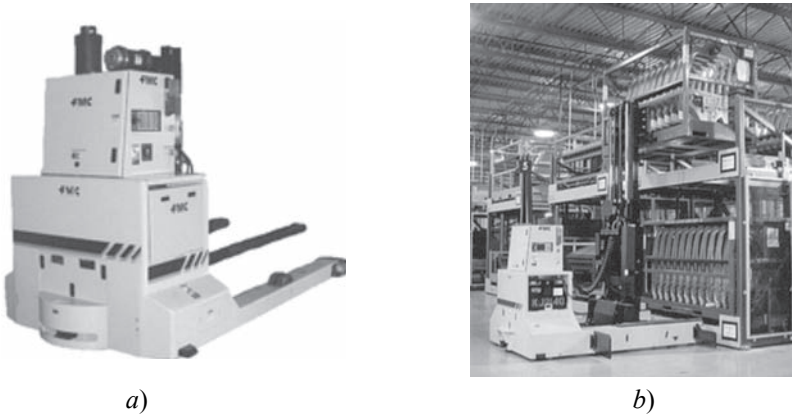


Figura 1.4 Un AGV: a) autónomo; b) trabajando (recogiendo un bastidor con puertas de automóvil) [Cortesía de: www.globalspec.com]

ii) Robots caminates Estos robots caminan como seres humanos, como se muestra en la figura 1.6. Se usan en los ejércitos, en la exploración subacuática y en lugares de terreno accidentado.

iii) Robots paralelos Como lo indica su nombre, estos robots tienen una configuración paralela, en contraste con la estructura de tipo serial de un robot industrial como los que se ven en las figuras 1.1 y 1.3. En este sentido, un robot caminante con todas sus patas en contacto con el suelo es un robot paralelo. Como se muestra en la figura 1.7, también se usa una estructura paralela con seis patas para controlar la plataforma móvil como simulador de vuelo para la capacitación de futuros aviadores. Como se ve en la misma figura, la estructura tiene seis patas para controlar la plataforma móvil. Estos robots también se usan

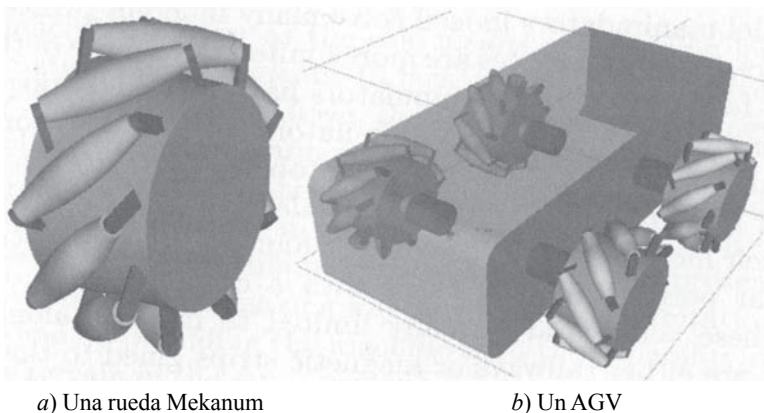


Figura 1.5 Un vehículo guiado automáticamente (AGV) con ruedas Mecanum [Cortesía de Ángeles (2003)]

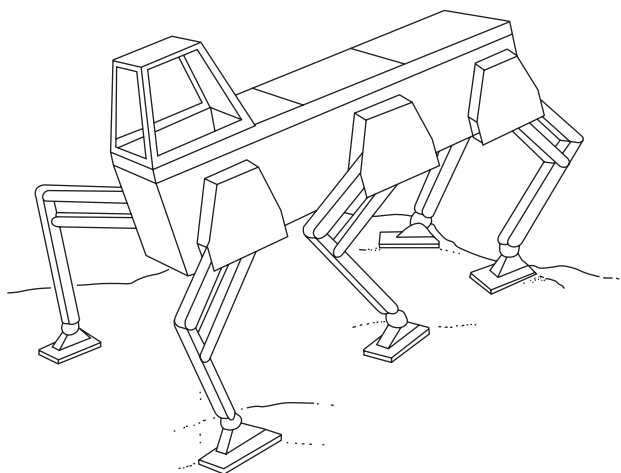


Figura 1.6 El robot caminante de la Universidad Estatal de Ohio, un hexápodo [Cortesía de Todd (1985)]

como máquina-herramientas y como robots médicos para reducir el temblor de la mano del cirujano durante una operación, etc. La figura 1.8 muestra el uso de un robot paralelo de una máquina fresadora.

En este libro sólo se analizarán los robots industriales de tipo serial, como los que se ven en las figuras 1.1 y 1.3. Sin embargo, las herramientas usadas o desarrolladas aquí pueden extenderse para analizar otros robots, como AGV, paralelos y similares.

1.3



El uso de robots

Los robots de cualquier tipo, industrial o no industrial, no son tan rápidos ni tan eficientes como las máquinas automatizadas de uso especial. Sin embargo, estos robots pueden fácilmente reentrenarse o reprogramarse para realizar un sinnúmero de tareas, mientras que una máquina automatizada de uso o propósito especial, incluso una máquina CNC, sólo puede



Figura 1.7 Robot paralelo para un simulador de vuelo [Cortesía de biostavart.tripod.com]



Figura 1.8 Robot paralelo que funciona como fresadora [Cortesía de: <http://biotsavart.tripod.com/hexapod.htm#HISTORY>]

realizar una serie de labores muy limitada. Es el grado de reprogramabilidad lo que distingue un robot de una máquina-herramienta de CNC. Sin embargo, no hay ninguna línea de demarcación internacionalmente reconocida. Queda la pregunta, pues, sobre cuándo debe considerarse que un determinado trabajo ha de ser ejecutado por una persona, un robot o una máquina especial. La respuesta a esta pregunta no es sencilla. Algunas normas generales pueden servir para proponer factores significativos que deben tenerse presentes.

Reglas generales para la decisión sobre el uso de un robot

1. La primera regla por considerar se refiere a lo que se conoce como *Las cuatro D de la robótica* (*Four Ds of Robotics*), es decir, si la tarea es sucia (*Dirty*), aburrida (*Dull*), peligrosa (*Dangerous*) o difícil (*Difficult*). De tener una de estas características, un ser humano probablemente no será capaz de ejecutar la tarea en forma eficiente. Por lo tanto, es un trabajo apropiado para que se le automatice o para que lo realice un robot.
2. La segunda regla es que un robot no debe dejar a un ser humano sin trabajo o desempleado. La robótica y la automatización deben servir para hacer nuestra vida más placentera, no más desagradable.
3. La tercera regla implica cuestionarse si es posible o no encontrar personas dispuestas a realizar el trabajo. De no ser así, dicho trabajo es candidato para la automatización o la robótica. Ciertamente, esto debería ser un motivo primordial para el crecimiento de la automatización y de la robótica.
4. La cuarta regla general es que el uso de robots o de automatización debe tener beneficios económicos a corto y largo plazos.

Así, como punto de partida general, consideraremos lo siguiente: una tarea que tiene que realizarse una sola vez o unas cuantas veces y que no es peligrosa es mejor que la efectúe un ser humano. Después de todo, él es la más flexible de todas las máquinas. En cambio, será mejor que una tarea que tenga que ser hecha cientos o cientos de miles de veces sea ejecutada por una máquina automatizada flexible, como un robot industrial. Y una tarea que debe realizarse un millón de veces o más, probablemente sea mejor que se efectúe mediante la construcción de una máquina altamente automatizada de uso especial.

1.3.1 Aplicaciones

En todo el mundo, los robots se usan más extensiva y ampliamente en la industria automotriz. En los últimos tiempos, sin embargo, además de este sector, una fuerte demanda de la industria de componentes electrónicos, de la industria de equipos de comunicación y de la de computadoras están reforzando el incremento de la participación en el mercado. La figura 1.9 muestra la distribución estimada de aplicaciones de robots en diferentes sectores en los años 2004 y 2005.

1.3.2 Población

La figura 1.10 muestra la población estimada de robots industriales en diferentes continentes, mientras que la tabla 1.1 presenta la distribución de robots por países y los pronósticos para el futuro. Las aplicaciones de otros robots pueden verse en la figura 1.11.

1.3.3 Economía

Los robots industriales son cada vez más y más económicos, lo que se refleja en los precios para robots industriales usados. Tome en cuenta que un ABB IRB 6000, que está valorado en aproximadamente 7 000 dólares costaba más de 157 515 dólares cuando era nuevo, en 1993. Un robot equivalente nuevo costará entre 52 505 dólares y 105 dólares, dependiendo

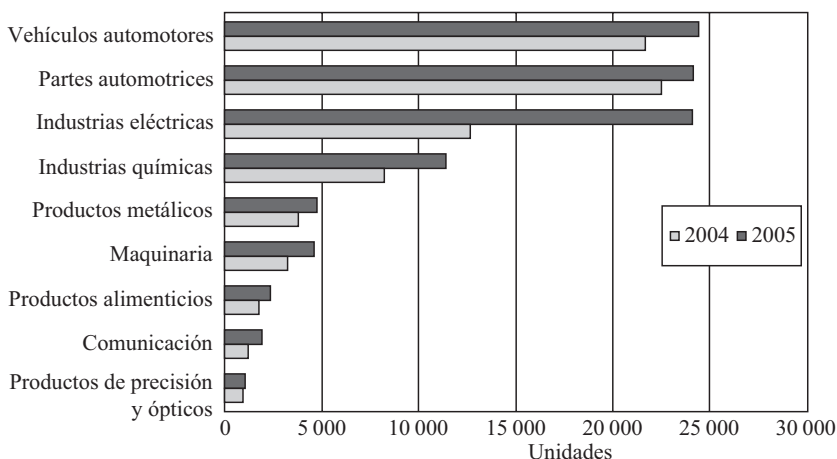


Figura 1.9 Uso de robots industriales durante 2004-2005
[Fuente: <http://www.ifr.org/statistics/keyData2005.htm>]

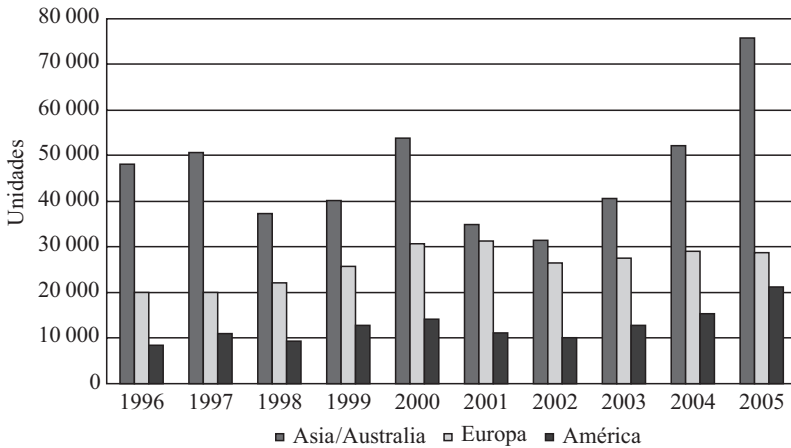



Figura 1.10 Poblaciones estimadas de robots industriales
[Cortesía de <http://www.ifr.org/statistics/keyData2005.htm>]

del fabricante y de las especificaciones. Los precios para robots se están volviendo tan económicos que en algunos países uno nuevo es incluso más económico que el trabajador más barato.

1.3.4 Seguridad

Los robots industriales pueden ser peligrosos. Son dispositivos extraordinariamente potentes, especialmente aquellos modelos que tienen gran capacidad y alcance. Esto significa que la seguridad es de suma importancia, tanto en la instalación como durante la producción. Los reglamentos de



¿Constituyen los robots una amenaza para el empleo?

Las estadísticas muestran que los usuarios más grandes del mundo no son los que tienen la tasa más alta de desempleo. Por ende, puede considerarse que los robots no son una amenaza directa al empleo.

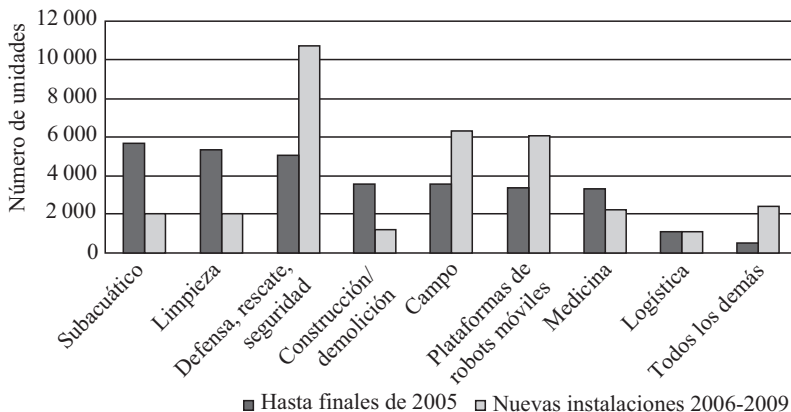


Figura 1.11 Aplicaciones de otros robots y su pronóstico
[Cortesía de <http://www.ifr.org/statistics/keyData2005.htm>]

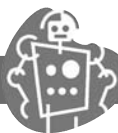
Tabla 1.1 Existencias estimadas de robots industriales durante 2004-2005 y pronóstico para 2006-2009

<i>País</i>	<i>Instalaciones anuales</i>				<i>Existencias operacionales al final del año</i>			
	<i>2004</i>	<i>2005</i>	<i>2006</i>	<i>2009</i>	<i>2004</i>	<i>2005</i>	<i>2006</i>	<i>2009</i>
América	15 400	21 555	17 200	20 100	126 961	143 203	153 500	182 500
Brasil	208	320			2 352	2 672		
Norteamérica (Canadá, México, USA)	15 170	21 136	16 500	19 100	123 663	139 553	149 400	176 000
Resto de América	22	99			946	978		
Asia/Australia	52 311	76 047	65 000	76 000	443 193	481 664	502 000	583 000
China	3 493	4 461			7 096	11 557		
India	369	450			619	1 069		
Indonesia	74	193			121	314		
Japón	37 086	50 501	40 000	46 000	356 483	373 481	372 000	388 500
Malasia	250	243			1 452	1 695		
Filipinas	65	80			93	173		
República de Corea (todos los tipos industriales)	5 457	13 005			51 302	61 576		
Singapur	244	424			5 443	5 463		
Taiwán provincia de China	3 680	4 096			11 881	15 464		
Tailandia	757	1 458			1 014	2 472		
Vietnam	14	99			14	113		
Resto de Asia	170	124			3 505	3 349		
Australia								
Nueva Zelanda	652	913			4 170	4 938		
Europa	29 409	28 863	28 200	33 800	279 019	297 374	307 700	345 400
Austria	545	485			3 907	4 148		
Benelux	536	1 097			8 749	9 362		
Dinamarca	296	354			2 342	2 661		
Finlandia	401	556			3 712	4 159		
Francia	3 009	3 275	3 000	3 700	28 133	30 434	32 200	37 900
Alemania	13 401	10 506	10 700	13 000	120 544	126 725	132 300	142 700
Italia	5 679	5 425	5 100	6 200	53 244	56 198	58 900	66 400
Noruega	61	115			724	811		
Portugal	211	144			1 488	1 542		
España	2 826	2 649			21 893	24 081		
Suecia	833	939			7 341	8 028		
Suiza	310	442			3 539	3 732		
Turquía	24	207			196	403		
Reino Unido	785	1 363	800	1 200	14 176	14 948	14 700	14 300
Países de Europa Central/Oriental	419	1 149			8 372	9 337		
Resto de Europa	73	157			659	805		
África	87	204	220	250	430	634	900	1 600
Total	97 207	126 669	110 60	130 150	849 603	922 875	964 100	1 112 500

seguridad varían de un país a otro y son esenciales para asegurar que toda instalación cumpla con la legislación local. La seguridad se refiere principalmente a mantener al personal fuera del alcance de trabajo del robot y sirve para asegurar que los movimientos puedan detenerse fácilmente en caso de una emergencia. Para este fin, los robots tienen cadenas de seguridad dual o cadenas de marcha integradas. Éstos son dos circuitos paralelos que detendrán el movimiento del robot cuando sean interrumpidos. También se prevén conexiones externas, incluidos los paros de emergencia. Asimismo, cabe mencionar que casi todos los robots tienen frenos de disco operados eléctricamente en cada eje, y activados sólo si se aplica la energía para soltarlos. Por lo tanto, en caso de un corte del suministro eléctrico o si el paro de emergencia es aplicado, el robot se detiene en seco, en una fracción de segundo, en su posición. No sufre un colapso y retiene sus datos posicionales y de programa.

RESUMEN

En este capítulo se presentan los robots, su historia, definiciones, categorías, aplicaciones y poblaciones. También se exponen las leyes de robótica y cuándo deben usarse los robots.



EJERCICIOS

- 1.1 ¿Qué es un robot?
- 1.2 ¿Cuáles son los tipos de robots?
- 1.3 Mencione algunas aplicaciones típicas de un robot industrial.
- 1.4 ¿Cuáles son las diferencias entre un robot y una máquina-herramienta CNC?
- 1.5 ¿Cómo debe decidirse sobre el uso de un robot para un determinado trabajo?
- 1.6 ¿Qué son las cuatro D de la robótica?
- 1.7 ¿Qué es R.U.R.?
- 1.8 ¿Cuáles son las leyes de la robótica?
- 1.9 Anote las diferencias entre robots seriales y paralelos.
- 1.10 ¿Cuáles son los problemas de seguridad en el uso de robots?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

Basándose en búsquedas en la web, conteste las siguientes preguntas:

- 1.11 Busque nombres de diferentes fabricantes de robots.
- 1.12 ¿Cómo se especifica un robot industrial?
- 1.13 ¿Cuál es la población de robots en el mundo?
- 1.14 ¿Qué industria es considerada el usuario más grande de robots industriales de tipo serial?
- 1.15 ¿Cuáles son las áreas nuevas de aplicaciones de robots?



Capítulo

2

Robots seriales

Normalmente, un robot industrial es serial por naturaleza, tal como se muestra en las figuras 1.1 y 1.3, por lo que a éstos se les conoce como robots seriales. Cualquier robot, serial o de otro tipo, consiste en varios subsistemas, por ejemplo, subsistema de movimiento, subsistema de reconocimiento, etc. Éstos se explican en la sección 2.1. Las especificaciones de uno de estos robots seriales, el Cincinnati Milacron de la figura 1.3, se muestra en la tabla 2.1. Según ésta, la aplicación del robot (fila 2 de la tabla) es para el manejo de materiales; es decir, el robot es el más apropiado para este propósito. Por lo tanto, este robot puede clasificarse como un robot de manejo de materiales. Ahora considere el espacio de operación del brazo (filas 6-9 de la tabla). Donde se muestran el alcance y la ubicación en la que el brazo puede moverse, lo que define una forma geométrica, esto quiere decir que otra manera de clasificar especificaciones de un robot se basa en su volumen geométrico de trabajo, o bien en la configuración del brazo o en su sistema de coordenadas. De manera similar, existen otros tipos de clasificación, basadas en los diferentes aspectos de un robot, lo que se explica en la sección 2.2.



¿Volumen de trabajo o espacio de trabajo?

Estos términos significan lo mismo: los puntos más lejanos que puede alcanzar el efector final de un robot.

2.1



Subsistemas de robots

Como se ilustra en la figura 2.1, un sistema robótico consiste por lo general en tres subsistemas: subsistema de movimiento, subsistema de reconocimiento y subsistema de control. Sus funciones se describen a continuación.

Tabla 2.1 Una especificación de robot típica (Fig. 1.1) [Cortesía de: Cugy y Page (1984)]

<i>Fabricante Modelo</i>	<i>Cincinnati Milacron T3-595</i>	<i>País de origen: Aplicaciones principales:</i>	<i>Estados Unidos Manejo de materiales</i>
<i>Configuración (cinemática): Capacidad de carga máxima:</i>	<i>Polar 204 kg</i>	<i>Repetibilidad: Precisión:</i>	<i>N/D ± 2.00 mm</i>
<i>Brazo</i>	<i>Espacio operativo</i>	<i>Muñeca</i>	<i>Espacio operativo</i>
<i>Eje 1 Eje 2 Eje 3</i>	<i>240° 90° 120°</i>	<i>Eje 4 Eje 5 Eje 6</i>	<i>- 180° 270°</i>
<i>Sistema de potencia: eléctrico, 380 V 50 Hz, 27 kVA, pistón hidráulico Alcance horizontal máximo: 2 590 mm; posición de montaje: piso</i>	<i>635 mm/s 635 mm/s 635 mm/s</i>		<i>635 mm/s 635 mm/s</i>
<i>Sistema de control</i>	<i>CIP 3200</i>	<i>Canal de control:</i>	<i>casete</i>
<i>Tipo de memoria:</i>	<i>Minicomputadora</i>	<i>Método de teach-in</i>	<i>Caja de teach-in</i>
<i>Tamaño de memoria estándar:</i>	<i>RAM 64 K máx. 1 750 puntos</i>	<i>Modo de operación: Lenguaje utilizado para el programa del controlador: Diagnóstico:</i>	<i>punto a punto diálogo directo (inglés) integrado como estándar</i>
<i>Número de programa: Sensores:</i>	<i>N/D disponibles</i>		
<i>Peso total del robot: 2 300 kg</i>			

N/D: Datos no disponibles.

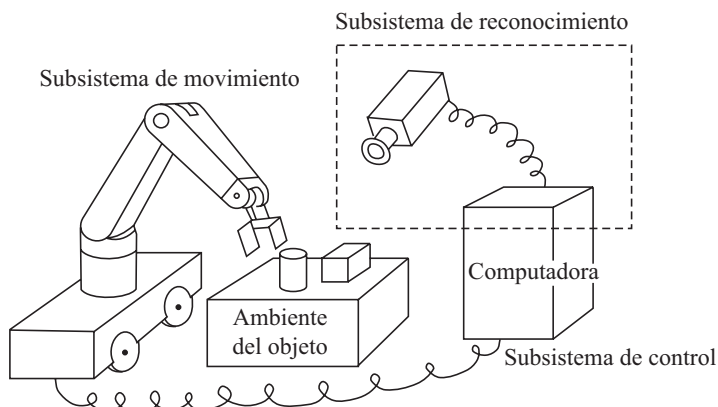


Figura 2.1 Subsistemas de robots y sus interacciones
[Cortesía de: Yoshikawa (1990)]

i) Subsistema de movimiento El subsistema de movimiento es la estructura física del robot que realiza un movimiento deseado parecido al de los brazos humanos, tal como se ilustra en la figura 2.2.

ii) Subsistema de reconocimiento El subsistema de reconocimiento utiliza diferentes sensores para recabar información sobre el propio robot, sobre cualquier objeto que va a ser manipulado y sobre el ambiente de trabajo. Basándose en los datos de los sensores, este subsistema reconoce el estado del robot, el de los objetos y el del ambiente de trabajo.

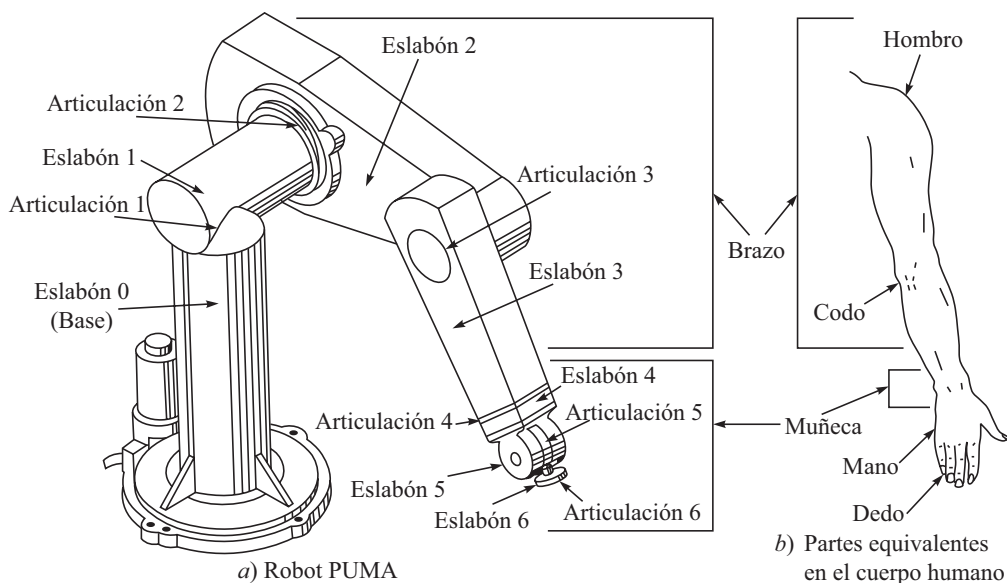


Figura 2.2 Manipulador robótico y sus partes equivalentes en el cuerpo humano

iii) Subsistema de control El subsistema de control regula el movimiento del robot con el fin de lograr una determinada tarea, usando la información proporcionada por el subsistema de reconocimiento.

Puede ser útil señalar aquí que una persona con una formación en ingeniería mecánica trabaja normalmente en el área del subsistema de movimiento, mientras que personas con conocimientos en ciencias de la computación e ingeniería eléctrica se enfocan en los subsistemas de reconocimiento y control, respectivamente. Esto se debe a las asignaturas de sus planes de estudios. La robótica, sin embargo, es un campo interdisciplinario, y el conocimiento detallado de las tres disciplinas sin duda ayudará en el diseño y desarrollo de un mejor sistema robótico. Así resulta que no es raro ver cómo las personas rebasan sus límites de especialización. Se ve con frecuencia que un especialista en ingeniería mecánica trabaja en el área de inteligencia artificial (subsistema de reconocimiento), mientras que alguien con formación en ingeniería eléctrica o ciencias de la computación se ocupa de la simulación dinámica y del diseño de robots (subsistema de movimiento).



¿Por qué la robótica es interdisciplinaria?

Porque requiere conocimientos en ingeniería mecánica, ingeniería eléctrica, ciencias de la computación y tecnologías de la información.

2.1.1 El subsistema de movimiento



¿Robot o manipulador?

En este libro, ambas palabras se usan muchas veces en forma indistinta. Sin embargo, como se explica en este capítulo, el manipulador es la estructura mecánica del robot.

Los elementos del subsistema de movimiento son los siguientes:

i) Manipulador Se trata de la estructura física, la parte que se está moviendo. Ésta incluye eslabones (también llamados “cuerpos”) y articulaciones (que también se denominan “pares cinemáticos”), normalmente conectadas en serie, como es el caso de los robots que se muestran en las figuras 1.1 y 1.3, y del

robot PUMA de la figura 2.2a). Los eslabones están hechos de acero o de aluminio. También pueden usarse otros materiales, dependiendo de los requerimientos. Las articulaciones son por lo general del tipo “rotatorio” o de “traslación”. En el estudio de la robótica y de los mecanismos, a estas articulaciones se les conoce respectivamente como “revolutas” y “prismáticas”, tal como se muestra en las figuras 5.1 y 5.2 del capítulo 5. Un ejemplo de una articulación revoluta es la bisagra de una puerta; una articulación prismática es el arreglo pistón/cilindro del motor de combustión interna que se utiliza en automóviles.

A semejanza del conjunto que forman el brazo, la muñeca y la mano del ser humano, tal como se muestra en la figura 2.2b), el manipulador del robot también tiene tres partes. Las primeras dos, el brazo y la muñeca, pueden verse en las figuras 2.2a) y b), respectivamente, mientras que la tercera parte, la mano, se muestra en la figura 2.3a) y b). La función de un brazo es la de colocar un objeto en una determinada ubicación en el espacio cartesiano tridimensional, donde es orientado por la muñeca. Para un robot típico



¿Qué es PUMA?

PUMA significa *Programmable Universal Manipulator for Assembly* (Manipulador universal programable para el ensamble).

de seis grados de libertad, como se muestra en las figuras 1.1 y 1.3 o 2.2a), los primeros tres eslabones y articulaciones forman el “brazo” y las últimas tres articulaciones de intersección mutua conforman la “muñeca”.

ii) Efector final Ésta es la parte instalada en el extremo del manipulador. Es equivalente a la mano humana. Un efector final podría ser una mano mecánica que manipula un objeto o que lo sostiene antes de que sea movido por el brazo del robot. En las figuras 2.3a) y b) se muestran dos manos típicas. La figura 2.3a) presenta un sujetador sencillo de dos dedos

para sujetar objetos sencillos, mientras que una mano de dedos múltiples, como la de la figura 2.3b), puede ejecutar tareas más complejas. Otros sujetadores más sencillos operados en forma neumática pueden verse en la figura 2.4. También se consideran como efectores finales algunas herramientas especializadas, como un electrodo de soldadura, un soplete oxiacetilénico, una brocha de pintura o una muela abrasiva montada en el extremo de un brazo manipulador para la ejecución de tareas específicas.

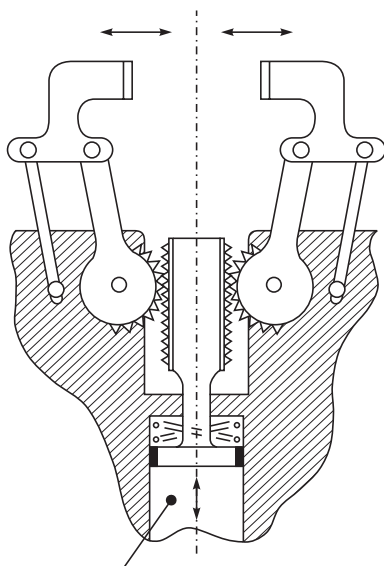


¿Efector final o mano?

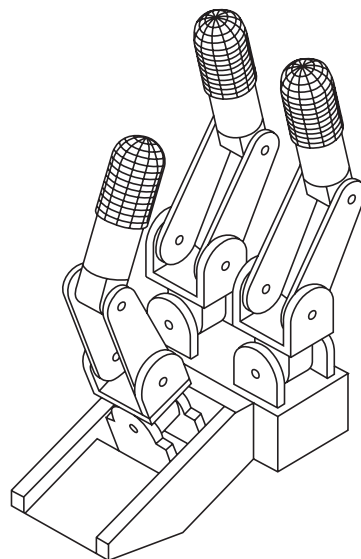
Una mano mecánica (figura 2.3) es un tipo de efector final que se usa en robots. Efector *final* es un término mucho más genérico para lo que se encuentre montado en el extremo de un manipulador de robot. Otros ejemplos de efectores finales son una pistola para soldar, una brocha para pintar, etcétera.

iii) Actuador Los actuadores de un robot proporcionan el movimiento para el manipulador y para

el efector final. Se clasifican como neumáticos, hidráulicos o eléctricos, según su principio de operación, lo cual se explica en el capítulo 3. Observe aquí que un motor, por ejemplo un motor eléctrico de CD o CA, que se acopla a los elementos móviles de transmisión, es decir,



Pistón con cremallera (alternativamente puede usarse un motor eléctrico con un tornillo sinfin)



a) Sujetador simple [cortesía de Mair (1988)] b) Mano de tres dedos [cortesía de Ángeles (2003)]

Figura 2.3 Manos de robot

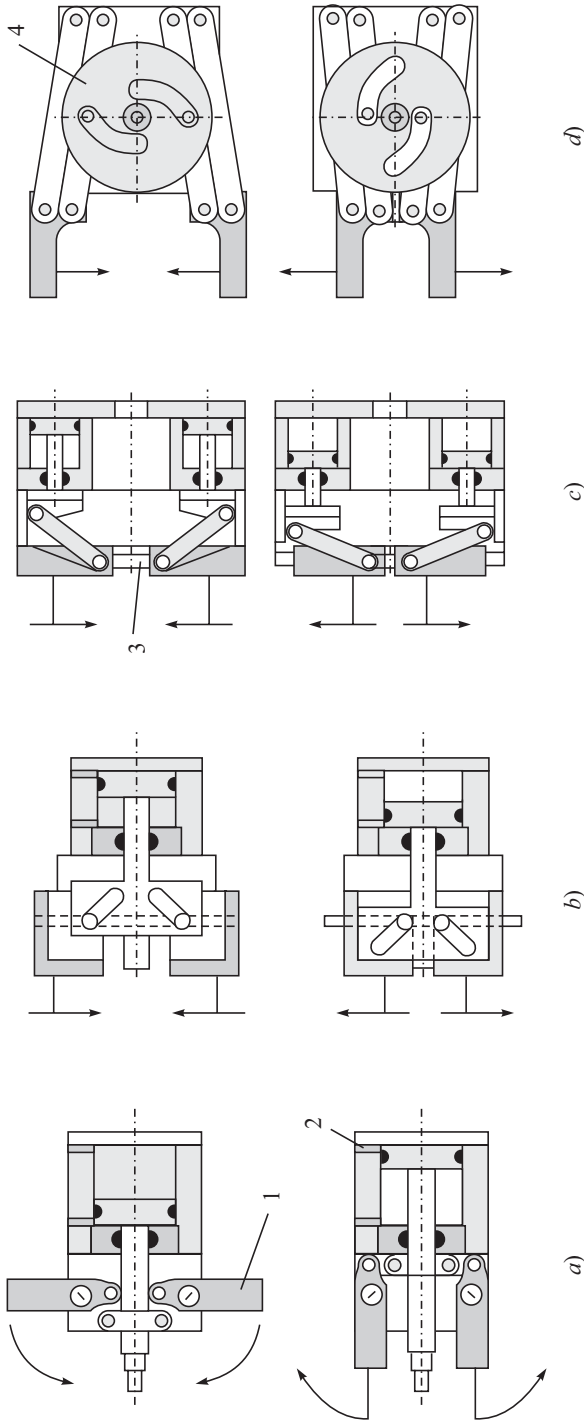


Figura 2.4 Sujetadores de accionamiento neumático: a) Mordaza angular; b) Mordaza paralela; c) Mordaza paralela con dos cilindros; d) Mordaza paralela con disco de leva
 [Cortesía: **Robot grippers** por Gareth J. Monkman, Stefan Hesse, Ralf Steinmann, Henrik Schunk, Wiley, 2007; http://media.wiley.com/product_data/excerpt/90/35274061/3527406190.pdf]

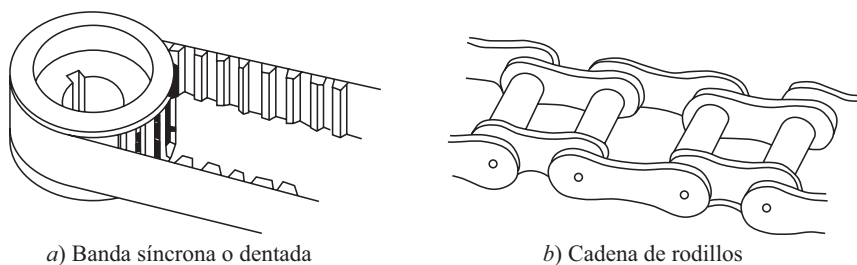


Figura 2.5 Transmisión por banda y cadena

engranajes, etc., es llamado actuador. Sin embargo, un sistema neumático o hidráulico que proporciona movimientos para los eslabones del robot, con o sin elementos de transmisión, se llamará actuador y no motor.

iv) Transmisión Como lo sugiere el término, estos elementos transmiten el movimiento de motores y de actuadores a los eslabones del manipulador. En el caso de motores eléctricos, estos elementos, junto con el motor eléctrico, forman un actuador. Los siguientes son elementos de transmisión típicos:

a) Transmisión por banda y cadena Los accionamientos por banda se utilizan mucho en la robótica, especialmente la banda síncrona, como se muestra en la figura 2.5a). Sin embargo, su vida útil es breve, ya que dependen de la tensión de la banda para producir agarre a través de la polea. Las cadenas, por otro lado, como se muestra en la figura 2.5b), son por lo general más económicas. Tienen una mayor capacidad de carga y una vida útil más larga en comparación con las transmisiones por banda, aunque menor en comparación con los engranajes.

b) Engranajes Entre todas las transmisiones mecánicas, los diferentes tipos de engranajes, como se muestra en la figura 2.6, son los más confiables y duraderos, aunque el juego entre los dientes tendrá que tomarse en cuenta cuidadosamente durante la fase de diseño.

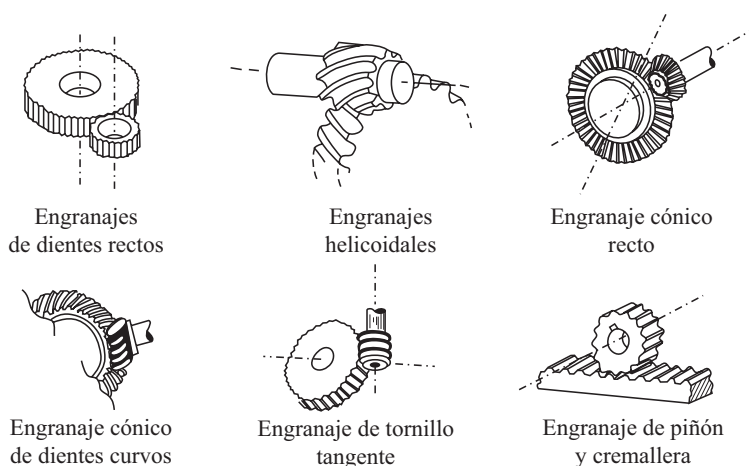


Figura 2.6 Engranajes

c) Mecanismos de eslabones A fin de reducir el peso y exceso de flexibilidad de los elementos de transmisión arriba mencionados, se emplean los mecanismos de eslabones de la figura 2.7a). La figura 2.7b) muestra cómo se utiliza un gato de husillo con un arreglo de cuatro barras para transmitir movimientos.



¿Qué es un mecanismo?

Una serie de eslabones, por lo general rígidos, acoplados por articulaciones que permiten movimientos relativos entre cualquiera de dos eslabones, forman un mecanismo.

2.1.2 Subsistema de reconocimiento

El elemento más importante en el subsistema de reconocimiento es el sensor, el cual puede compararse con nuestros ojos o nuestra nariz. La inclusión de sensores en un robot cambia su naturaleza de estúpida a inteligente. A fin de procesar la señal detectada, en su mayoría análoga, por medio de un controlador digital, se requiere un convertidor analógico digital (*Analog-to-Digital Converter*, ADC). De esta manera, un subsistema de reconocimiento consiste normalmente en los siguientes dos elementos.

i) Sensores La mayoría de los sensores son esencialmente transductores, que convierten la forma de una señal en otra. Por ejemplo, el ojo humano convierte patrones de luz en señales eléctricas. Los sensores forman parte de una de varias áreas generales: visión, tacto, detección de rango y proximidad, navegación, reconocimiento del habla, etc. Cada una de estas áreas es en sí un área de investigación individual. Sin embargo, algunas de ellas se explican en el capítulo 4.

ii) Convertidor analógico digital (ADC) Este dispositivo electrónico se comunica con los sensores y con el controlador del robot. Por ejemplo, el ADC convierte

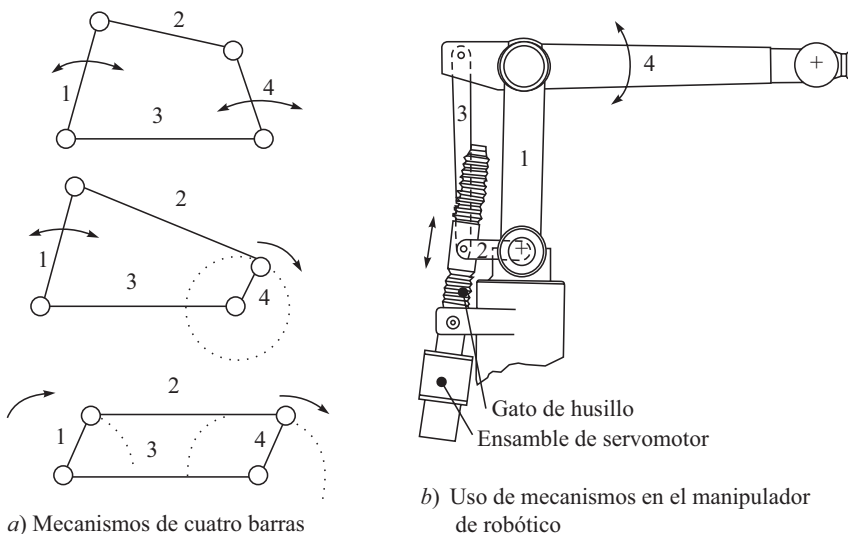


Figura 2.7 Mecanismos y su uso en el manipulador de robótico

el voltaje creado por una deformación unitaria en una galga extensométrica en una señal digital, es decir, 0 o 1, de manera que el controlador digital del robot pueda procesar esta información. Físicamente se ve como cualquiera otra tarjeta de interface de computadora dentro de la unidad de procesamiento central (CPU), como se muestra en la figura 2.8.

2.1.3 Subsistema de control

El papel de un sistema de control en un mando de robot se muestra en la figura 2.9a). Principalmente consiste en los siguientes dispositivos:

i) Controlador digital El controlador digital es un dispositivo electrónico especial que tiene un CPU, memoria y, a veces, un disco duro para almacenar los datos programados. En sistemas de robótica, estos componentes se mantienen dentro de una caja sellada que se denomina controlador, como puede verse en la figura 2.9b). Se usa para controlar los movimientos del manipulador y del efector final. Un controlador de robot es como un supervisor en una fábrica. Puesto que una computadora tiene las mismas características que un controlador digital, también se utiliza como un controlador de robot. Un controlador procesa los comandos programados por el usuario y transmite señales apropiadas a los actuadores a través de los convertidores analógicos digitales (DAC). Los lenguajes de programación pueden ser los mismos que se usan en la computación, es decir, BASIC, Fortran, C y C++. Para los robots comerciales, sin embargo, los lenguajes son generalmente distintos. Por ejemplo, Fanuc de Japón usa el lenguaje de programación de robots “Karel”. Esto sirve principalmente para la introducción de características específicas en los sistemas robóticos con el fin de que se distingan los productos.

ii) Convertidor digital analógico (DAC) Un DAC convierte la señal digital del controlador del robot en una señal análoga para accionar los actuadores; por ejemplo, un motor eléctrico de CD. El controlador digital también está acoplado a un DAC para re-

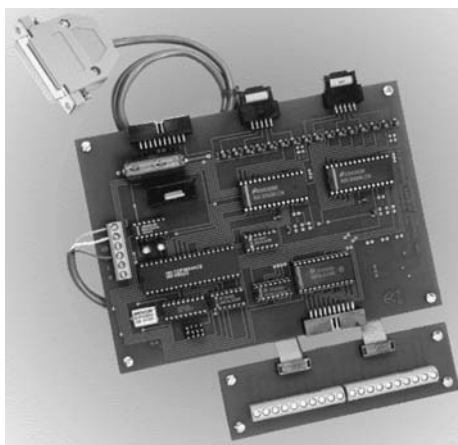
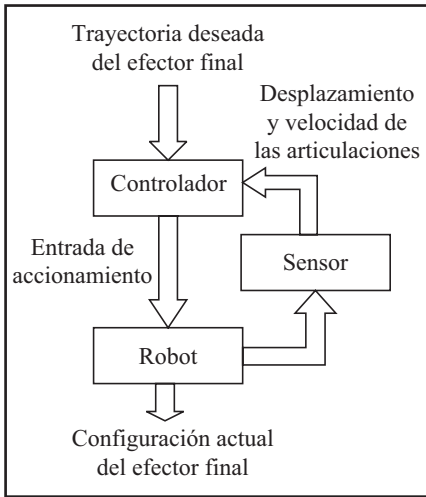


Figura 2.8 Un convertidor analógico digital
[Cortesía: <http://www.eeci.com/adc-16p.htm>]



a) Esquema de control de un robot



b) Controlador ABB

Figura 2.9 Subsistema de control

[Cortesía: <http://www.abb.com/Product/seitp327/f0cec80774b0b3c9c1256fd a00409c2c.aspx>]

convertir su señal en una señal análoga equivalente, es decir, el voltaje eléctrico para el motor de CD. La apariencia física de un DAC se muestra en la figura 2.10.

iii) Amplificador Puesto que los comandos de control del controlador digital convertidos en señales análogas por el ADC son muy débiles, requieren de amplificación para realmente accionar los motores eléctricos del manipulador de robot.



ADC vs. DAC

Un DAC sirve al propósito opuesto al de un ADC.

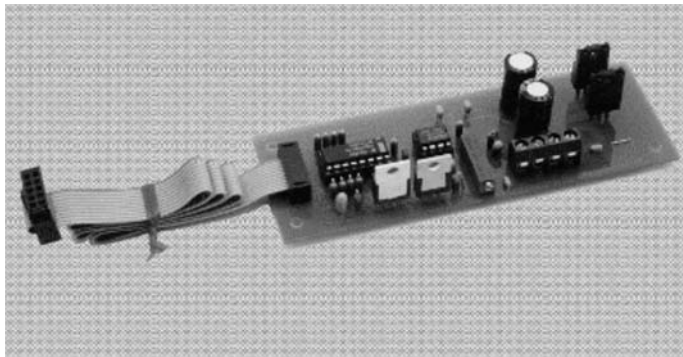


Figura 2.10 Un convertidor digital analógico
[Cortesía: <http://www.eeci.com>]

2.2



Clasificación de robots por aplicación

Este método de clasificación se vuelve más relevante, pues cada vez más robots se están diseñando para servir en tareas específicas. Por ejemplo, muchos robots están diseñados para trabajos de ensamble y no serán muy fácilmente adaptables para otras aplicaciones. Éstos se denominan “robots de ensamble”. Para la soldadura de costura, algunos proveedores proporcionan sistemas de soldadura completos junto con el robot, es decir, el equipo de soldadura con sus unidades de manejo de materiales, sus mesas giratorias, etc., juntas como una unidad integral. Este sistema robótico integral se llama “robot de soldadura”, aunque su unidad manipuladora independiente podría adaptarse para una variedad de tareas. Algunos robots están específicamente diseñados para la manipulación de cargas pesadas y, por lo tanto, se llaman “robots de trabajo pesado”.

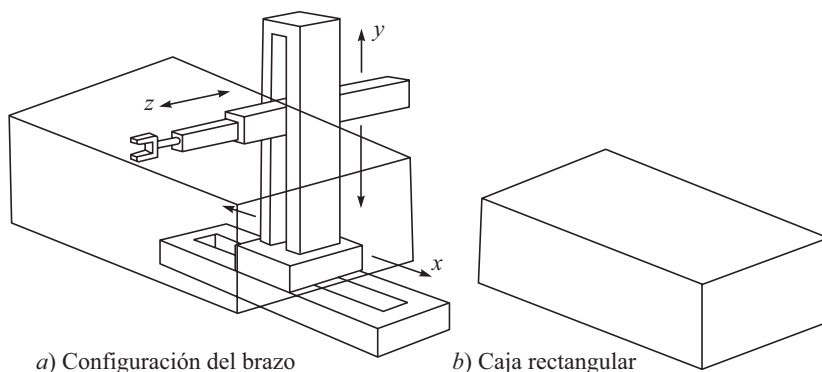
2.3



Clasificación de robots por sistema de coordenadas

A esta clasificación también se le conoce como clasificación por la configuración del brazo y por el volumen geométrico de trabajo. Este método clasifica al robot sin tomar en cuenta al efector final. Indica el volumen de coordenadas alcanzables por un punto en el efector final, en vez de sus orientaciones. Existen cuatro tipos fundamentales: Cartesiano, cilíndrico, esférico o polar y articulado o de revoluta.

i) Cartesiano Cuando el brazo de un robot se mueve de modo rectilíneo, es decir, en las direcciones de las coordenadas x , y y z del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares diestras, como se ve en la figura 2.11a), se le llama tipo cartesiano o rectangular. El robot asociado se conoce entonces como robot cartesiano. Se llama a los movimientos desplazamiento x , altura o elevación y y alcance z del brazo. Su espacio de trabajo tiene la forma de una caja o de un prisma rectangular, como se indica en la figura 2.11b). Un robot cartesiano necesita un espacio de gran volumen para su operación. Sin embargo, este robot tiene una estructura rígida y ofrece una posición precisa para el efector final. El manteni-



a) Configuración del brazo

b) Caja rectangular

Figura 2.11 Un brazo de robot cartesiano y su espacio de trabajo

miento de estos robots es difícil, puesto que los movimientos rectilíneos se obtienen por lo general a través de conjuntos de actuadores eléctricos giratorios acoplados a tuercas y tornillos esféricos. El polvo acumulado en los tornillos puede llegar a dificultar el movimiento suave del robot. Por lo tanto, tienen que cubrirse mediante fuelles. Además, mantener la alineación de los tornillos requiere una mayor rigidez en estos componentes. Por ende, estos robots tienden a ser más caros.

ii) Cilíndrico Cuando el brazo de un robot tiene una articulación de revoluta y dos prismáticas, es decir, si la primera articulación prismática del tipo cartesiano, figura 2.11a), es reemplazada por una articulación de revoluta con su eje girado 90° respecto al eje z , los puntos que puede alcanzar pueden ser convenientemente especificados con coordenadas cilíndricas, es decir, ángulo θ , altura y y radio z , como se indica en la figura 2.12a). Un robot con este tipo de brazo se denomina robot cilíndrico, cuyo brazo se mueve por medio de θ , y y z , es decir, tiene una rotación de base, una elevación y un alcance, respectivamente. Puesto que las coordenadas del brazo pueden asumir cualquiera de los valores entre los límites superior e inferior especificados, su efector final puede moverse en un volumen limitado, que es una sección de corte dentro del espacio entre los dos cilindros concéntricos, como se muestra en la figura 2.12b). Observe que éste no es el caso para un brazo cartesiano; su volumen de trabajo es una caja sólida,



¿Por qué hay diferentes sistemas de coordenadas para definir arquitecturas de robots?

No hay ninguna razón especial, aparte de la conveniencia de definir un punto en el espacio cartesiano tridimensional.

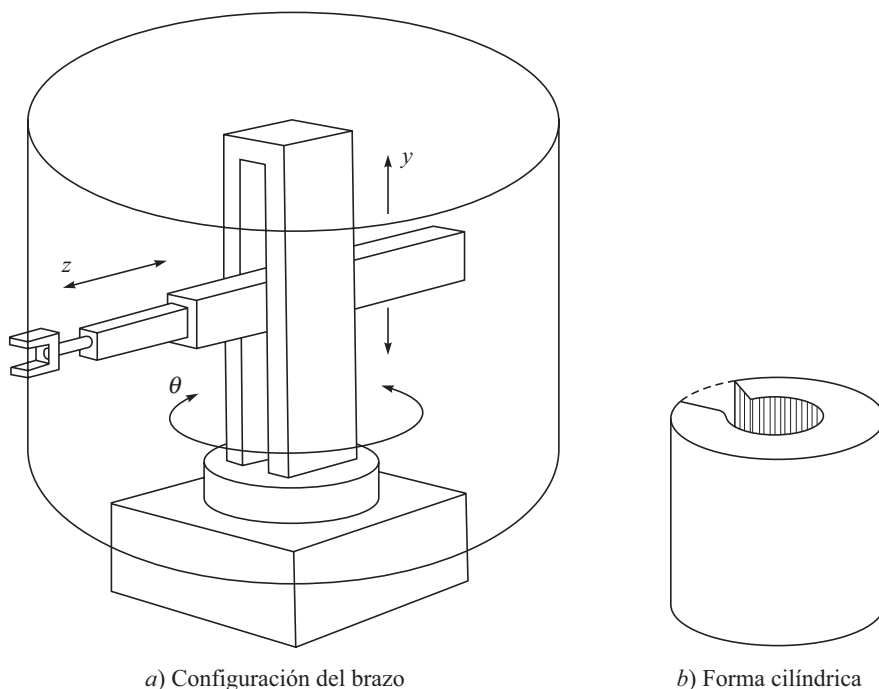


Figura 2.12 Brazo de robot cilíndrico dentro de su volumen de trabajo

como se muestra en la figura 2.11b). La línea punteada de la figura simplemente completa el límite del volumen de espacio de trabajo para una mejor visualización. No tiene otro propósito. Un robot de este tipo podrá tener problemas para tocar el piso cerca de la base. Se usan exitosamente cuando una tarea requiere que se alcancen aperturas pequeñas o en el trabajo sobre superficies cilíndricas, por ejemplo, para la soldadura de dos tubos.

iii) Esférico o polar Cuando el brazo de un robot es capaz de cambiar su configuración moviendo sus dos articulaciones de revoluta y su articulación prismática, es decir, cuando la segunda articulación prismática a lo largo de la altura y del tipo cilíndrico es reemplazada por una articulación de revoluta con su eje girado 90° respecto al eje z , se denomina brazo de robot esférico o polar; la posición del brazo se describe convenientemente por medio de las coordenadas esféricas θ , ϕ y z ; el brazo se muestra en la figura 2.13a). Los movimientos del brazo representan la rotación de la base, los ángulos de elevación y el alcance, respectivamente. Su volumen de trabajo es indicado en la figura 2.13b).

iv) Articulado o de revoluta Cuando un brazo de robot consiste en eslabones conectados por articulaciones de revoluta, es decir, cuando la tercera articulación prismática también es reemplazada por otra articulación de revoluta con su eje girado 90° respecto al eje z , se le llama brazo unido articulado o de revoluta. Este caso se muestra en la figura 2.14a). Su volumen esférico de trabajo se muestra en la figura 2.14b) donde su superficie interna es difícil de determinar. Tales robots son relativamente más sencillos de fabricar y mantener, ya que los actuadores del robot están directamente acoplados mediante transmisiones de engranes o bien por bandas. Sin embargo, la realización de una tarea

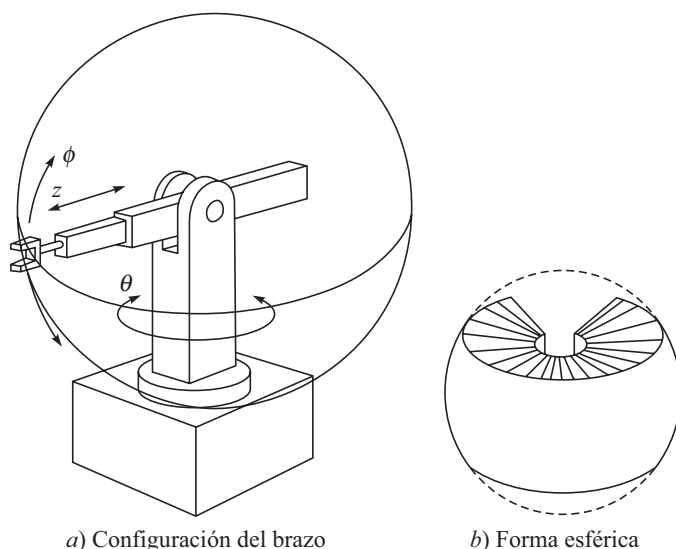
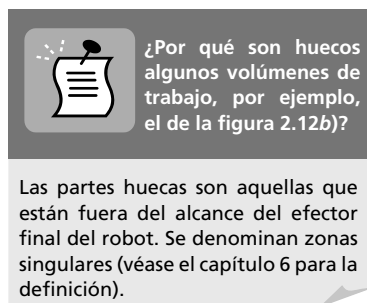


Figura 2.13 Robot esférico con su volumen de trabajo

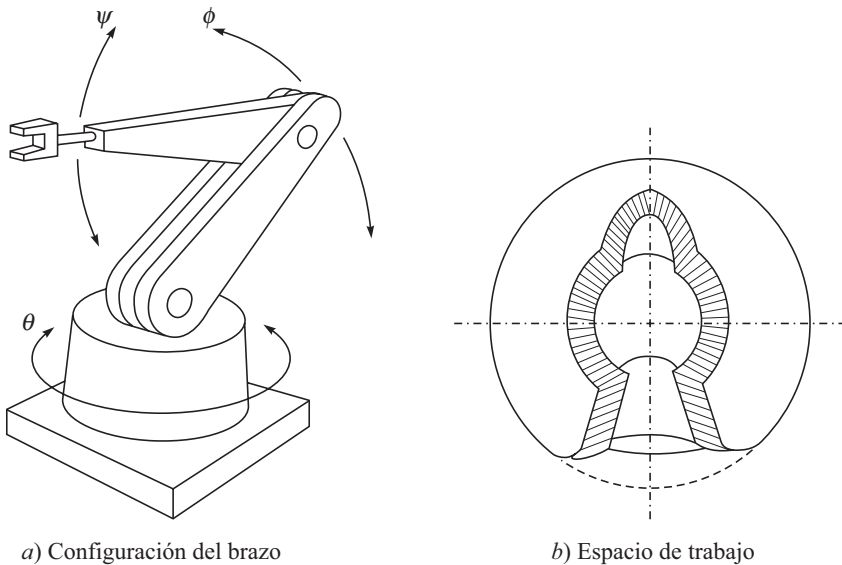


Figura 2.14 Un brazo de robot articulado con su espacio de trabajo

en coordenadas cartesianas requiere de transformaciones matemáticas. Estos aspectos se estudian en el capítulo 6.

Es bastante interesante observar que las cuatro arquitecturas fundamentales del brazo que se mencionan arriba pueden derivarse unas de otras. Esto se explica en la tabla 2.2. Además, la tabla 2.3 proporciona las ventajas y desventajas de estos brazos robóticos básicos. En parte de la literatura también se usan clasificaciones como Gantry y SCARA (Selective Compliance Assembly Robot Arm), como se muestra en las figuras 2.15 y 2.16, respectivamente. Esto en verdad no se requiere, pues los tipos fundamentales son suficientes para ayudar a su entendimiento. Por ejemplo, el brazo del robot tipo gantry es del tipo cartesiano puesto al revés. Este robot es grande, versátil en su operación, pero caro. El SCARA, por otro lado, es

Tabla 2.2 Transformación de tipos de brazo de robot

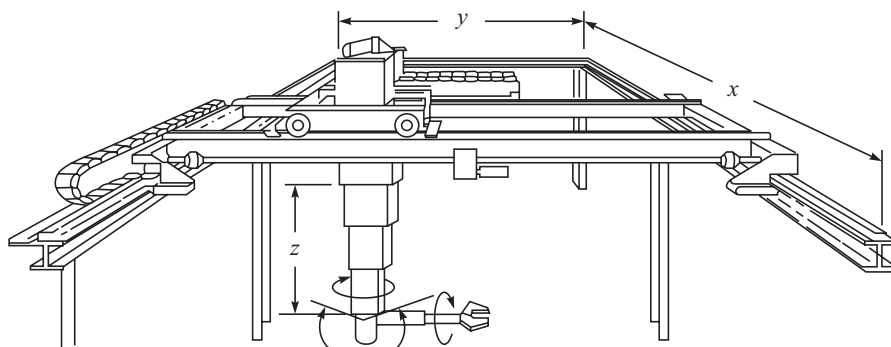
Tipo	Articulaciones		
	1 (base): Movimiento	2 (elevación): Movimiento	3 (alcance): Movimiento
Cartesiano	P: desplazamiento x	P: altura y	P: alcance z
↓	↓ $-P+R+90^\circ@z$	↓	↓
Cilíndrico	R: rotación θ	P: -do-	P: -do-
↓	↓	↓ $-P+R+90^\circ@z$	↓
Esférico	R: -do-	R: Ángulo ϕ	P: -do-
↓	↓	↓	↓ $-P+R+90^\circ@z$
Articulado:	R: -do-	R: -do-	R: ángulo ψ

-P: Quitar la articulación prismática; +R: Agregar articulación de revoluta; $+90^\circ@$: Girar la articulación de revoluta alrededor del eje z por 90° ; -do-: Sin cambios.

Tabla 2.3 Comparación de brazos de robot fundamentales [Cortesía de Fuller (1999)]

Configuración	Ventajas	Desventajas
<i>Cartesiano</i> (3 ejes lineales) x : desplazamiento de la base y : altura z : alcance	<ul style="list-style-type: none"> • Fácil de visualizar • Estructura rígida • Programación offline fácil • Paradas mecánicas fáciles 	<ul style="list-style-type: none"> • Alcance sólo hacia adelante y atrás • Requiere gran espacio en las instalaciones • Los ejes son difíciles de sellar • Caro
<i>Cilíndrico</i> (1 eje giratorio y 2 ejes lineales) θ : rotación de la base ϕ : altura z : alcance	<ul style="list-style-type: none"> • Llega a todo su derredor • Ejes y y z rígidos • Los ejes θ son fáciles de sellar 	<ul style="list-style-type: none"> • No tiene alcance hacia arriba de sí mismo • Eje θ menos rígido • Ejes y y z difíciles de sellar • No puede llegar alrededor de obstáculos • El movimiento horizontal es circular
<i>Esférico</i> (2 ejes giratorios y 1 eje lineal) θ : rotación de la base ϕ : ángulo de elevación z : alcance	<ul style="list-style-type: none"> • Llega a todo su derredor • Llega arriba y debajo de obstáculos • Gran volumen de trabajo 	<ul style="list-style-type: none"> • No tiene alcance hacia arriba de sí mismo • Corto alcance vertical
<i>Articulado</i> (3 ejes giratorios) θ : rotación de la base ϕ : ángulo de elevación ψ : ángulo de alcance	<ul style="list-style-type: none"> • Llega arriba y debajo de obstáculos • Área de trabajo más grande para el espacio de instalación más reducido 	<ul style="list-style-type: none"> • Difícil de programar offline • Dos o más maneras de alcanzar un punto • El robot más complejo

un tipo cilíndrico cuyo alcance se logra mediante el uso de una articulación de revoluta en lugar de una articulación prismática (compare las figuras 2.12a) y 2.16). Un robot SCARA es muy conveniente para operaciones de ensamble; por lo tanto, se usa mucho para este propósito en varias industrias.

**Figura 2.15** Robot tipo gantry [Cortesía de Koivo (1989)]

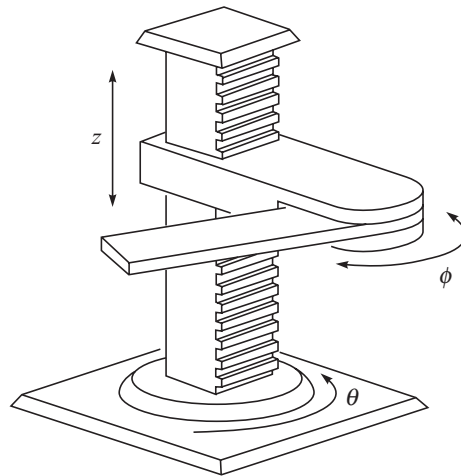


Figura 2.16 Brazo SCARA
[Cortesía de Fuller (1999)]

2.4



Clasificación de robots por su sistema de potencia

Los robots son accionados por energía eléctrica o por energía de fluidos. Esta última categoría está subdividida en sistemas neumáticos e hidráulicos. Hoy en día, el método de accionamiento más común es la energía eléctrica mediante el uso de varios tipos de motores, por ejemplo, el motor de pasos, servo CD y servo CA sin escobillas. Los robots neumáticos se utilizan en trabajos de ensamble ligero o embalaje, pero por lo regular no son convenientes para tareas pesadas o donde se necesite control de velocidad. Por otro lado, los robots hidráulicos se utilizan en aplicaciones de cargas pesadas debido a su alta proporción potencia-tamaño.

2.5



Clasificación de robots por el método de control

En este caso, el término control puede significar dos cosas: una es su estrategia de control de movimientos, es decir, si un robot está servocontrolado o no, y la otra es cómo se logra la trayectoria de movimiento, es decir, de punto a punto o de manera continua.

i) Servocontrolado/no servocontrolado Los robots son servocontrolados (ciclo cerrado) o no servocontrolados (ciclo abierto). Con el fin de aprovechar las ventajas completas del control digital o por microprocesador, lograr una buena precisión en condiciones de carga pesada y llevar a cabo tareas complejas con seguridad, se requiere el servocontrol completo. En este método de control, se transmiten comandos a los actuadores de los brazos para mover cada eje únicamente con la cantidad necesaria. El movimiento real se

monitorea tanto para el desplazamiento como para la velocidad, y se compara con la señal del comando. La diferencia entre el comando y la acción, que se define como el error, se utiliza como retroalimentación al controlador con la finalidad de realizar la modificación de los comandos para corregir la posición. La mayoría de los robots eléctricos e hidráulicos son servocontrolados.

Los robots neumáticos normalmente no son servocontrolados. En este caso, se transmite una señal de comando y se supone que el brazo del robot alcanza su posición deseada. El no servocontrol es apropiado cuando sólo se requiere el control de posición de cargas ligeras. Sin embargo, si se ha de controlar velocidad, aceleración y par de torsión, o si el movimiento contra cargas pesadas es necesario, entonces el no servocontrol usualmente no es posible. La mayoría de los robots industriales de la actualidad utilizan el servocontrol. Este problema de control requiere conocimientos de control proporcional-derivativo (PD), proporcional-integral (PI), proporcional-integral-derivativo (PID), lógica difusa, redes neurales, así como otras teorías de control.

ii) Control de trayectoria En un control de trayectoria punto a punto, el brazo del robot se mueve desde un punto deseado hasta el siguiente sin considerar la trayectoria que se toma entre ellos. La trayectoria real que se toma podrá ser el resultado de una combinación de movimientos de eslabones del brazo, calculada para proporcionar el tiempo mínimo de viaje entre los puntos. El control punto a punto se usa extensamente en el ensamble, en el paletizado y en la carga/descarga de máquinas-herramientas.

En un control de trayectoria continua, el robot se mueve a lo largo de una trayectoria continua con orientaciones específicas, por ejemplo, en soldadura, donde la señal de los sensores en las articulaciones es constantemente monitoreada por el controlador del robot. Un problema de control de esta índole se denomina problema de planeación de trayectoria.

2.6



Clasificación de robots por método de programación

Los robots industriales pueden ser programados por diferentes medios. Pueden programarse, por ejemplo, online u offline. Los métodos online requieren el uso directo del robot y utilizan un *teach pendant* (caja de enseñanza) para la programación punto a punto, así como brazos de esclavo o un accesorio de empuñadura de pistola para la programación de trayectoria continua. Los robots más recientes tienen la posibilidad de programación offline, es decir, el robot puede seguir trabajando en una tarea particular, mientras se prepara un programa para una nueva tarea en una terminal de computación, utilizando el lenguaje de programación del robot, por ejemplo, VAL, ALU u otros.

RESUMEN

En este capítulo se han presentado varios subsistemas de un sistema robótico. Un robot es clasificado con base en su volumen de trabajo, método de control, etc. Las clasificaciones presentadas en este capítulo permitirán al usuario seleccionar/pedir un robot según sus requerimientos.



EJERCICIOS

- 2.1 ¿Cuáles son los diferentes subsistemas de un sistema robótico?
- 2.2 ¿Por qué se usan transmisiones en un manipulador de robot?
- 2.3 ¿Cuándo deberá darse preferencia a una polea de banda y no a los engranajes?
- 2.4 ¿Cuáles son las ventajas de usar mecanismos y no otros arreglos de transmisión?
- 2.5 ¿Cuáles son las diferentes formas de clasificar un robot?
- 2.6 ¿Por qué se requiere ADC y DAC en robots?
- 2.7 ¿Qué tipo de robot es conveniente para pintar una barra? ¿Por qué?
- 2.8 ¿Cuál es la forma del volumen de trabajo del robot SCARA (figura 2.16)? Dibújela.
- 2.9 ¿Por qué están vacíos algunos volúmenes de trabajo?
- 2.10 ¿Cuál es el significado completo de PUMA?
- 2.11 ¿Qué tipo de brazo básico tiene el robot PUMA?
- 2.12 ¿Cuál es el tipo de control que es apropiado para operaciones de soldadura?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

Basándose en búsquedas en la web, conteste las siguientes preguntas:

- 2.13 Mencione algunos fabricantes de robots y sus lenguajes de programación de robots.
- 2.14 ¿Cuáles son las relaciones de engranaje que se usan normalmente en robots industriales?
- 2.15 Busque algunas aplicaciones industriales donde se utilizan robots Gantry.
- 2.16 Mencione algunas industrias que emplean robots SCARA así como la razón.
- 2.17 ¿Cuáles son los precios normales de los robots industriales que se usan para la soldadura de carrocerías de automóviles?



Capítulo

3

Actuadores

En este capítulo se analizará uno de los componentes básicos del robot: el actuador. Los actuadores son los músculos de los robots y comprenden lo siguiente:

- i) una fuente de alimentación
- ii) un amplificador de potencia
- iii) un servomotor
- iv) un sistema de transmisión



Actuador vs. motor

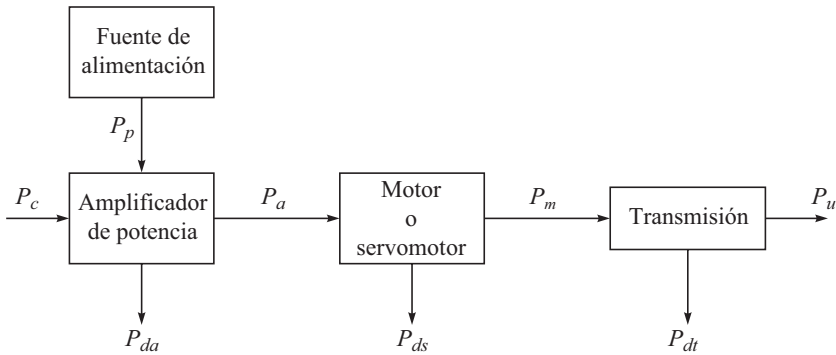
Un motor, junto con la transmisión y otros accesorios, si existe, se llama actuador (véase la figura 3.1). Sin embargo, en muchos casos, estos términos se usan de manera indistinta para decir que mueven un eslabón del robot.

Las conexiones entre todos los componentes de los actuadores se describen en la figura 3.1.

Para elegir un actuador, vale la pena empezar desde el requerimiento impuesto sobre la potencia mecánica, $-P_u$, por la fuerza y velocidad que describe el movimiento de articulaciones. Con base en la fuente de la potencia de entrada, $-P_a$, los actuadores pueden clasificarse en tres grupos:

i) Actuadores neumáticos Estos actuadores utilizan energía hidráulica proporcionada por un compresor y la transforman en energía mecánica por medio de pistones o turbinas.

ii) Actuadores hidráulicos Estos actuadores emplean la energía neumática almacenada por un compresor que la transforma en energía mecánica mediante pistones o turbinas.



P_p : Fuente primaria de potencia (electricidad, fluido presurizado o aire comprimido, etc.). P_c : Potencia de control de entrada (normalmente eléctrica). P_a : Potencia de entrada al motor (de tipo eléctrico, hidráulico o neumático). P_m : Salida de potencia del motor. P_u : Potencia mecánica que se requiere. P_{da} , P_{ds} y P_{dt} : Pérdidas de potencia por disipación durante las conversiones realizadas por el amplificador, el motor y la transmisión.

Figura 3.1 Un sistema de actuador

iii) Actuadores eléctricos La fuente principal de energía de entrada es la energía eléctrica que fluye desde el sistema de distribución eléctrico.

Una parte de la potencia de entrada del motor, $-P_a$, se convierte en potencia mecánica, $-P_m$, a la salida y el resto, $-P_{ds}$, se disipa debido a las pérdidas de los motores mecánicos, eléctricos, hidráulicos o neumáticos. En una aplicación robótica, un actuador deberá tener las siguientes características:

- baja inercia
- alta relación de potencia-peso
- posibilidad de sobrecarga y entrega de pares de torsión de impulsos
- capacidad para desarrollar altas aceleraciones
- amplios rangos de velocidad
- alta precisión de posicionamiento
- buena precisión de rastreo de trayectorias y posicionamiento

3.1



Actuadores neumáticos

El actuador neumático es uno de los dos tipos de dispositivos de potencia dada por fluidos para robots industriales. El otro es hidráulico y se describe en la siguiente sección. Los actuadores neumáticos utilizan aire comprimido para su accionamiento y se usan extensamente para realizar los movimientos típicos de abrir y cerrar las mordazas en el sujetador (*gripper*) de un robot, como se muestra en la figura 2.4, o bien para su accionamiento de brazos de robot sencillos en aplicaciones donde el control continuo de movimientos no sea una preocupación. Un actuador neumático que incluye un cilindro neumático y otros accesorios se muestran en la figura 3.2. Las especificaciones de estos sistemas son empleadas, por ejemplo, en los sujetadores de robots de la figura 2.4 y se exponen en la tabla 3.1.

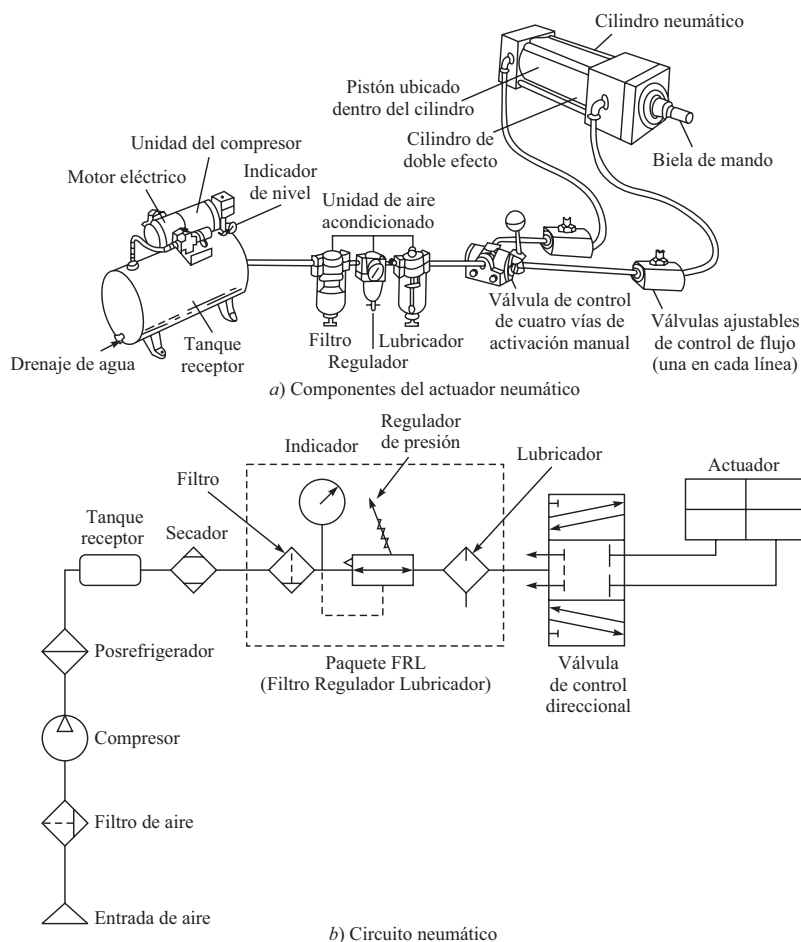


Figura 3.2 Un actuador neumático

Las ventajas y desventajas de los actuadores neumáticos son las siguientes:

Ventajas

- Es la forma más económica de todos los actuadores. Los componentes son perfectamente asequibles y por lo regular el aire comprimido ya se encuentra disponible en las instalaciones de las fábricas.
- El aire comprimido puede almacenarse y transportarse fácilmente a través de largas distancias.
- El aire comprimido es limpio, a prueba de explosiones e insensible a fluctuaciones de temperatura. Por lo tanto, puede emplearse en muchas aplicaciones.
- Estos actuadores tienen pocas partes móviles, por lo que son muy confiables y ayudan a reducir los costos de mantenimiento.

Tabla 3.1 Especificaciones de un actuador para un sujetador (Catálogo RS)

<i>Especificaciones técnicas</i>	
Marca	SMC
Núm. de parte del fabricante	MHC2-25D
Tipo	Sujetador (doble efecto)
Barreno	25 mm
Ángulo de operación	30° (abierto) a -10° (cerrado)
Rango de presión	1 a 6 bar
Tamaño del puerto de conexión	M5 m
Rango de temperatura	0 a 60 °C
Medio	Aire no lubricado
Par de sujeción	1.4 Nm a 5 bar
Repetibilidad en posición de cerrar	± 0.1 mm
Frecuencia de operación máxima	80 cpm (ciclos por minuto)

- Puesto que los sistemas neumáticos son comunes en toda la industria, el personal que suplente a otro está frecuentemente muy familiarizado con la tecnología.
- Tienen una acción y un tiempo de respuesta muy rápida, lo que permite ciclos de trabajo expeditos.
- Normalmente no se requiere ninguna transmisión mecánica.
- Un sistema neumático puede ser intrínsecamente seguro en áreas con peligro de explosión, ya que no se requiere un control eléctrico. En condiciones de humedad, no existe tampoco peligro de electrocución.
- Los sistemas son por lo regular compactos.
- El control es sencillo, por ejemplo, se usan con frecuencia topes mecánicos.
- Los componentes individuales pueden interconectarse fácilmente.



¿Cuánto es un bar?

Un bar = un atm = 14.7 psi = 101 356.5 N/m² o aproximadamente 10⁵ PA.

Desventajas

- Puesto que el aire es compresible, el control de la precisión en la velocidad y la posición no es fácil de lograr, a menos que se incorporen dispositivos electromecánicos mucho más complejos en el sistema. Esto significa que a menudo sólo está disponible una secuencia limitada que opera con una velocidad fija.
- Si se usan topes mecánicos, la reanudación del sistema puede ser lenta.
- Los sistemas neumáticos no son convenientes para mover cargas pesadas bajo control preciso, debido a la compresibilidad del aire. Esta compresibilidad requiere de la aplicación de más fuerza de la que normalmente sería necesaria para asegurar que el actuador esté firmemente en posición contra su tope en condiciones de carga.
- Si penetra humedad en las unidades y se ha usado metales ferrosos, podrían ocasionarse daños en los componentes individuales.

La compresibilidad del aire en un actuador neumático no permite un control sofisticado, pero de esto puede sacarse provecho, impidiendo daños debidos a sobrecarga y proporcionando el cumplimiento que puede ser requerido en muchas aplicaciones prácticas.

3.2



Actuadores hidráulicos

Los actuadores hidráulicos también son dispositivos de potencia de fluidos para robots industriales. Ellos utilizan fluidos de alta presión, como aceite, para transmitir fuerzas al punto de aplicación deseado. Un actuador hidráulico es muy similar en aspecto a uno accionado neumáticamente. Los diferentes componentes se muestran en la figura 3.3 y una especificación típica del cilindro se ofrece en la tabla 3.2. Estos actuadores están diseñados para operar con presiones mucho más altas (normalmente entre 70 y 170 bar). Son apropiados para aplicaciones de alta potencia.

Las ventajas y desventajas de los actuadores hidráulicos son las siguientes:

Ventajas

- Alta eficiencia y alta relación potencia-tamaño.
- Es posible el control completo y preciso de velocidad, posición y dirección de los actuadores.

Tabla 3.2 Un cilindro hidráulico con un barreno de 32 mm y una carrera de 50 mm (Catálogo RS)

<i>Especificaciones técnicas</i>	
Marca	Rexroth
Núm. de parte del fabricante	CDL1M00/32/18/50/CIX/B1CHUMS
Tipo	Cilindro-vástago rótula
Cuerpo	Acero al carbono
Tamaño de barreno	32 mm
Carrera	50 mm
Tamaño del puerto	G 1/4
Presión de prueba estática	240 bar
Presión de trabajo	160 bar
Fuerza máxima a 160 bar	12.8 kN
Caudal máximo a 0.1 mm/seg	4.8 l/min
Largo total	200 mm
Largo total (pistón extendido)	250 mm
Diámetro de la punta de la barra	18 mm
Tamaño de rosca de la punta de la barra	18 mm
Material de sellado	NBR / Poliuretano
Medio hidráulico recomendado	Líquidos con base en aceites minerales
Rango de temperatura de trabajo del líquido hidráulico	-20 a +80°C

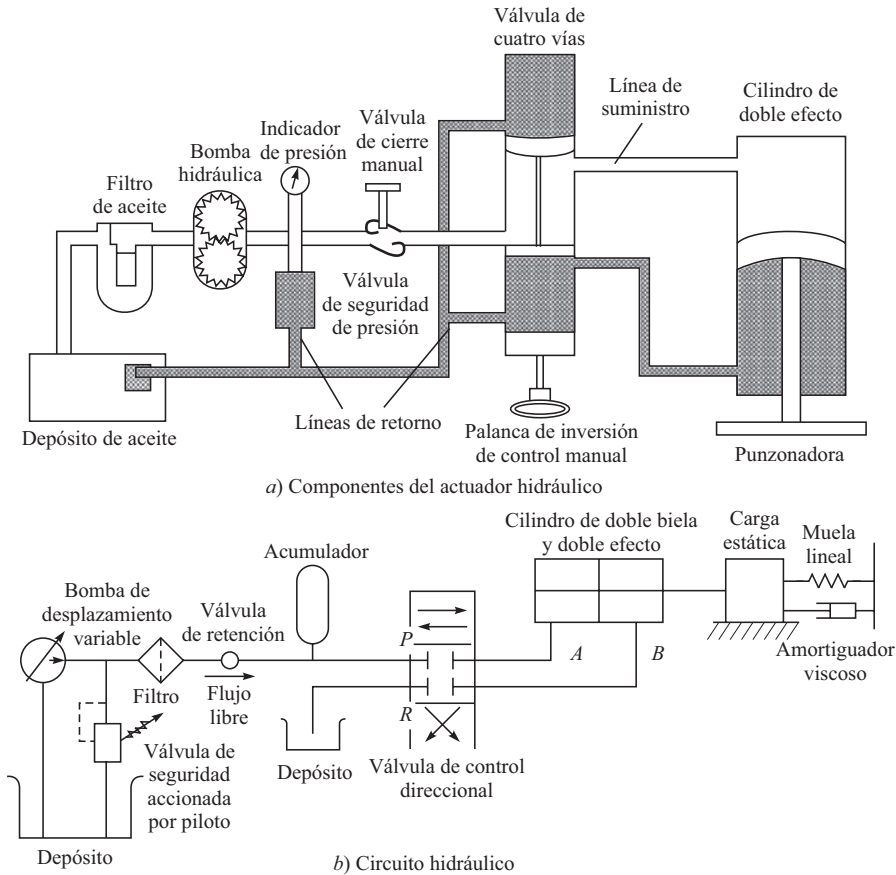


Figura 3.3 Un actuador hidráulico

- Ocurren pocos problemas de contragolpe debido a la rigidez e incompresibilidad del fluido, especialmente cuando el actuador actúa como la propia articulación o unión, que es el caso de los actuadores rotativos de aspas que se describen más adelante. “Contragolpe” es el término que se usa para describir el juego no deseado en componentes de transmisión desde su posición deseada cuando se ponen en condiciones de carga debido al desgaste o a espacios libres entre superficies. Grandes fuerzas pueden aplicarse directamente en las ubicaciones requeridas.
- Por lo general, tienen una mayor capacidad de carga que los actuadores eléctricos y neumáticos.
- No se requiere ninguna conexión mecánica, es decir, se obtiene un accionamiento directo con simpleza mecánica.
- Son autolubrificantes (bajo desgaste) y no corrosivos.
- Debido a la presencia de un acumulador, el cual actúa como un dispositivo de “almacenamiento”, el sistema puede responder a súbitas demandas de potencia.
- Los robots hidráulicos son más capaces de resistir cargas súbitas que los eléctricos.

Desventajas

- Pueden darse fugas que causan una pérdida de rendimiento y contaminación general del área de trabajo. También hay un mayor riesgo de incendios.
- La fuente de alimentación puede ser ruidosa, normalmente alrededor de 70 decibeles o dBA, o incluso más, si no está protegida por un amortiguador acústico.
- Cambios de temperatura alteran la viscosidad del líquido hidráulico. Por lo tanto, la viscosidad del líquido se incrementará y posiblemente cause movimiento lento del robot.
- Para robots más pequeños, la energía hidráulica usualmente no es económicamente factible, puesto que el costo de los componentes hidráulicos no se reduce en proporción al tamaño.
- El servocontrol de sistemas hidráulicos es complejo y no se entiende tan ampliamente como el servocontrol eléctrico.



¿Cuán ruidoso son 70 decibeles?

El nivel de 70 decibeles es aproximadamente el del ruido generado por el tráfico pesado.

Sistemas hidráulicos impulsan a los robots más fuertes y rígidos, y por ende la selección del módulo de compresibilidad del aceite es un atributo de suma importancia. Un módulo de compresibilidad alta implica un sistema de respuesta rígido, de respuesta rápida y con un aumento de presión de rapidez correspondiente, mientras que uno de compresibilidad baja podrá

dar como resultado un sistema muy libre debido a la alta compresibilidad del aceite. Los sistemas o circuitos hidráulicos siempre tienen cuatro componentes esenciales: un depósito para almacenar el fluido, bombas para transportarlo, válvulas para controlar el flujo y un actuador para llevar a cabo los dictados del fluido sobre alguna carga. Igual que los actuadores rotativos neumáticos, los hidráulicos están disponibles en el mercado.

3.3



Actuadores eléctricos

Por lo general, se habla de los actuadores eléctricos como aquéllos donde un motor eléctrico acciona los eslabones del robot por medio de alguna transmisión mecánica como por ejemplo los engranes. En los primeros años de la robótica industrial, los robots hidráulicos eran los más comunes, pero las recientes mejoras en el diseño de motores eléctricos implicaron que la mayoría de los robots nuevos fueran de construcción completamente eléctrica. El primer robot comercial de accionamiento eléctrico fue introducido por ABB en 1974. Las ventajas y desventajas de un motor eléctrico son las siguientes:

Ventajas

- Amplia disponibilidad en el suministro de energía.
- El elemento de accionamiento básico en un motor eléctrico es normalmente más ligero que para la energía de fluidos.



¿Quién es ABB?

ABB es una empresa multinacional con sede en Zúrich, Suiza, que trabaja en las áreas de la tecnología de energía y automatización. La empresa fue constituida en 1988 por medio de la fusión entre ASEA de Suecia y Brown, Boveri & Cie. de Suiza. Tiene operaciones en más de 100 países y una de las manufacturas de robots industriales más grandes del mundo.

- Alta eficiencia en la conversión de la energía.
- Sin contaminación del ambiente de trabajo.
- En relación con el costo, la precisión y repetibilidad de los robots accionados por energía eléctrica es comúnmente mejor que la de robots accionados por fluidos.
- Por ser relativamente silenciosos y limpios, resultan muy respetuosos con el ambiente.
- Son de fácil mantenimiento y reparación.
- Los componentes estructurales pueden ser de peso ligero.
- El sistema de accionamiento es muy conveniente para el control electrónico.

Desventajas

- Los robots de accionamiento eléctrico frecuentemente requieren la incorporación de algún tipo de sistema de transmisión mecánica. Esto agrega masa y movimiento no deseable que requieren energía adicional y que pueden complicar el control.
- Debido a la complejidad más alta del sistema de transmisión, se generan costos adicionales para su adquisición y mantenimiento.
- Los motores eléctricos no son intrínsecamente seguros. Por lo tanto, no pueden usarse, por ejemplo, en ambientes explosivos.

Las desventajas mencionadas anteriormente son paulatinamente superadas por la introducción de sistemas motrices de accionamiento directo, donde el motor eléctrico es una parte relevante de la articulación del brazo del robot, por lo que se eliminan los elementos de transmisión. Además, la introducción de más recientes motores sin escobillas permite que se usen los robots eléctricos en algunas aplicaciones de riesgo de incendios, tales como la pintura con pulverizador, puesto que se ha eliminado la posibilidad de chispas en las escobillas del motor. Los diferentes tipos de motores eléctricos son motores de paso, de CD y CA.

3.3.1 Motores a pasos

Los motores a pasos (*Stepper Motors*) (también llamados en inglés como *stepping motors*) se utilizaron primero para el control remoto de los indicadores de dirección para tubos lanzatorpedos y cañones en buques de guerra británicos y, más tarde, para propósitos similares en la armada de Estados Unidos. Un tipo de motor de reluctancia variable fue patentado por vez primera en 1919, por C. L. Walker, un ingeniero civil escocés; sin embargo, su producción comercial no comenzó sino hasta 1950.

Estos motores son empleados en algunos robots en el más pequeño y término medio del rango industrial y con los robots de enseñanza y pasatiempo. También son ampliamente usados en otras aplicaciones industriales y tienen las ventajas de que no necesariamente requieren un sistema de retroalimentación y de los costos asociados. Sin embargo, son compatibles con muchos dispositivos de retroalimentación, si esto se requiriera, y son usados en configuraciones de servocontrol total en robots industriales de servicio medio. Puesto que se trata de motores de control digital, no necesitan el gasto adicional de equipos de conversión de digital



CD vs. CA

CD significa corriente directa o continua, mientras que CA significa corriente alterna. Las baterías en linternas, autos, etc., suministran CD. Para el uso doméstico, sin embargo, el suministro eléctrico es de CA con 230 voltios y 50 ciclos (en la India y otros países), 110 voltios, 60 ciclos (en Estados Unidos y otros países), y parecidos.

a analógica cuando se conectan a un sistema de control por computadora. Normalmente, la flecha del motor gira en forma incremental en pasos iguales en respuesta a un tren de impulsos de entrada programado. Como el rotor indexa una cantidad específica para cada pulso de control, todo error de posicionamiento es no acumulativo. Para conocer la posición final del rotor, todo lo que se requiere es contar el número de pulsos transmitidos al devanado de fase de la bobina del estator. El número de pulsos por unidad de tiempo determina la velocidad del motor. El rotor puede estar hecho para indexar lentamente, haciendo una pausa después de cada incremento, o puede moverse rápidamente generando un movimiento continuo que se llama “*slewing*” (hasta llegar a una velocidad de giro constante). El máximo par torsor dinámico en un motor de paso ocurre con bajas frecuencias de pulsos. Por lo tanto, puede fácilmente acelerar una carga. Una vez que se haya alcanzado la posición requerida y se terminen los impulsos de comando, la flecha se detiene sin necesidad de embragues o frenos. Los momentos de rotación o ángulos de paso reales de la flecha pueden obtenerse normalmente desde 1.8° hasta 90° , dependiendo de la selección particular del motor. Así, con un ángulo de paso nominal de 1.8° , una corriente de 1 000 pulsos dará un desplazamiento angular de $1\ 800^\circ$ o cinco revoluciones completas. También tienen una capacidad de velocidad baja sin necesidad de reducción de engranaje. Por ejemplo, si el motor mencionado anteriormente es accionado por 500 pulsos por segundo, girará a 150 RPM. Otra ventaja del motor a pasos es que la inercia del motor a menudo es baja, y también si más de un motor a pasos es accionado desde la misma fuente éstos se mantendrán perfectamente sincronizados. Algunas desventajas son que los motores a pasos tienen menor salida y eficiencia en comparación con otros, y que las entradas y circuitos de accionamiento tienen que estar cuidadosamente diseñados en relación con el par torsor y velocidad requeridas. Hay varios tipos de motores a pasos, por ejemplo, los de reluctancia variable, los de imanes permanentes y los híbridos.

i) Motor a pasos de reluctancia variable “Reluctancia magnética” o simplemente “reluctancia” es el término análogo de resistencia eléctrica. Igual que una corriente sólo sucede en un lazo cerrado, un flujo magnético ocurre sólo alrededor de una trayectoria cerrada, aunque tal vez ésta pueda ser más variada que el de una corriente. La figura 3.4a) muestra la forma básica del motor a pasos de reluctancia variable. El rotor está hecho de acero bajo carbono y tiene cuatro polos, mientras que el estator tiene seis. Cuando una de las fases, por ejemplo AA' , es excitada debido a una corriente de CD que pasa a través de las bobinas alrededor de los polos, las posiciones del rotor completan la trayectoria de flujo que se muestra en la figura 3.4a). Observe que existe una trayectoria de flujo principal a través de los dientes alineados de rotor y estator, y que las trayectorias de flujo secundarias ocurren como se indica. Cuando los dientes del rotor y el estator están alineados de esta manera, la reluctancia es minimizada y el rotor está en reposo en esta posición. Puede decirse que esta trayectoria de flujo es casi como un hilo elástico que constantemente está tratando de acortarse a sí misma. El rotor se moverá hasta que los polos de rotor y estator estén alineados. Esto se llama la posición de mínima reluctancia. Para girar el motor en sentido opuesto a las manecillas del reloj, se apaga la fase AA' y se excita la fase BB' . En ese momento la trayectoria de flujo principal tiene la forma indicada en las figuras 3.4b) y c). Esta forma del motor a pasos generalmente da ángulos de paso de 7.5° o 15° .

ii) Motor a pasos de imanes permanentes El método básico de operación de un tipo de motor de imanes (o magnetos) permanentes es similar al de reluctancia varia-

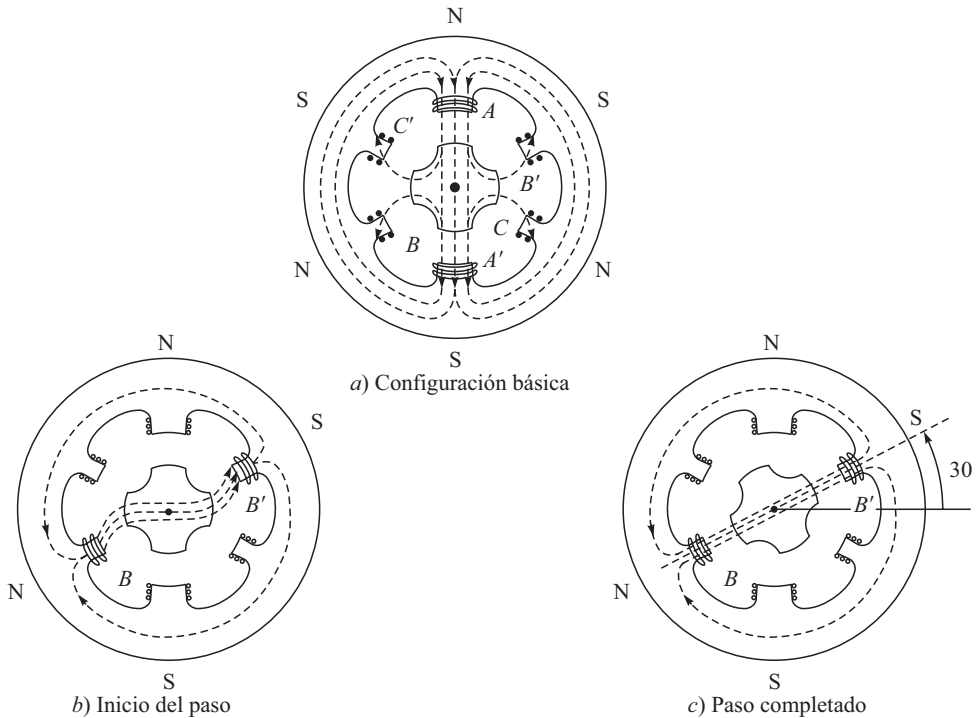


Figura 3.4 Motor a pasos de reluctancia variable

ble. Como se ilustra en la figura 3.5, hay dos bobinas, *A* y *B*, cada una de las cuales produce cuatro polos, pero que están desplazadas una de la otra por medio paso polar. El rotor es de construcción de imanes permanentes y tiene cuatro polos, tal como se ilustra. Cada polo está enrollado con devanado de campo y las bobinas que hay en los pares opuestos de polos están en serie. La corriente es suministrada desde una fuente de CD hasta el devanado a través de interruptores. Puede verse en la figura 3.5a) que el motor está en reposo y que los polos del rotor de imanes permanentes están sostenidos entre los polos residuales del estator. En esta posición, el rotor está enganchado, a menos que se aplique una fuerza de giro. Si se energizan las bobinas y se invierte en el primer pulso la polaridad magnética de los polos de la bobina *A*, el rotor sufrirá un par torsor y girará en sentido contrario a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 3.5b); los polos invertidos se identifican como *A'*.

Si ahora se invierten los polos de la bobina *B*, quedan *B'*, como se muestra en la figura 3.5c), el rotor nuevamente sufrirá un par torsor y dará otra vuelta hasta que los polos del rotor estén posicionados a medio camino entre los polos del estator. De este modo, cambiando las corrientes a través de las bobinas, el rotor gira 45° . Si en el primer impulso los polos de la bobina *B* hubieran sido invertidos, entonces el motor hubiera girado en el sentido de las manecillas del reloj. Los ángulos de paso que se producen comúnmente con este tipo de motor son 1.8° , 7.5° , 15° , 30° , 34° y 90° .

iii) Motor a pasos híbrido Los motores a pasos híbridos combinan las características de los motores de reluctancia variable y de imanes permanentes, teniendo un imán

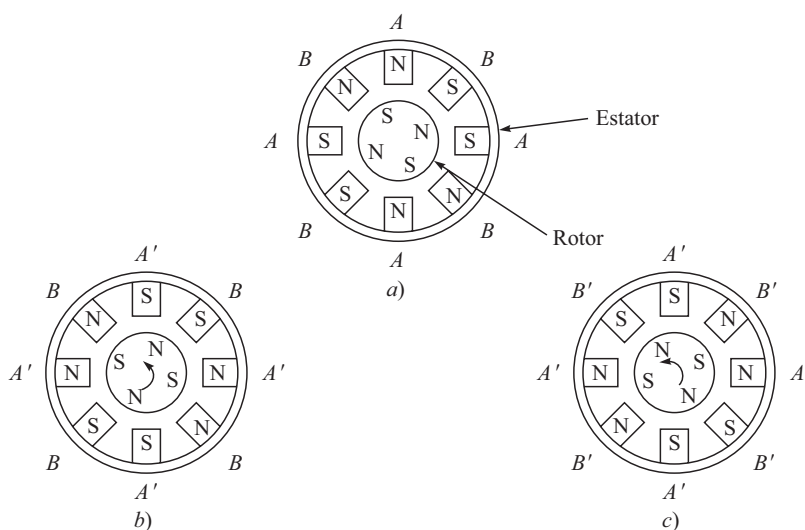


Figura 3.5 Motor a pasos de imanes permanentes

permanente interconectado en cubiertas de hierro que están cortadas para tener dientes, como se muestra en la figura 3.6. El rotor se coloca en la posición de reluctancia mínima en respuesta a que se estén energizando un par de bobinas del estator. Los ángulos de paso normales son 0.9° y 1.8° . De la descripción anterior resulta entonces obvio que la velocidad con la que se aplican los impulsos determina la velocidad del motor, el número total de impulsos determina el desplazamiento angular y el orden en el que se energizan las bobinas en la primera instancia determina la dirección de rotación. Es precisamente por esta facilidad de accionamiento, usando el control digital directo, que los motores a pasos son apropiados para su empleo en un robot controlado por computadora, aunque el motor sí requiere interactuar con una fuente de pulsos de alta corriente.

3.3.2 Motores de CD

Aunque mucha gente podría nunca haber tenido suficiente experiencia con sistemas neumáticos o hidráulicos, todos han tenido contacto casi diario con motores eléctricos. Ya sean motores CD (frecuentemente operados por baterías) para arrancar el auto u operar un juguete de niños, o motores CA (operados por la red eléctrica) para encender la licuadora, etc.,

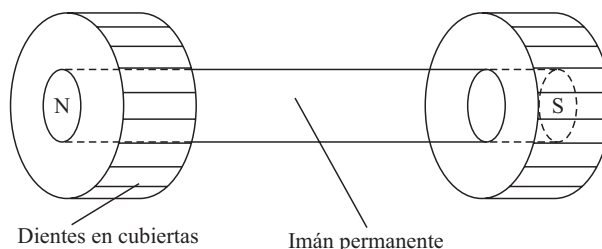
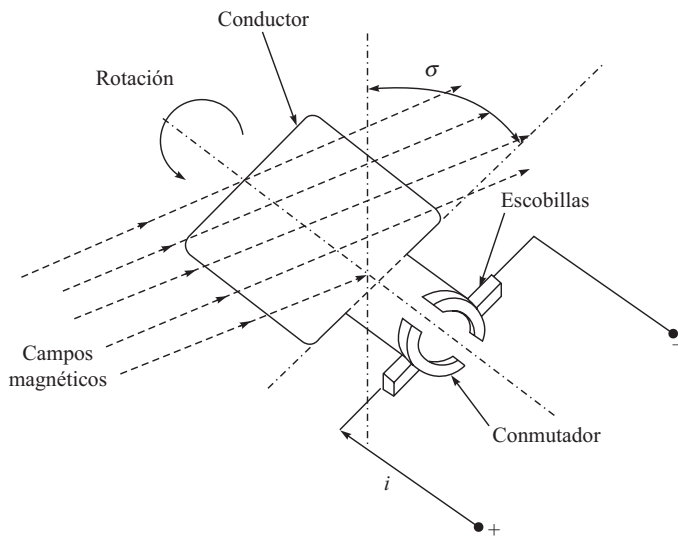
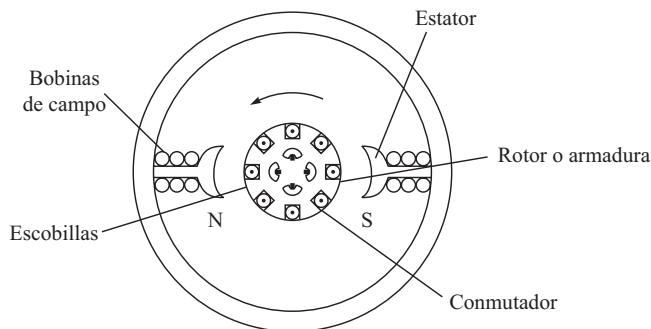


Figura 3.6 Motor a pasos híbrido

sus capacidades son bien conocidas. El primer robot industrial y comercial eléctricamente accionado fue introducido en 1974 por la gigantesca corporación sueca ASEA. Tradicionalmente, los expertos en robótica empleaban motores de DC (corriente directa) eléctricamente accionados para robots no sólo por la disponibilidad de versiones potentes, sino porque son fácilmente controlables con dispositivos electrónicos relativamente sencillos. Aunque se necesita corriente directa, rara vez se usan baterías (para robots no móviles); en cambio, se “rectifica” el suministro de CA para dar un equivalente adecuado de CD. La operación de un motor eléctrico se basa en el principio de que un conductor sufrirá una fuerza si una corriente eléctrica fluye con ángulos rectos hacia un campo magnético. Por lo tanto, se requiere dos componentes básicos para construir un motor: uno para producir el campo magnético —usualmente llamado estator— y otro para funcionar como conductor —comúnmente llamado armadura o rotor—. El principio se muestra en la figura 3.7a) para un elemento de un motor CD, mientras que un motor CD de dos polos se presenta en la figura 3.7b). El campo



a) Principio de un motor CD



b) Motor CD de dos polos con bobinas de campo

Figura 3.7 Motor CD

Tabla 3.3 Especificaciones de un motor CD (Catálogo RS)

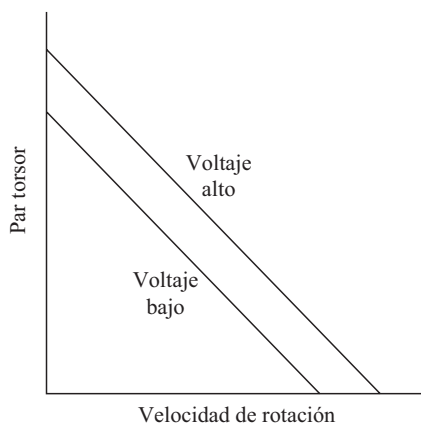
<i>Especificaciones técnicas</i>	
Marca	Parvalux
Núm. de parte del fabricante	PM2 160W511109
Tipo	Motor eléctrico industrial CD
Tamaño del eje (SMI)	M
Velocidad (rpm)	4 000 rpm
Potencia nominal (W)	160 W
Voltaje nominal (V_{CD})	50 V(CD)
Corriente de entrada	3.8 A
Altura (mm)	78 mm
Ancho (mm)	140 mm
Largo (mm)	165 mm

magnético podrá ser creado por “bobinas de campo” devanadas en el estator o por imanes permanentes. Si se usaran las bobinas de campo, recibirían una corriente eléctrica para crear los polos magnéticos en el estator. En la figura 3.7b), la corriente del rotor es suministrada a un conductor por medio de “escobillas” y “conmutadores”. La corriente que pasa a través del campo produce un par torsor en el conductor que tiene el máximo para $\sigma = 90^\circ$. Además, entre más alto sea el voltaje suministrado a las bobinas del estator del motor, más rápidamente girará el motor, lo que proporciona un método muy sencillo para el control de velocidad. De manera parecida, la variación de la corriente que recibe la armadura controla el par torsor. La inversión de la polaridad del voltaje causa que el motor gire en el sentido opuesto. Algunos robots grandes utilizan motores de CD de control de campo, es decir, motores en los cuales el par torsor es controlado por la manipulación de la corriente que va a las bobinas de campo. Estos motores permiten una mayor salida de potencia con altas velocidades y pueden dar una buena relación de potencia-peso. Especificaciones típicas de un motor CD se dan en la tabla 3.3, mientras que sus características de velocidad/par torsor se muestran en la figura 3.8 para diferentes valores de voltaje.

Sin embargo, puede decirse que para sistemas robóticos industriales, los métodos de control de campos excitados por corriente significan un tiempo de respuesta demasiado lento y causan pérdidas que hacen que el control por campos magnéticos permanentes y por armadura sea más atractivo.

i) Motores de CD de imanes permanentes (IP)

En el motor de imanes permanentes no se usa bobinas de campo y el campo es producido por los imanes permanentes. Algunos motores de (Imanes Permanentes) IP tienen bobinas devanadas sobre

**Figura 3.8** Características de velocidad del par torsor

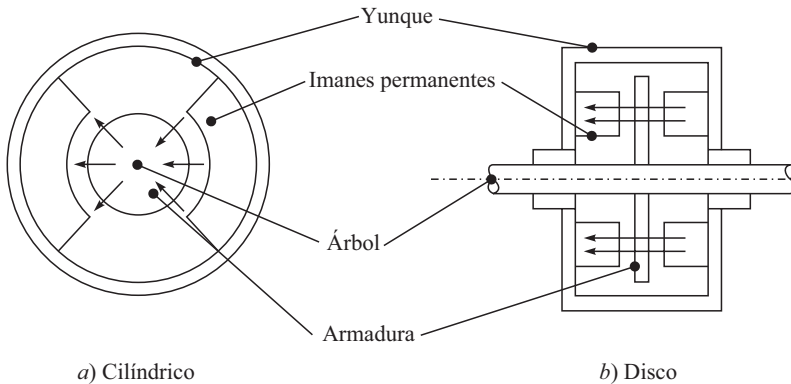


Figura 3.9 Dos tipos de configuraciones de motores de CD de imanes permanentes

los polos de imanes, pero éstas sólo sirven para recargar los imanes si su fuerza falla. Debido al hecho de que el flujo de campo es una constante, el par torsor de estos motores es directamente proporcional a la corriente de la armadura. Otras ventajas son: no se requieren fuentes de energía de excitación para las bobinas de campo, la confiabilidad es mejorada conforme no exista fallas en las bobinas de campo, y el que no existan pérdidas de potencia de las bobinas de campo se traduzcan en una mejora en la eficiencia y el enfriamiento. Dos tipos de configuración de IP se muestran en la figura 3.9. Se trata de los tipos cilíndricos y de disco.

El motor cilíndrico trabaja de manera parecida a la que ya se describió para otros motores de CD, excepto porque no hay bobinas de campo, mientras que el motor de disco tiene un diámetro largo y una armadura corta de algún material no magnético. El que más comúnmente se usa en robots industriales es el motor cilíndrico.

ii) Motores de CD de imanes permanentes sin escobillas Un problema de los motores de CD es que requieren un conmutador y escobillas a fin de invertir periódicamente la corriente a través de cada bobina de la armadura. Las escobillas hacen un contacto de deslizamiento con los conmutadores, saltan chispas entre los dos y, en consecuencia, sufren desgaste. Por lo tanto, las escobillas tienen que cambiarse periódicamente y la superficie de los conmutadores debe renovarse. Para evitar estos problemas se diseñaron motores sin escobillas que consisten básicamente en una secuencia de la bobina del estator y un rotor de imanes permanentes. Un conductor que lleva corriente en un campo magnético experimenta una fuerza; de igual manera, como consecuencia de la tercera ley de movimiento de Newton, el imán también sufrirá una fuerza opuesta e igual. En el motor CD convencional, el imán está fijo y se hace que los conductores de corriente se muevan. En el motor CD de imanes permanentes sin escobillas el mecanismo es al contrario: los conductores de corriente están fijos y el imán se mueve. El rotor es un imán

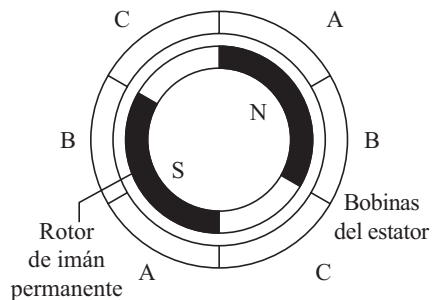


Figura 3.10 Motor CD de imanes permanentes sin escobillas

permanente de ferrita o cerámico. La figura 3.10 muestra la forma básica de uno de estos motores. La corriente que va a las bobinas del estator es electrónicamente cambiado por transistores en secuencia alrededor de las bobinas, donde la conmutación está controlada por la posición del rotor, de tal modo que siempre hay fuerzas que actúan sobre el imán, haciendo que gire en el mismo sentido.

Los motores “sin escobillas” tienen muchas ventajas sobre los motores CD convencionales; por ejemplo:

- Tienen una mejor disipación de calor, ya que éste se pierde más fácilmente desde el estator que desde el rotor.
- Hay una inercia reducida del rotor.
- Los motores sin escobillas son menos costosos.
- Son mucho más duraderos.
- Pesan menos.
- Son de menores dimensiones, pero con una potencia comparable.
- La ausencia de escobillas reduce los costos de mantenimiento debido al desgaste de escobillas y conmutadores, y también permite que los robots eléctricos se utilicen en áreas de peligro, por ejemplo, en atmósferas inflamables, como aplicaciones de aspersión de pintura.

Una desventaja es que el sistema de control para motores sin escobillas es relativamente más caro.

3.3.3 Motores CA

Hasta hace poco, los motores CA (de corriente alterna) no se habían considerado apropiados para robots debido a los problemas involucrados en el control de sus velocidades. En su forma más sencilla, el motor CA consiste en electroimanes externos alrededor de un rotor central pero sin ninguna forma de mecanismo de conmutación mecánico para los electroimanes. Sin embargo, puesto que la corriente alterna (tal como el suministro eléctrico público) constantemente cambia de polaridad (primero fluyendo en un sentido, luego en el opuesto, varias veces por segundo, por ejemplo, 50 veces en la India y 60 en Estados Unidos), es posible conectar el suministro de CA directamente a los electroimanes. La inversión alterna del sentido de la corriente a través de las bobinas realizará la misma tarea de cambio de polaridad que en los motores DC. El campo magnético de las bobinas parecerá “girar” (casi como si las bobinas por mismas hubiesen sido giradas mecánicamente). Especificaciones típicas de un motor CA se muestran en la tabla 3.4. Las características de velocidad/par torsor de los motores CA se presentan en la figura 3.11.

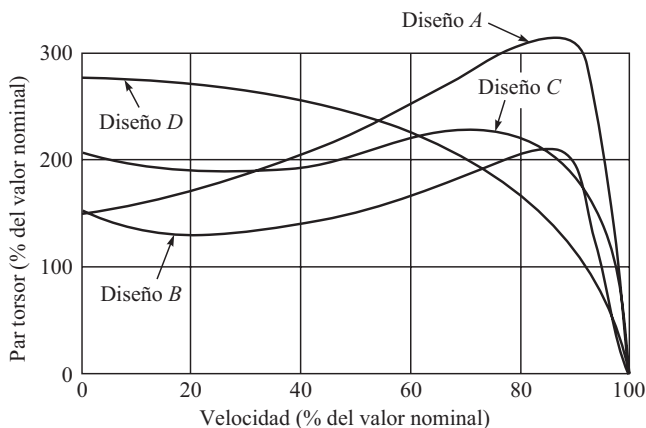
Los motores CA no han sido extensamente empleados en aplicaciones robóticas debido a los problemas que surgen en el control de velocidad. En principio, entre más alta sea la frecuencia de la corriente alterna aplicada al motor, más rápidamente girará. Hasta hace poco, en gran medida fue muy impráctico suministrar frecuencias variables en forma simultánea a un número de accionamientos de ejes. Observe que en ambos tipos de motores el electromagnetismo se usa para suministrar el frenado regenerativo con el fin de disminuir los tiempos de desaceleración y minimizar el exceso del eje. Ambos tipos demuestran un incremento de velocidad cuando hay un aumento de la señal de entrada. Sin embargo, por cualquier aumento

Tabla 3.4 Especificaciones de un motor CA (Catálogo RS)

<i>Especificaciones técnicas</i>	
Marca	ABB
Núm. de parte del fabricante	1676687
Tipo	Motores industriales eléctricos monofásicos y trifásicos
Voltaje de alimentación	220-240 V _{CA} 50 Hz
Potencia de salida	180 W
Corriente de entrada	0.783 A
Diámetro del árbol	14 mm
Largo del árbol	30 mm
Velocidad	1 370 rpm
Par torsor nominal	1.3 Nm
Par de arranque	1.3 Nm
Altura	150 mm
Largo	213 mm
Ancho	120 mm

de la señal de entrada dado (por voltaje o por frecuencia de voltaje), la velocidad del motor no puede pronosticarse con precisión. Tienen que hacerse preparativos adicionales para medir la velocidad del motor y comparar esta velocidad real con la velocidad del comando.

Los motores de corriente alterna (CA) pueden clasificarse en dos grupos, monofásicos y polifásicos, donde cada grupo está subdividido en motores de inducción y motores síncronos. Los monofásicos se usan normalmente para requerimientos de baja potencia, mientras que los polifásicos, para potencias mayores. Los motores de inducción son por lo regular más económicos que los que son síncronos y, por lo tanto, se emplean muy extensamente.

**Figura 3.11** Características normales de velocidad/par torsor para cuatro diferentes diseños de un motor de inducción CA.

[Cortesía: <http://www.offshoresolutions.com/products/motors/ac/induction.htm>]

i) El motor de inducción monofásico con rotor jaula de ardilla

Este motor consiste en un rotor de jaula de ardilla hecho de barras de cobre o aluminio que caben en ranuras en los anillos de extremos para formar circuitos eléctricos completos, como los que se muestran en la figura 3.12. No hay conexiones eléctricas externas al rotor. El motor básico consiste en este rotor con un estator que tiene un conjunto de devanados. Cuando una corriente alterna pasa a través de los devanados del estator, se produce un campo magnético alternativo. Como resultado de la inducción electromagnética, fuerzas electromagnéticas son inducidas en los conductores del rotor y el flujo de



corriente en el rotor. Inicialmente, cuando el rotor es estacionario, las fuerzas que hay en los conductores que portan corriente o en el rotor del campo magnético del estator son tales que dan como resultado que no exista un par torsor neto. El motor no es de arranque automático. Existen métodos para hacer que el motor sea de arranque automático y para dar este impulso para arrancarlo. Uno de estos métodos es el de usar un devanado de arranque auxiliar para dar al rotor un empuje inicial. El rotor gira con una velocidad determinada por la frecuencia de la corriente alterna que se aplica al estator. Para un suministro de frecuencia constante a un motor monofásico de dos polos, el campo magnético alternará con esta frecuencia. Esta velocidad de rotación del campo magnético se denomina *velocidad síncrona*. El rotor nunca igualará esta frecuencia de rotación y normalmente difiere de ella en 1 a 3%. Esta diferencia se llama *slip* (diferencia de velocidad entre la rotación síncrona y la operativa). Por lo tanto, para un suministro de 50 Hz, la velocidad de rotación del rotor será casi 50 revoluciones por segundo.

ii) El motor de inducción trifásico Como se muestra en la figura 3.13a), este motor es parecido al de inducción monofásico, pero tiene un estator con tres devanados ubicados con 120° aparte, donde cada devanado está conectado a una de las tres líneas del suministro. Puesto que las tres fases alcanzan sus corrientes máximas en diferentes momentos, puede considerarse que el campo magnético gira alrededor de los polos del estator, completando una rotación en un ciclo completo de la corriente. La rotación del campo es mucho más suave que en el motor monofásico. El motor trifásico tiene una gran ventaja sobre el motor monofásico por ser de arranque automático. El sentido de rotación se invierte por el intercambio de cualquiera de dos de las conexiones de línea, lo que cambia el sentido de rotación del campo magnético.

iii) Motores síncronos Los motores síncronos tienen estatores similares a los que se describen arriba para los motores

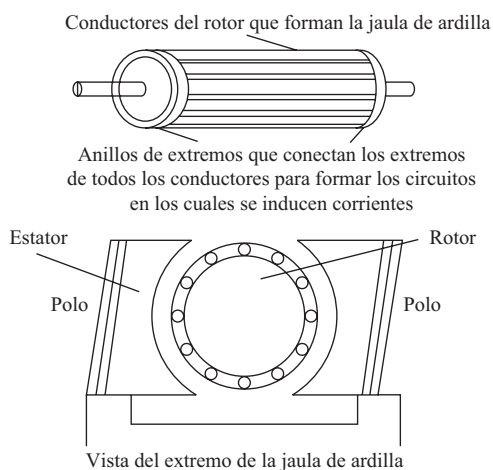


Figura 3.12 Motor de inducción monofásico

de inducción, pero un rotor es un imán permanente. El campo magnético producido por el estator gira, así que el imán lo hace con él. Con un par de polos por fase de suministro, el campo magnético gira 360° en un ciclo del suministro, por lo que la frecuencia de rotación en esta disposición es la misma que la frecuencia del suministro. Se utilizan motores síncronos cuando se requiere una velocidad precisa. Estos motores no son de arranque automático, por lo que tiene que emplearse algún sistema para arrancarlos.

En comparación con los motores de CD, los motores CA tienen la gran ventaja de ser más económicos, resistentes, confiables y libres de mantenimiento. Sin embargo, el control de velocidad es por lo general más complejo que en motores DC; como consecuencia, un accionamiento de CD con control de velocidad generalmente resulta más barato que un accionamiento CA con control de velocidad, aunque la diferencia de precios se reduce cada vez más como resultado de desarrollos tecnológicos y de la reducción de precios de dispositivos de estado sólido. El control de velocidad de motores CA está basado en la disponibilidad de un suministro de frecuencia variable, puesto que la velocidad de estos motores es determinada por la frecuencia del suministro. En algunos casos especiales, por ejemplo, en motores CA de inducción de rotor devanado, la velocidad puede ser controlada mediante el acceso al circuito del rotor, donde diferentes valores de resistencia pueden insertarse en el circuito del rotor.

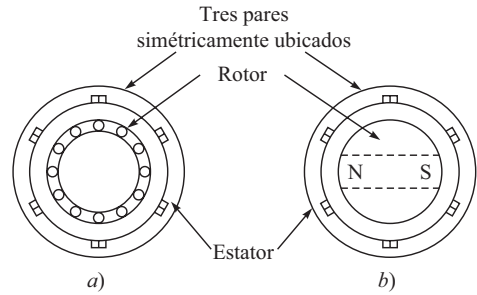


Figura 3.13 Motor de CA trifásico

3.4



Selección de motores

Para cualquier aplicación de robots tiene que decidirse cuál de los actuadores disponibles es el más adecuado. Tiene que tomarse en consideración precisión de posicionamiento, confiabilidad, velocidad de operación y costo, así como otros factores.

Los motores eléctricos son por naturaleza limpios y con capacidad para trabajar con alta precisión si son operados correctamente. En contraste, los sistemas neumáticos no son capaces de operar una trayectoria continua de alta precisión, y los actuadores hidráulicos requieren del uso de aceite a presión. Los sistemas hidráulicos pueden generar mayor potencia en un volumen compacto que en los motores eléctricos. El aceite a presión puede conducirse por tuberías hacia actuadores sencillos, capaces de generar pares de torsión con altos valores y operaciones rápidas. También hay que tomar en cuenta que la potencia necesaria para controlar una válvula electrohidráulica es pequeña. Básicamente, este trabajo se realiza mediante la compresión del aceite y suministrarlo a los accionamientos del brazo del robot. Toda la energía puede ser suministrada por un solo motor eléctrico poderoso y eficiente que acciona la bomba hidráulica que está en la base del robot o ubicada en alguna distancia. La potencia es controlada en válvulas electrohidráulicas compactas. Sin embargo, las válvulas electrohidráulicas de alta precisión son más costosas y menos confiables que los amplificadores y controladores eléctricos de baja potencia. Por otra parte, los motores eléctricos

deben tener controles individuales capaces de controlar su potencia. En robots de mayores dimensiones, esto requiere la conmutación de 10 a 50 amperios con 20 a 100 voltios. La conmutación de la corriente tiene que ser rápida; de lo contrario, habrá una gran disipación de potencia en el circuito de conmutación que causará un exceso de calor. Los motores eléctricos pequeños usan circuitos de conmutación sencillos y son fáciles de controlar por medio de los circuitos de baja potencia. Los motores a pasos son particularmente sencillos para la operación de un lazo abierto. La ventaja más grande de un sistema hidráulico es la seguridad de su operación.

Como regla general, se prefieren actuadores hidráulicos donde se requieren movimientos rápidos con altos pares de torsión, en rangos de potencia que estén aproximadamente en el orden de los 3.5 kW, a menos que no pueda tolerarse la ligera posibilidad de una fuga de aceite. Los motores eléctricos son preferidos para niveles de potencia que estén por debajo de a 1.5 kW aproximadamente, a menos que haya un peligro debido al posible incendio de materiales explosivos. En rangos entre 1-5 kW, podrá determinar la decisión la disponibilidad de un robot en un sistema de coordenadas particular con características específicas o por un costo más bajo. La confiabilidad de todo tipo de robots manufacturados por fabricantes reconocidos industrialmente es suficientemente buena. No obstante esto no es el factor más determinante.

3.4.1 Cálculos

Se necesitan cálculos matemáticos simples para determinar el par torsor, velocidad y características de potencia de un actuador o motor para diferentes aplicaciones. El par torsor se define en términos de una fuerza multiplicada por distancia o momento. Una fuerza f , a la distancia a del centro de rotación, tiene un momento o par torsor τ , o sea $\tau = fa$. En términos generales, la potencia P es transmitida en un eje de mando y es determinada por el par torsor τ , multiplicado por la velocidad angular ω . La potencia P es expresada como $P = \tau\omega$. Como ejemplo, el cálculo puede señalar cuántos kilovatios o caballos de potencia se requieren en un motor que se usa para accionar un brazo de robot de 2 metros que levanta una masa de 25 kg a 10 rpm. Si la masa del brazo es considerada igual a cero, entonces

$$P = (25 \times 9.81 \times 2) (2\pi \times 10/60) = 0.513 \text{ kW}$$

El uso de ecuaciones simples de este tipo es a menudo suficiente para lograr una aproximación útil de un valor deseado. Cálculos más detallados pueden considerar todos los datos apropiados, usando las ecuaciones de estática y dinámica que apliquen.

RESUMEN

Un robot se mueve por actuadores. Se explican diferentes formas de actuadores, a saber: neumáticos, hidráulicos y eléctricos. Para los motores eléctricos, se presentan sus especificaciones normales así como las características de velocidad/par torsor. También se resume a grandes rasgos cómo debe seleccionarse un motor adecuado.



EJERCICIOS

- 3.1 Mencione los componentes de un sistema actuador de una articulación.
- 3.2 ¿Qué es un actuador?
- 3.3 Mencione los requerimientos de un actuador para aplicaciones robóticas.
- 3.4 ¿Cuáles son los diferentes tipos de actuadores?
- 3.5 Haga una lista de tres ventajas y tres desventajas de un actuador neumático.
- 3.6 Indique las aplicaciones típicas de los actuadores neumáticos.
- 3.7 ¿Por qué se prefieren actuadores neumáticos en robots de montaje de la industria?
- 3.8 ¿Por qué se necesita un tanque de almacenamiento en actuadores neumáticos?
- 3.9 ¿Qué componente provee básicamente el movimiento mecánico?
- 3.10 ¿Cuándo se prefieren actuadores hidráulicos en los sistemas robóticos?
- 3.11 ¿Qué fluido es utilizado en actuadores hidráulicos y cuál es el rango de presión?
- 3.12 Indique los diferentes tipos de actuadores hidráulicos.
- 3.13 ¿Cuáles son los riesgos al usar actuadores hidráulicos?
- 3.14 ¿Cuál es la función de la Válvula de Control de Direccional?
- 3.15 Indique las ventajas y desventajas de los motores eléctricos.
- 3.16 ¿Cuáles son los tipos de motores a pasos?
- 3.17 ¿Por qué se prefiere utilizar motores de CD como si fueran servomotores?
- 3.18 Describa las diferencias funcionales entre los motores a pasos, los CD y los CA.
- 3.19 Dibuje una gráfica típica de velocidad/par torsor de un motor CD.
- 3.20 ¿Cómo se selecciona un motor?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

Basándose en búsquedas en la web, conteste las siguientes preguntas:

- 3.21 Mencione tres empresas que fabrican tanto actuadores neumáticos como hidráulicos. ¿Cuáles son los precios de estos actuadores?
- 3.22 Busque por lo menos tres fabricantes de motores eléctricos CD y CA. ¿Cuáles son sus precios?
- 3.23 ¿Cuál es un valor típico de la constante del motor CD?
- 3.24 Infórmese si existe algún software que pueda especificar un motor con base en los requerimientos de carga y la velocidad de un robot. Indíquelo.
- 3.25 Encuentre dos empresas que fabriquen motores de accionamiento directo.



Capítulo

4

Sensores

Los sensores en los robots son como nuestros ojos, nariz, oídos, boca y piel. A semejanza de los órganos humanos, por ejemplo los ojos o la piel, términos como visión, táctil, etc., han surgido en la jerga de los sensores de robots. Tal como los seres humanos, los robots tienen que recabar amplia información sobre su ambiente a fin de funcionar de manera efectiva. Tienen que recoger un objeto y saber que lo han recogido. Cuando el brazo del robot se mueve a través del espacio cartesiano, tiene que evitar obstáculos y acercarse a los objetos con una velocidad controlada. Algunos objetos son pesados; otros, frágiles; y algunos más, demasiado calientes para ser manejados. Estas características de los objetos y del ambiente tienen que reconocerse e introducirse en la computadora que controla los movimientos del robot. Por ejemplo, para mover el efector final de un robot, con o sin carga, a lo largo de una trayectoria deseada y ejercer una fuerza definida sobre un objeto, el efector final y los sensores (que normalmente se ubican en las articulaciones) trabajan en coordinación con el controlador del robot (microprocesador, computadora o microcontrolador, cualquiera que fuere el caso).

4.1



Clasificación de sensores

Las capacidades más comunes requeridas por un robot son las siguientes:

i) Tacto sencillo Presencia o ausencia de un objeto.

ii) Palpación o tacto complejo Presencia de un objeto más alguna información sobre su tamaño o forma.

iii) Fuerza simple Fuerza medida a lo largo de un solo eje.

iv) Fuerza compleja Fuerza medida a lo largo de dos o más ejes.

v) Proximidad Detección de un objeto sin contacto.

vi) Visión simple Detección de bordes, agujeros, esquinas, etcétera.

vii) Visión compleja Reconocimiento de formas.

Para el control de movimiento, dispositivos como potenciómetros, generadores tacométricos, encoders, etc., se usan como sensores en las articulaciones, mientras que sensores basados en galgas extensométricas, etc., se usan en el efector final para el control de la fuerza de contacto. Una clasificación amplia de sensores se encuentra en la figura 4.1.



Sensor vs. transductor

Un sensor es una especie de transductor, mientras que un transductor es un dispositivo que convierte un tipo de energía en otro para varios propósitos, incluida la medición de parámetros físicos como posición, velocidad, etcétera.

4.2



Sensores internos

Como lo sugiere el nombre, los sensores internos se emplean para monitorear el estado interno de un robot, es decir, su posición, velocidad, aceleración, etc., en un momento determinado. Basado en estas informaciones, el controlador decide acerca del comando de control. Dependiendo de las diferentes cantidades que miden, los sensores se denominan como de posición, velocidad, aceleración o fuerza.

4.2.1 Sensores de posición

Los sensores de posición miden la posición de cada articulación, es decir, el ángulo de articulación de un robot. A partir de dichos ángulos puede encontrarse la configuración del ejecutor final, y ubicar su posición y orientación por medio de la cinemática directa, que se revisará en el capítulo 6. A continuación se explican los diferentes sensores de posición.

i) Encóder El encóder es un dispositivo óptico digital que convierte el movimiento en una secuencia de pulsos digitales. Mediante el conteo de un solo bit o la decodificación de un conjunto de bits, los pulsos pueden convertirse en medidas relativas o absolutas. De este modo, los encoders son de tipo incremental o absoluto. Además, cada tipo puede ser lineal y rotatorio a su vez.

a) Encóder lineal incremental Como se muestra en la figura 4.2a), este encóder tiene una escala transparente con una retícula opaca. El tamaño del espesor de las líneas de la retícula y el del espacio entre ellas son iguales y se encuentran en el rango de micrones. De un lado, la escala se equipa con una fuente de luz y un lente de condensador. Del otro, hay celdas

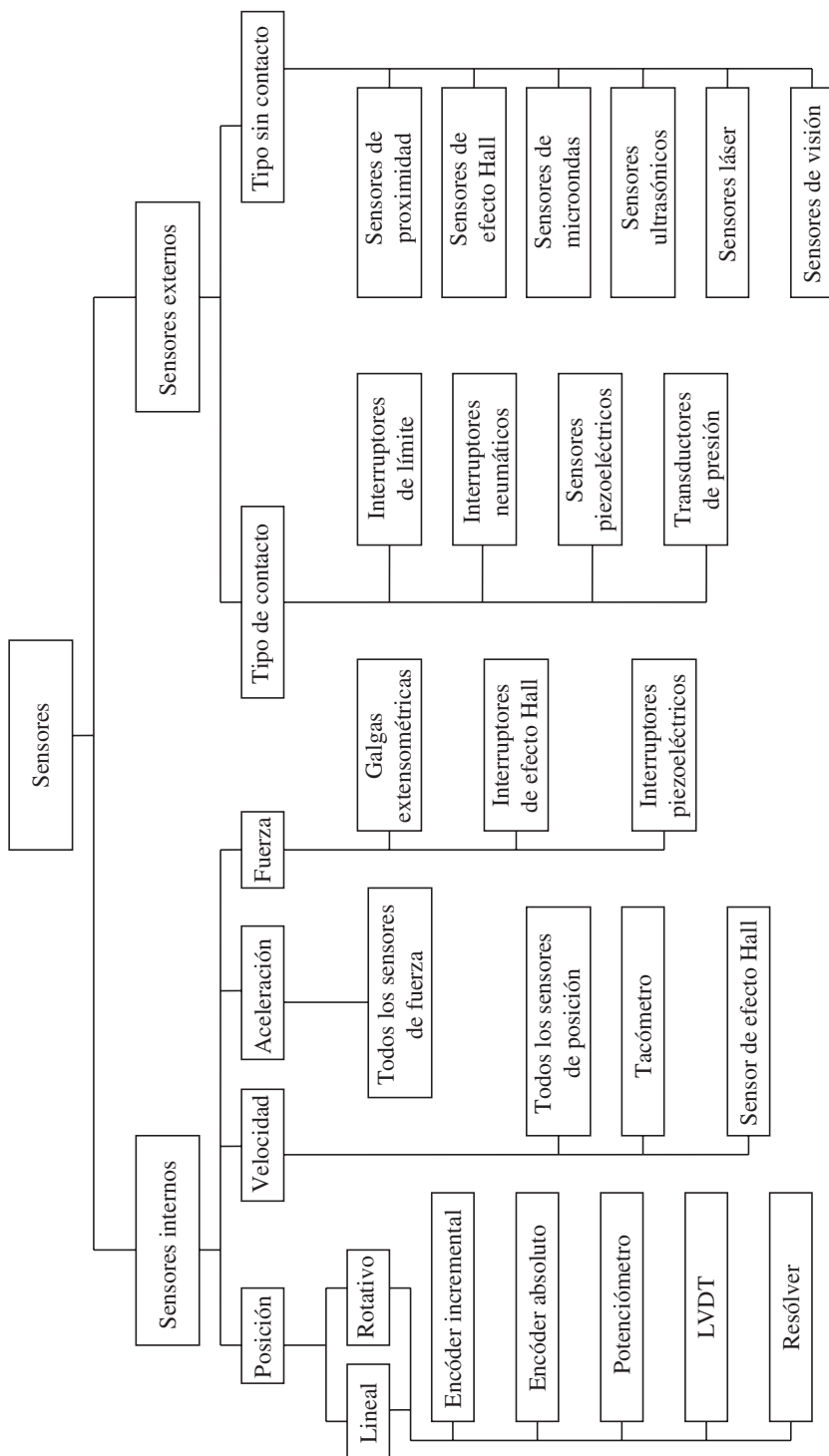


Figura 4.1 Clasificación de sensores

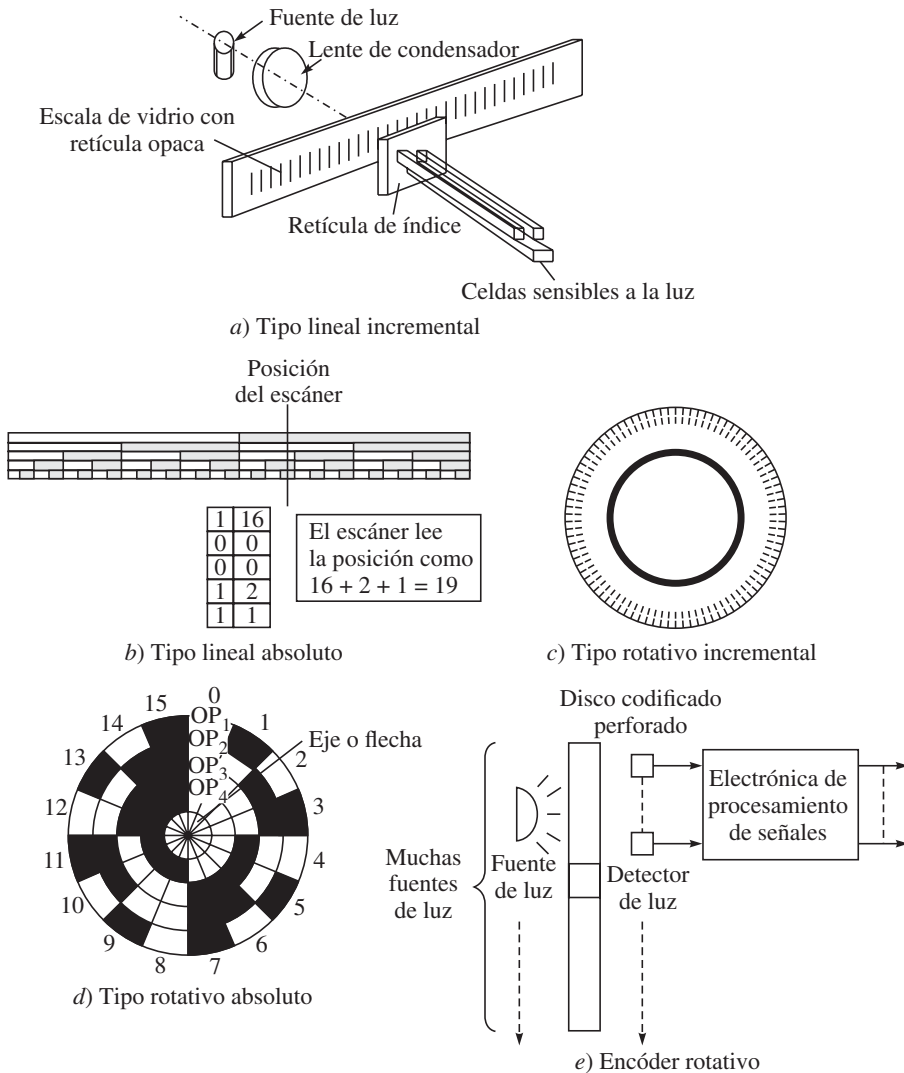


Figura 4.2 Encóders

sensibles a la luz. La resistencia de las celdas (fotodiodos) disminuye cada vez que reciben un rayo de luz. De este modo, se genera un pulso cada vez que un rayo de luz es atravesado por la línea opaca. Este pulso se introduce en el controlador que actualiza a un contador (un registro de la distancia recorrida).

b) Encóder lineal absoluto En principio, se parece al encóder lineal incremental. La diferencia es que da un valor absoluto de la distancia recorrida en cualquier momento. Así, las posibilidades de perder los pulsos a altas velocidades son menores. La salida es digital en este caso. La escala se marca con una secuencia de tiras opacas y transparentes, como se muestra en la figura 4.2b). Si el bloque opaco que aparece en la escala de la ilustración repre-

senta 1 (uno) y el bloque transparente 0 (cero), entonces la columna de la extrema izquierda mostrará un número binario como 00000, es decir, un valor decimal de 0, y la columna siguiente mostrará un número binario 00001, es decir, una valor decimal de 1.

c) *Encóder rotativo incremental* Se parece al encóder incremental lineal, con la diferencia de que las retículas se encuentran en este caso en un disco, como en la figura 4.2c). El valor común del espesor de los espacios transparentes es igual a 20 micrones. Hay dos conjuntos de líneas de retículas en diferentes círculos que detectan el sentido de rotación, lo que permite mejorar la precisión del sensor.

Hay otro círculo que sólo contiene una marca de retícula. Éste se usa para la medición del número de revoluciones completadas.

Tabla 4.1 Muestra de códigos grises

Decimal	Código binario	Código gris
0	0000	0001
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110

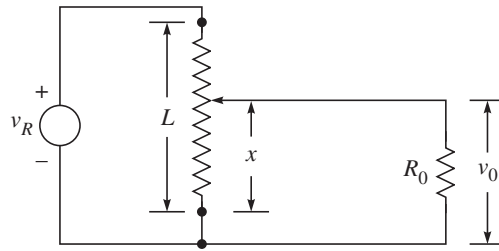
d) *Encóder rotativo absoluto*

Parecido al encóder lineal absoluto, el disco se divide en un número de tiras circulares, y cada tira tiene segmentos de arco definidos, como se muestra en la figura 4.2d). Este sensor proporciona directamente la salida digital (absoluta). El encóder se monta directamente sobre el eje del motor o con algún engranaje para aumentar la precisión de medición. Con el fin de evitar ruidos en este encóder, a veces se usa una escala gris. Un código gris, a diferencia de los códigos binarios, permite que sólo uno de los bits binarios en una secuencia de código cambie entre líneas radiales. También impide que se confundan los cambios en la salida binaria del encóder absoluto cuando el encóder oscila entre puntos. Una muestra de un código gris se presenta en la tabla 4.1 para algunos números. Observe la diferencia entre los códigos grises y binarios.

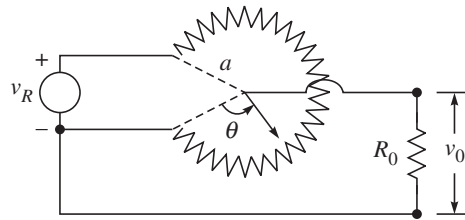
La disposición básica del encóder rotativo se presenta en la figura 4.2e).

ii) Potenciómetro El potenciómetro, también llamado simplemente “poti”, es un dispositivo de resistencia variable que expresa desplazamientos lineales o angulares en términos de voltaje, tal como se muestra en las figuras 4.3a) y b), respectivamente. Consiste en una clavija deslizante que hace contacto con un elemento resistivo; conforme se mueve este punto de contacto, la resistencia entre el contacto deslizante y las conexiones de los extremos del dispositivo cambia en proporción al desplazamiento, x y θ para potenciómetros lineales y angulares, respectivamente.

iii) LVDT El transformador diferencial lineal variable (LVDT) es uno de los transductores de desplazamiento que más extensamente se usa, particularmente cuando se necesita alta precisión. Genera una señal de CA cuya magnitud se relaciona con el desplazamiento de un núcleo móvil, como se indica en la figura 4.4. El concepto básico es el de un núcleo férreo que se mueve en un campo magnético, donde el campo se produce de un modo similar al campo de un transformador estándar. Existe un núcleo central, rodeado por dos bobinas secundarias idénticas y una bobina principal, como se muestra en la figura 4.4. Conforme el núcleo cambia su posición con respecto a las bobinas, cambia también el campo magnético y, por tanto, se modifica la amplitud de voltaje en la bobina secundaria como una función

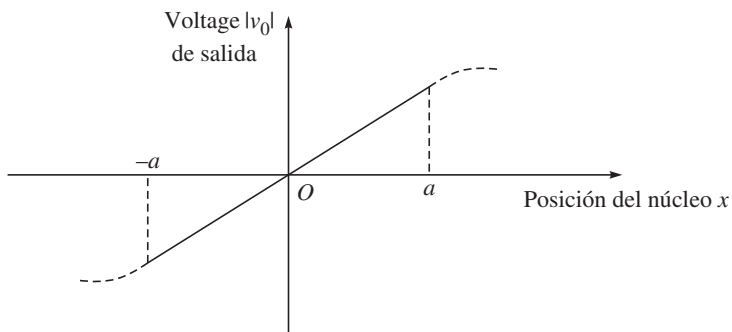
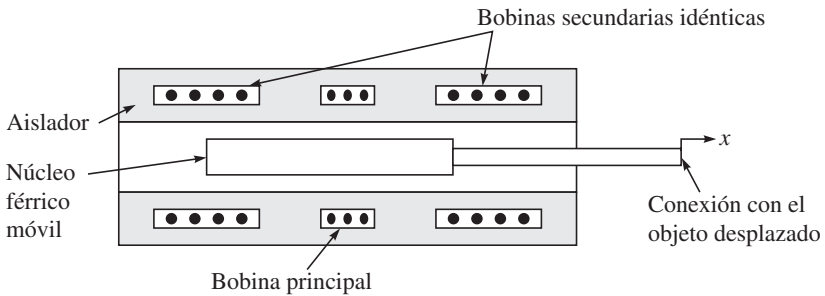


a) Tipo lineal



b) Tipo rotatorio

v_R : Voltaje de referencia; v_0 : Voltaje medido
 L, x, R_0, a, θ : Otros parámetros físicos

Figura 4.3 Potenciómetros

a : Valor de x para la zona lineal

Figura 4.4 Principio del LVDT

del desplazamiento del núcleo a través de un segmento considerable. Un transformador diferencial rotatorio variable (RVDT) opera con el mismo principio que el LVDT, y también está disponible con un rango de aproximadamente $\pm 40^\circ$.

iv) Sincronizadores y resolvers Mientras que los encoders producen salidas digitales, los sincronizadores y resolvers proporcionan señales análogas como salida. Éstos consisten en un eje (flecha) giratorio (rotor) y una carcasa estacionaria (estator). Sus señales tienen que convertirse a la forma digital por medio de un convertidor analógico a digital antes de que la señal sea introducida a la computadora. Como se ilustra en la figura 4.5, los sincronizadores y resolvers emplean rotores de un solo devanado que giran dentro de estatores fijos. En un sincronizador sencillo, el estator tiene tres devanados, orientados a 120° uno del otro y eléctricamente conectados en una conexión “Y”. Los resolvers difieren de los sincronizadores en que sus estatores sólo tienen dos devanados orientados a 90° . Puesto que los sincronizadores tienen tres bobinas de estator en una orientación de 120° , son más difíciles de fabricar que los resolvers y, por tanto, más caros.

Los resolvers modernos, en contraste, están disponibles sin escobillas ya que emplean un transformador para acoplar las señales del rotor desde el estator al rotor. El devanado principal de este transformador se ubica en el estator, y el secundario en el rotor. Otros resolvers utilizan las escobillas o anillos colectores tradicionales para acoplar la señal al devanado del rotor. Los resolvers sin escobillas son más resistentes que los sincronizadores porque no hay riesgo de que las escobillas puedan romperse o soltarse, por lo que la vida útil de un resolver sin escobillas sólo está limitada por sus cojinetes. La mayoría de los resolvers se fabrican para trabajar a en un rango de de 2V hasta 40V RMS y a frecuencias de entre 400 Hz a 10 kHz. Las precisión angular abarca de 5 minutos de arco hasta 0.5 minutos de arco. (Hay 60 minutos de arco en un grado y 60 segundos de arco en un minuto de arco.)

En la operación, los sincronizadores y resolvers se parecen a transformadores rotatorios. El devanado del rotor se excita mediante un voltaje de referencia de CA con frecuencias de hasta algunos kHz. La magnitud del voltaje inducido en cualquier devanado del estator

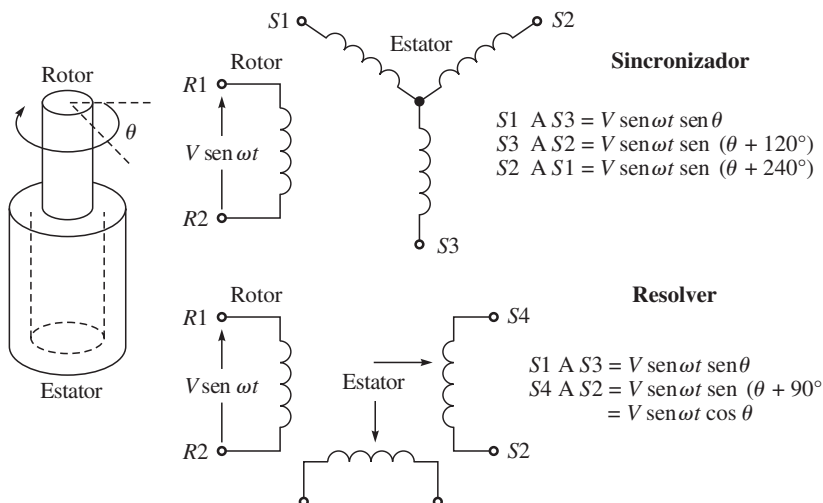


Figura 4.5 Sincronizadores y resolvers

es proporcional al seno del ángulo θ entre el eje de la bobina del rotor y el eje de la bobina del estator. En el caso de un sincronizador, el voltaje inducido a través de cualquier par de terminales del estator será la suma vectorial de los voltajes a través de las dos bobinas conectadas. Por ejemplo, si el rotor de un sincronizador se excita mediante un voltaje de referencia $V \sin(\omega t)$ a través de sus terminales R1 y R2, la terminal del estator verá voltajes en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V \sin(\omega t) \sin \theta \\ V \sin(\omega t) \sin(\theta + 120^\circ) \\ V \sin(\omega t) \sin(\theta + 240^\circ) \end{aligned}$$

donde V y ω son la amplitud de entrada y frecuencia, respectivamente, mientras que θ es el ángulo del eje (flecha). En el caso de un resólver con un voltaje de referencia de CA del rotor de $V \sin(\omega t)$, los voltajes en las terminales del estator serán

$$\begin{aligned} S1 \text{ a } S3 &= V \sin(\omega t) \sin \theta \\ S4 \text{ a } S2 &= V \sin(\omega t) \sin(\theta + 90^\circ) = V \sin(\omega t) \cos \theta \end{aligned}$$

Como se mencionó anteriormente, la salida de estos sincronizadores y resólvres primero tiene que digitalizarse. Para este propósito se utilizan convertidores analógicos-digitales, que normalmente son de 8 o 16 bits. Ocho bits significa que el rango completo de señales analógicas será convertido en un máximo de $2^8 = 256$ valores.

4.2.2 Sensores de velocidad

Los sensores de velocidad realizan la medición tomando medidas de posición consecutivas a intervalos de tiempo constante, calculando la razón de cambio respecto al tiempo de los valores de posición, o lo determina en forma directa con base en diferentes principios.

i) Todos los sensores de posición Básicamente todos los sensores de posición, cuando se utilizan con ciertos límites de tiempo, pueden dar la velocidad, por ejemplo, el número de pulsos proporcionados por un encóder de posición incremental dividido entre el tiempo consumido en hacerlo. Sin embargo, este método impone una carga computacional sobre el controlador, que podrá estar ocupado por algunas otras operaciones.

ii) Tacómetro Estos sensores pueden encontrar directamente la velocidad en cualquier momento y sin mucha carga computacional. Éstos miden la velocidad de rotación de un elemento. Hay varios tipos de tacómetros en uso, pero un diseño sencillo se basa en la regla de Fleming, que declara que “el voltaje producido es proporcional al índice del acoplamiento inductivo”. Aquí un conductor (básicamente una bobina) se sujeta al elemento rotativo que gira en un campo magnético (estator). Conforme incrementa la velocidad del eje, el voltaje producido en las terminales de las bobinas también aumenta. De otra manera, como se muestra en la figura 4.6, puede colocarse un imán sobre el eje rotativo y una bobina sobre el estator. El voltaje producido es proporcional a la velocidad de rotación del eje. Esta información se digitaliza mediante un convertidor analógico-digital y se introduce en la computadora.

iii) Sensor de efecto Hall Otro dispositivo de medición de velocidad es el sensor de efecto Hall, cuyo principio se describe a continuación. Si una pieza plana de ma-

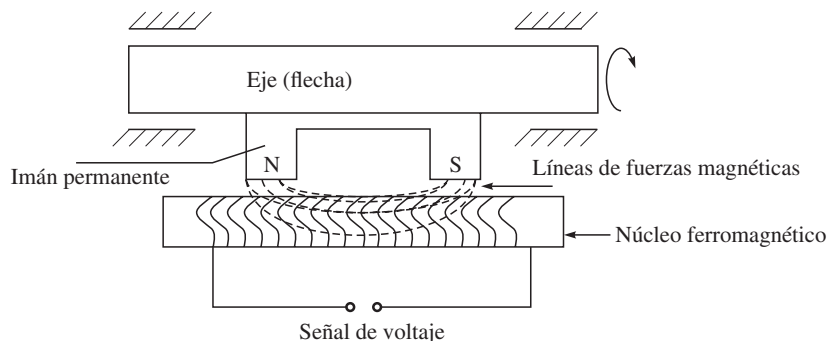


Figura 4.6 Diagrama esquemático de un tacómetro

terial conductor llamada chip Hall se sujeta a una diferencia de potencial en sus dos lados opuestos como se indica en la figura 4.7, entonces el voltaje que se genera a través de las caras perpendiculares es cero. Pero si un campo magnético se induce en ángulos rectos al conductor, el voltaje se genera en las otras dos caras perpendiculares. Entre más alto sea el valor de campo, más lo será el nivel de voltaje. Si se utiliza un imán anular, el voltaje producido será proporcional a la velocidad de rotación del imán.

4.2.3 Sensores de aceleración

De manera parecida a las mediciones de velocidad que se dan a partir de la información de los sensores de posición, pueden encontrarse las aceleraciones como la razón de cambio respecto al tiempo de las velocidades obtenidas por los sensores de velocidad o calculado a partir de las informaciones de posición. Pero ésta no es una manera eficiente para calcular la aceleración, puesto que impondrá una carga de trabajo pesada sobre la computadora, lo que puede reducir la velocidad de operación del sistema. Otra forma de medir la aceleración es calculando la fuerza que resulta de multiplicar masa por aceleración. Las fuerzas se

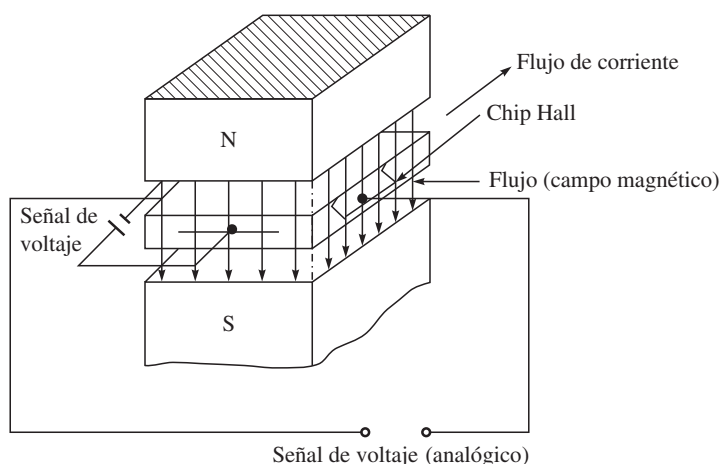


Figura 4.7 Principio de un sensor de efecto Hall

miden, por ejemplo, usando galgas extensométricas, cuya fórmula es

$$F = \frac{\Delta RAE}{RC}$$

donde F : fuerza; ΔR : cambio de resistencia de la galga; A : área; E : módulo de elasticidad del material de la galga; R : resistencia original de la galga; y C : constante de deformación de la galga. Por tanto, la aceleración a es la fuerza dividida entre la masa del objeto de aceleración m , es decir,

$$a = \frac{\Delta RAE}{RCm}$$

Se señala aquí que las velocidades y aceleraciones que se miden mediante el uso de sensores de posición requieren diferenciaciones. Por lo general, esto no es deseable, puesto que el ruido en los datos medidos, si es que existe, será amplificado. En forma alternativa, se recomienda el uso de integradores para obtener la velocidad a partir de la aceleración y, por consiguiente, las posiciones. Los integradores tienden a suprimir el ruido.



¿Por qué aceleración a partir de la fuerza pero no a partir de la velocidad?

Encontrar la aceleración a partir de la fuerza involucra integración, lo que suprime cualquier ruido en la señal de fuerza. Sin embargo, si la señal de velocidad se usa para determinar la aceleración, tiene que realizarse la diferenciación, lo que amplifica el ruido en la señal de velocidad. Por lo tanto, se recomienda el primer método.

4.2.4 Sensores de fuerza



¿Qué es el factor de calibre?

Se trata de una medida de sensibilidad para las galgas extensométricas que se define por

$$G = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\Delta R}{R}$$

donde G es el factor de calibre y ε es la deformación unitaria.

Una balanza de resorte es un ejemplo de un sensor de fuerza en donde se aplica una fuerza, por ejemplo, el peso, al platillo de balanza que causa un desplazamiento, es decir, el resorte se estira. El desplazamiento es entonces una medida de la fuerza. Existen otros tipos de sensores de fuerza, por ejemplo, con base en galgas, utilizando el sensor de efecto Hall, etcétera.

i) Galgas extensométricas El principio de este sensor es que el alargamiento de un conductor aumenta su resistencia eléctrica. La resistencia eléctrica normal para galgas es de 50-100 ohmios. El incremento de resistencia se debe a

- Incremento de la longitud del conductor; y
- Decremento en el área del conductor.

Las galgas están hechas de conductores eléctricos, usualmente de alambre o papel metálico grabado sobre un material base, como se muestra en la figura 4.8. Están pegados en las superficies donde se medirán las deformaciones unitarias, por ejemplo, R_1 y R_2 de la figura 4.9a). Las deformaciones ocasionan cambios en la resistencia eléctrica de las galgas, lo que se mide mediante su conexión al circuito de puente de Wheatstone como una de las cuatro resistencias, $R_1 \dots R_4$ de la figura 4.9b). Éste es un método barato y preciso para medir deformaciones. Sin embargo, deberá tenerse cuidado con los cambios de temperatura. Para mejorar el voltaje de salida y anular los cambios de resistencia debidos al cambio de tempe-

ratura, se usan dos galgas, tal como se muestra en la figura 4.9a), para medir la fuerza en el extremo de la viga voladiza.

ii) Sensor piezoeléctrico Un material piezoeléctrico presenta un fenómeno conocido como efecto piezoeléctrico. Este efecto señala que cuando cristales elásticos asimétricos se deforman mediante una fuerza, se desarrollará un potencial eléctrico dentro de la red cristalina deformada, como se ilustra en la figura 4.10. Este efecto es reversible. Esto quiere decir que si se aplica un voltaje entre las superficies del cristal, éste cambiará sus dimensiones físicas. La magnitud y polaridad de las cargas inducidas son proporcionales a la magnitud y dirección de la fuerza aplicada. Los materiales piezoeléctricos son cuarzo, turmalina, sal de Rochelle y otros. El rango de fuerzas que pueden medirse usando sensores piezoeléctricos es de 1 a 20 kN y con una proporción de 2×10^5 . Estos sensores pueden usarse para medir un cambio instantáneo en la fuerza (fuerzas dinámicas).

iii) Detección con base en la corriente Puesto que el par de torsión proporcionado por un motor eléctrico es una función de la corriente consumida, su medición, junto con las características conocidas del motor, proporciona la detección del par de torsión.

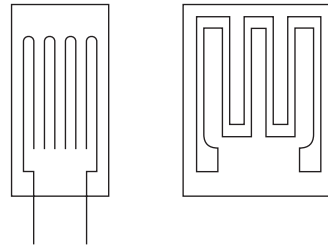
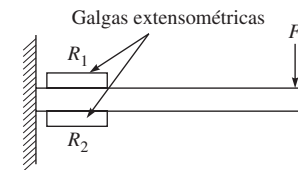
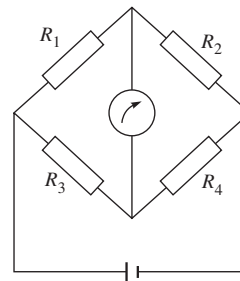


Figura 4.8 Galgas extensométricas



a) Viga voladiza con galgas



b) Circuito de puente de Wheatstone

Figura 4.9 Medición de deformación

4.3



Sensores externos

Los sensores externos se utilizan principalmente para saber más acerca del ambiente del robot, especialmente sobre los objetos que se va a manipular. Los sensores externos pueden dividirse en las siguientes categorías:

- Tipo de contacto
- Tipo sin contacto

4.3.1 Tipo de contacto

i) Interruptor de límite Un interruptor de límite se construye de modo muy parecido al interruptor de luz común que se usa en casas y oficinas. Tiene las mismas características de

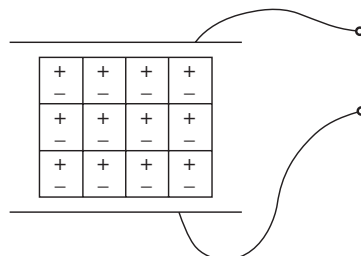


Figura 4.10 Sensor piezoeléctrico

encendido/apagado. El interruptor de límite tiene generalmente un brazo mecánico sensible a la presión, como se muestra en la figura 4.11a). Cuando un objeto aplica presión sobre el brazo mecánico, se activa el interruptor. Es posible que un objeto tenga un imán que cause que un contacto suba y cierre cuando el objeto pase sobre el brazo. Como se muestra en la figura 4.11b), el registro de subida mantiene la señal en +V hasta que el interruptor cierra, transmitiendo la señal a tierra. Los interruptores de límite pueden ser normalmente abiertos (NO) o normalmente cerrados (NC) y pueden tener polos múltiples. Un interruptor normalmente abierto permite flujo de corriente hasta que se aplica presión al interruptor. Un interruptor de polo sencillo permite que se abra o cierre un circuito al contacto, mientras que un interruptor de polos múltiples permite que circuitos de interruptores múltiples estén abiertos o cerrados. Los interruptores de límite son dispositivos mecánicos que pueden tener los siguientes problemas:

- Están sujetos a fallas mecánicas;
- Su tiempo promedio entre fallas es bajo en comparación con sensores sin contacto; y
- La velocidad de operación es relativamente lenta en comparación con la velocidad de conmutación de microsensores fotoeléctricos, que es hasta 3 000 veces más rápida.

Los interruptores de límite se utilizan en robots para detectar las posiciones extremas de los movimientos, donde el eslabón apaga el actuador correspondiente cuando alcanza una posición extrema y, de este modo, impide posibles daños de la estructura mecánica del brazo del robot.

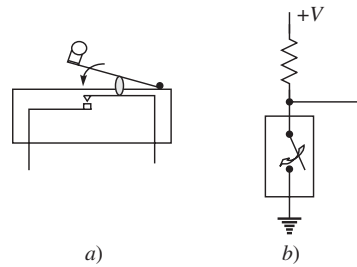


Figura 4.11 Interruptor de límite

4.3.2 Tipo sin contacto

i) Sensor de proximidad La detección de proximidad es la técnica que se usa para detectar la presencia o ausencia de un objeto por medio de un sensor electrónico sin contacto. Hay dos tipos de sensores de proximidad: inductivo y capacitivo. Los sensores de proximidad inductivos se usan en lugar de interruptores de límite para la detección sin contacto de objetos metálicos. Los sensores de proximidad capacitivos se usan sobre la misma base que los sensores de proximidad inductivos, pero también pueden detectar objetos no metálicos.

a) Sensor de proximidad inductivo Todos los sensores de proximidad inductivos consisten en cuatro elementos básicos, a saber:

- Bobina de sensor y núcleo férreo
- Circuito detector
- Circuito oscilador
- Circuito de salida de estado sólido

Como se muestra en la figura 4.12, el circuito del oscilador genera un campo magnético de frecuencia de radio. El campo se centra alrededor del eje del núcleo férreo que modela el campo y lo dirige hacia la cara del sensor. Cuando un objeto metálico se acerca a la cara y entra al campo magnético, se inducen corrientes de Eddy en la superficie del objeto. Esto da como resultado un efecto de carga o amortiguación que causa una reducción en la amplitud de la señal del oscilador. El circuito del detector identifica el cambio de la amplitud del oscilador. El circuito del detector se encenderá con una amplitud de operación específica. Esta señal

enciende el circuito de salida de estado sólido. A esto se le llama frecuentemente “condición amortiguada”. Cuando el objeto sale del campo de detección, el oscilador responde con un aumento de amplitud. Cuando la amplitud aumenta más allá de un valor específico, se detecta mediante el circuito detector. Éste se apaga, haciendo que la señal de salida regrese al estado normal o apagado. El rango de detección de un sensor de proximidad inductivo es la distancia entre la cara del detector y el objeto. También indica la forma del campo de detección que se genera mediante la bobina y el núcleo. Hay varios factores mecánicos y ambientales que afectan el rango de detección. El rango usual es hasta 10-15 mm, pero algunos sensores también tienen rangos tan altos como 100 mm.

b) Sensor de proximidad capacitivo

Un sensor de proximidad capacitivo trabaja de manera muy parecida a un sensor de proximidad inductivo. Sin embargo, el medio de detección es bastante distinto. La detección capacitiva se basa en la capacitancia dieléctrica. La capacitancia es la propiedad de los materiales aislantes para almacenar una carga. Un capacitor consiste en dos placas que están separadas por un material aislante, usualmente llamado dieléctrico. Cuando se cierra el interruptor, se almacena una carga en las dos placas. La distancia entre las placas determina la capacidad del capacitor para almacenar la carga y puede calibrarse como una función de la carga almacenada para determinar el estatus de conmutación discreto de ENCENDIDO y APAGADO. La figura 4.13 ilustra el principio de un sensor capacitivo. Una placa capacitiva forma parte del interruptor, la cara del sensor es el aislador y el objeto es la otra placa, todos unidos con tierra física. El interruptor capacitivo tiene los mismos cuatro elementos que el sensor inductivo, es decir, sensor (el medio dieléctrico), circuito oscilador, circuito detector y circuito de salida de estado sólido.

El circuito del oscilador en un interruptor capacitivo trabaja igual que el de un interruptor inductivo. El circuito del oscilador incluye la capacitancia de la placa del objeto externo y de la placa del objeto interno. En un sensor capacitivo, el oscilador empieza a oscilar cuando se detecta una capacitancia de retroalimentación suficiente. Las características principales de los sensores de proximidad capacitivos son las siguientes:

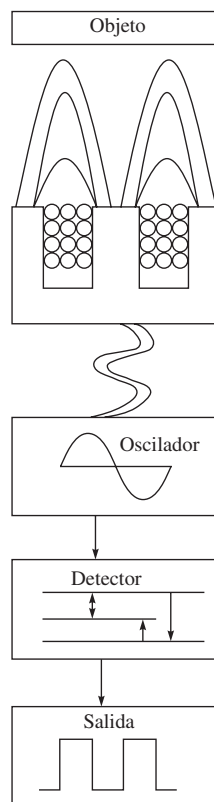


Figura 4.12 Sensor de proximidad inductivo

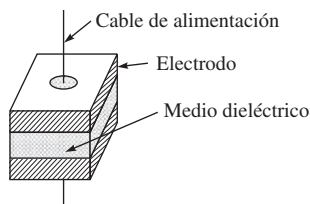


Figura 4.13 Principio de sensores capacitivos

- Pueden detectar objetos no metálicos
- Pueden detectar objetos de peso ligero o pequeños que no pueden ser detectados por interruptores de límite mecánicos
- Ofrecen un alto índice de conmutación para una respuesta rápida en aplicaciones de conteo de objetos
- Pueden detectar objetos a través de barreras no metálicas (vidrio, plástico, etc.)
- Tienen una larga vida operacional con un número virtualmente ilimitado de ciclos de operación
- La salida de estado sólido proporciona una señal de contacto libre de rebotes

Los sensores de proximidad capacitivos tienen dos limitaciones principales:

- Les afecta el vaho y la humedad
- Necesitan un rango extenso para la detección efectiva

Los sensores de proximidad capacitivos tienen un mayor rango de detección que los de proximidad inductivos. La distancia de detección para interruptores capacitivos tiene que ver con el área del plato, así como el tamaño de la bobina tiene que ver en los sensores de proximidad inductivos. Los sensores capacitivos básicamente miden un intervalo dieléctrico. Por consiguiente, es deseable poder compensar las condiciones del objeto y la aplicación por medio de un ajuste de sensibilidad para el rango de detección. La mayoría de los sensores de proximidad capacitivos se equipa con un potenciómetro de ajuste de sensibilidad.

ii) Sensor de desplazamiento de semiconductor Como se muestra en la figura 4.14, el sensor de desplazamiento de semiconductor utiliza un diodo de emisión de luz (LED) de semiconductor o láser como fuente de luz, así como un detector sensible a la posición (PSD). El rayo láser se enfoca sobre el objeto por medio de un lente. El objeto refleja al rayo, que luego se enfoca sobre el PSD creando un punto de luz. El punto de luz

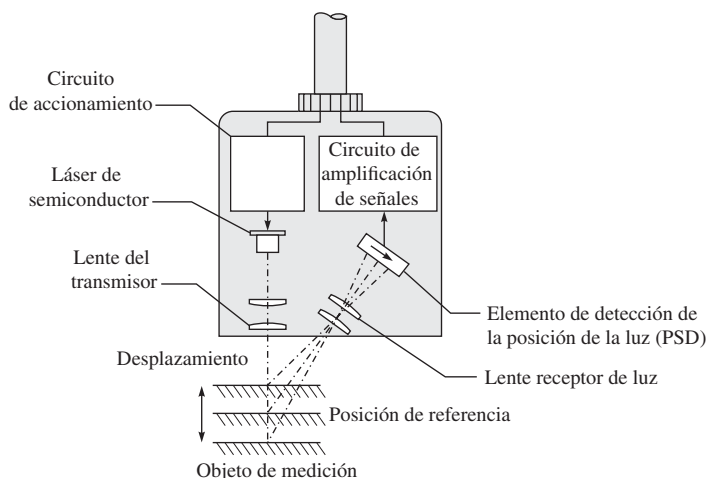


Figura 4.14 Sensor basado en semiconductores
[Cortesía de: <http://www.sensorcentral.com/displacement/laser02.php>]

se mueve cuando el objeto lo hace. El desplazamiento de la pieza de trabajo puede entonces determinarse detectando el movimiento del punto de luz.

4.4



Sistema de visión

Los sensores de visión pueden clasificarse como de tipo externo sin contacto, como lo indica la figura 4.1. Sin embargo, aquí se estudian en una sección separada debido a su complejidad, que requiere un tratamiento detallado. Los componentes típicos de un sistema de visión para uso como alarma de seguridad se muestran en la figura 4.15. Los sistemas de visión se utilizan exitosamente con robots para permitir que miren a su alrededor con el fin de encontrar las piezas que van a recoger y para colocarlas en los lugares apropiados. Anterior a los sistemas de visión en robots se empleaban plantillas para el posicionamiento exacto de objetos. Estos dispositivos son muy caros. Otras tareas de sistemas de visión que se usan para robots incluyen la determinación del patrón geométrico de los objetos, el movimiento de los mismo y la reconstrucción de la geometría 3D de los objetos a partir de sus imágenes en 2D para la medición, y la construcción de los mapas del ambiente para la navegación del robot. Los sistemas de visión proporcionan información que es difícil o imposible de obtener de otra manera. Su cobertura va desde unos cuantos milímetros hasta decenas de metros, con un ángulo angosto o amplio, dependiendo de las necesidades y el diseño del sistema.

4.4.1 Elementos del sensor de visión

En los sistemas de visión, el componente principal de visión es una cámara completa, incluidos un equipo sensor, la electrónica asociada, el formato de señales de salida y un lente. En función de la aplicación, la cámara podría ser una RS-170/CCIR, NTSC/PAL (éstas son señales estándares de televisión americana RS-170 monocolor, de televisión europea/india CCIR monocolor, NTSC color y PAL producidas por las videocámaras, respectivamente), de escaneo progresivo, variable o de líneas. Los cinco parámetros de sistema más importantes que rigen la elección de la cámara son campo de vista, resolución, distancia de trabajo, profundidad de campo e índice de adquisición de datos de imágenes. Como regla general, para mediciones de tamaño, el sensor deberá tener un número de píxeles de por lo menos el

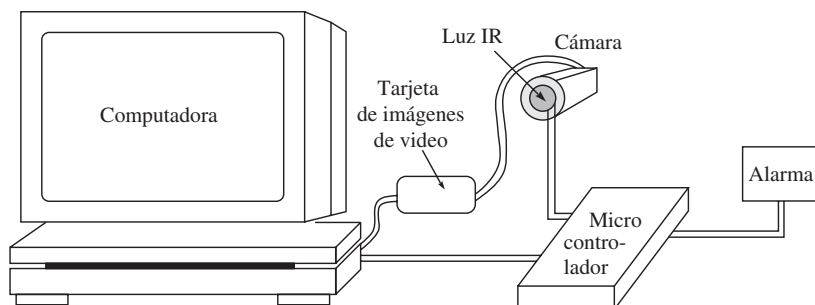


Figura 4.15 Tarjeta de imágenes de video

doble de la proporción del tamaño más grande al más pequeño de los objetos de interés. La iluminación deberá organizarse de tal forma que se iluminen los objetos de interés. A menudo, como interfaz entre la cámara y una computadora anfitriona, se necesita una tarjeta de video o de captura de video, usualmente en forma de tarjeta de enchufe que se instala en la computadora. La tarjeta de imágenes de video almacenará las imágenes de la cámara en una memoria de tarjeta o de sistema, muestreando y digitalizando los datos analógicos conforme sea necesario. En algunos casos, la misma cámara podrá producir los datos digitales que son compatibles con una computadora estándar. En estos casos, no será necesaria una tarjeta de imágenes de video por separado. Se necesita un software de visión para crear el programa que procesa las imágenes. Cuando una imagen se haya analizado, el sistema debe ser capaz de comunicar el resultado para controlar el proceso o para transmitir la información a una base de datos. Esto requiere una interface digital de entrada/salida. El ojo y cerebro humanos pueden identificar objetos e interpretar escenas bajo una amplia variedad de condiciones. Los sistemas de visión artificiales son mucho menos versátiles, así que la creación de un sistema exitoso requiere de la consideración cuidadosa de todos los elementos del sistema y de una identificación precisa de las metas que se van a lograr, lo que deberá mantenerse lo más sencillo que sea posible.

i) Sistemas de cámaras Los primeros sistemas de visión empleaban la cámara vidicon, que era un dispositivo voluminoso de tubos de vacío. Las cámaras vidicon son mucho más susceptibles a la interferencia de ruido electromagnético y requieren mucha energía. Sus ventajas principales son una más alta resolución y mejor sensibilidad a la luz. A fin de reducir el tamaño, en la mayoría de los sistemas actuales se usan cámaras de estado sólido, basadas en técnicas de dispositivos de carga acoplada (CCD) o en dispositivos de inyección de carga (CID). Las cámaras de estado sólido son más pequeñas, más resistentes, duran más y tienen menos distorsión de imágenes inherente que las cámaras vidicon. También son levemente más caras, pero los precios están bajando. Los fabricantes frecuentemente recomiendan la operación de los sensores con filtros apropiados para eliminar longitudes de onda IR. Tanto los chips de CCD como de CID utilizan técnicas de transferencia grande para capturar una imagen. En una cámara CCD, la luz incide en el equivalente óptico de un chip de memoria de acceso aleatorio (RAM). La luz se absorbe en sustrato de silicón, donde la acumulación de carga es proporcional a la cantidad de luz que llega al equipo. Una vez que se haya recibido la cantidad suficiente de energía para proporcionar una imagen, las cargas se transmiten a través de los registros de control integrados. Algunos chips CCD utilizan una técnica de transferencia de cargas entre líneas. Otros emplean el método de transferencia de fotogramas, que es más flexible por variar el periodo de integración. Un tipo de dispositivo electrónico puede ajustar la sensibilidad de la cámara a la luz por medio del control de la cantidad de voltaje a través de sus elementos y del periodo de tiempo que el equipo se sujeta a la carga. La cámara CID trabaja con un principio similar. Un chip CID es un dispositivo basado en el semiconductor de óxido y metal (MOS) con múltiples puertos, parecido a los CCD. La señal de video es el resultado de un pulso de corriente de una recombinación de los portadores. Los CID producen una mejor imagen (de menos distorsión) y usan una técnica de lectura distinta que los CCD, lo que requiere una unidad de dirección de escaneo separada. Por tanto, los CID son más caros que los CCD. La diferencia principal entre una cámara CCD y una CID es el método para generar la señal de video. En los CID, la carga tiene que moverse fuera del equipo mediante la conmutación de voltajes entre puertas pares

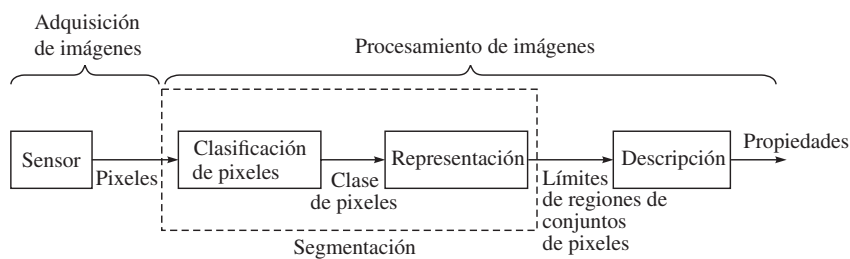


Figura 4.16 Detección visual

e impares. El flujo de la corriente que resulta crea una señal analógica. En la cámara CID, cada elemento se descarga y el flujo que resulta se usa en forma directa. La cantidad de carga almacenada es una función lineal de la intensidad reflectiva del objeto y del tiempo de exposición a la cámara.

4.4.2 Pasos en la detección de visión

Como se ilustra en la figura 4.16, la detección de la visión, también llamada visión de máquina, tiene dos pasos: la adquisición de imágenes y el procesamiento de imágenes.

i) Adquisición de imágenes En la adquisición de imágenes, una imagen se obtiene y digitaliza para su ulterior procesamiento, tal y como se muestra en la figura 4.17. El primer paso en la digitalización es dividir la imagen en celdas (píxeles), especificadas por hileras y columnas. Una imagen exagerada se muestra en el lado izquierdo. A cada pixel se le asigna un número basado en su intensidad de luz o luminosidad de imagen.

A pesar de que la adquisición de imágenes es principalmente una función de hardware, puede usarse software para controlar intensidad de la luz, ajuste de apertura del lente, ángulo de la cámara, sincronización, campo de vista, tiempos de lectura y otras funciones. La adquisición de imágenes tiene cuatro elementos principales, a saber:

- Una fuente de luz, controlada o ambiental;
- Un lente que enfoca la luz reflejada desde el objeto hasta un *sensor de imagen*;
- Un sensor de imágenes que convierte la imagen de luz en una imagen eléctrica almacenada;
- Elementos de electrónica para leer la imagen detectada desde el elemento de detección de imágenes y que, después de procesarla, transmite la información de la imagen a una computadora para su procesamiento.

Después, la computadora realiza el resto de los pasos, es decir, el análisis de imágenes y el reconocimiento de patrones.

ii) Procesamiento de imágenes El procesamiento de imágenes examina los datos digitalizados para localizar y reconocer un objeto dentro del campo de imágenes. Pueden usarse diferentes métodos. La mayoría de las técnicas de análisis de imágenes incluye segmentación, extracción de parámetros y reconocimiento de patrones. La segmentación desglosa la escena en diferentes piezas o segmentos y permite que el objeto deseado sea aislado; si múltiples objetos de interés están presentes, la segmentación los separa en la imagen. La extracción de parámetros examina después los objetos segmentados y determina

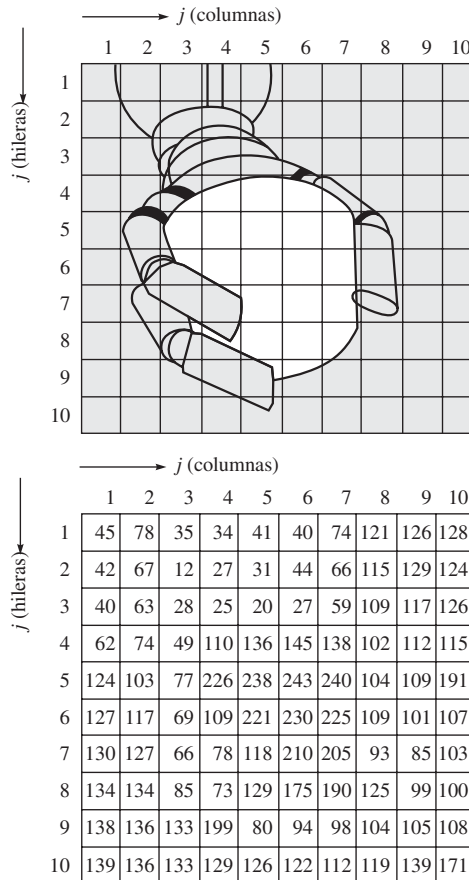


Figura 4.17 Imagen digitalizada

la característica clave, por ejemplo, tamaño, posición, orientación, forma, intensidad, color y textura. El reconocimiento de patrones intenta equiparar las características observadas con criterios almacenados y permite así que se identifiquen los objetos. Con base en una actividad específica durante la fase de procesamiento de imágenes, un sistema de visión se clasifica como visión de bajo, mediano o alto nivel, como se indica en la figura 4.18. Estos niveles se explicarán a continuación.

a) Visión de nivel bajo La actividad en la visión de nivel bajo consiste en procesar la imagen para la extracción de datos (flujo de contornos, de esquinas u óptico). Las operaciones se llevan a cabo en los píxeles de la imagen para extraer las propiedades arriba mencionadas respecto a su intensidad o profundidad en cada punto de la imagen. Por ejemplo, uno podrá interesarse en la extracción de regiones uniformes, donde el gradiente de los píxeles permanece constante, o en los cambios de primer orden en el gradiente, lo que correspondería a líneas rectas, o en los cambios de segundo orden, que podrían usarse para extraer propiedades de superficie tales como picos, hoyos, crestas, etc. Las actividades de visión de

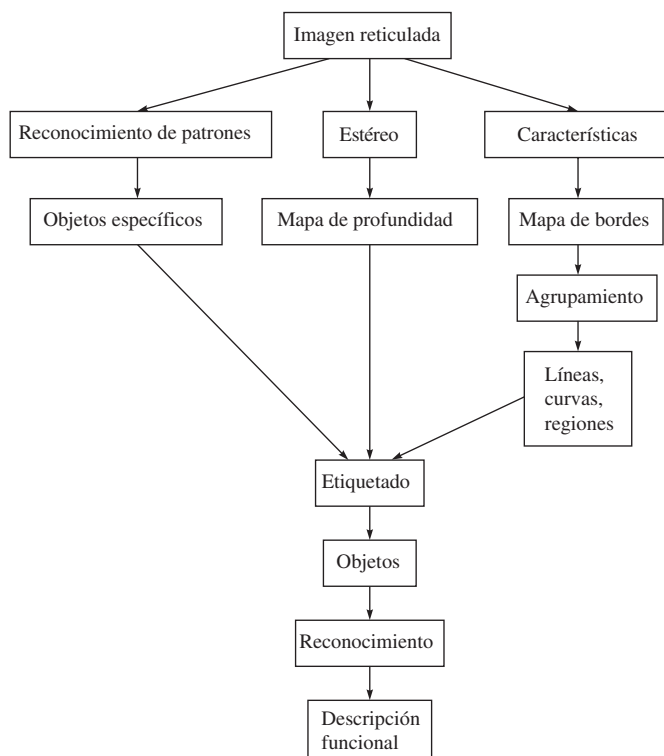


Figura 4.18 Niveles de visión

nivel bajo están invariablemente basadas en datos, y a veces se llaman ascendente. Se trata del área donde el modelaje del funcionamiento de la corteza visual es más apropiado.

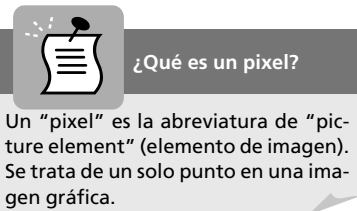
b) Visión de nivel intermedio En este nivel se reconocen los objetos y se interpretan escenas de 3D usando los datos obtenidos de la visión de nivel bajo. El nivel intermedio de procesamiento se ocupa fundamentalmente de agrupar las entidades. El caso más simple es cuando uno agrupa los píxeles en líneas. Puede entonces expresarse la línea en forma funcional. De manera similar, si la salida de la información del nivel bajo es un mapa de profundidad, posiblemente uno tendrá, además, que distinguir los límites del objeto u otras características. Incluso en el caso más sencillo, donde se intenta extraer una sola esfera, no es un proceso fácil irse de una representación de profundidad de superficie a una representación de centro y radio.

c) Visión de nivel alto La visión de nivel alto, que es equivalente a la comprensión de la imagen, se ocupa de manera principal de la interpretación de la escena en términos de los objetos que hay en ella, y se basa usualmente en el conocimiento de los objetos específicos y sus relaciones. La interpretación de una escena va más allá de las tareas de extracción de líneas y agrupamiento. Se requiere además tomar decisiones acerca de los tipos de límites, como los que ocuyen, y sobre qué información está oculta para el usuario. En esta fase es esencial más agrupamiento, ya que posiblemente aún tendremos que decidir

cuáles líneas se agrupan para formar un objeto. Para este propósito, uno tiene que distinguir, además, qué líneas forman parte de la estructura de los objetos, cuáles de ellas forman parte de una textura de superficie o son causadas por sombras. Por ende, los sistemas de nivel alto se orientan a objetos y a veces se llaman desde arriba hacia abajo. Casi siempre requieren algún grado de conocimiento acerca de los objetos de la escena.

4.4.3 Dificultades en la visión y sus remedios

Un sistema de visión no puede representar o procesar de modo único todos los datos disponibles debido a problemas computacionales como memoria y requerimientos de tiempo de procesamiento que se imponen a la computadora. Por lo tanto, el sistema tiene que hacer concesiones. Otros problemas incluyen las variaciones de la luz, el tamaño del objeto y la ubicación del objeto, así como limitaciones en el rango dinámico disponible en los sensores de visión normales. El sistema de visión requiere hardware y software especializados. Es posible adquirir solamente el hardware con poca o ninguna programación de aplicación. De hecho, algunos programas de terceros están disponibles. Un planteamiento de sólo hardware es más económico y puede hacerse más flexible para manejar los requerimientos de visión comunes. Sin embargo, visto que este planteamiento requiere destreza en el procesamiento de imágenes, solamente es de interés para usuarios que desean tener la responsabilidad de la interpretación de imágenes. Es una práctica usual obtener el hardware y el software de aplicación juntos de parte del proveedor. Pero el usuario aún tendrá que realizar programación específica para alguna aplicación. Los proveedores principales de sistemas de visión se especializan en el suministro de software sólo para algunas áreas de aplicación.



Todo sistema de visión requiere un sensor con el fin de convertir la imagen visual en una señal electrónica. Se usan varios tipos de sensores de video, incluidos cámaras vidicon, dispositivos de tubos de vacío y sensores de estado sólido. Originalmente, muchos de estos sistemas de visión se diseñaron para otras aplicaciones, por ejemplo, la televisión, así que se tiene que procesar la señal para extraer la imagen visual y remover la información de sincronización antes de que la señal se transmita a la computadora para su ulterior procesamiento. Después, la computadora trata esta señal como un arreglo de píxeles y procesa estos datos para extraer la información deseada. El procesamiento de imágenes puede ser muy lento. Para un sensor normal de 200 000 o más píxeles, un sistema de visión podrá consumir muchos segundos, incluso minutos, para analizar la escena completa y determinar la acción que debe tomarse. El número de bits que se va a procesar es bastante grande. Por ejemplo, un sistema con un arreglo de 512×512 píxeles y una intensidad de 8 bits por pixel produce más de dos millones de bits que deben procesarse. Si se recibiera una imagen continua con un rango de cuadros de 30 Hz, los bits de datos se recibirían a una razón de 8 MHz. Pocas computadoras pueden aceptar entradas con esta velocidad de datos, y de todas maneras no quedaría tiempo para procesar los datos. Cuando se considera un sistema de mayor resolución, un sistema de color o un sistema de múltiples cámaras, los requerimientos de gestión de datos se tornan astronómicos. Pueden usarse varios métodos para reducir la cantidad de

datos que se van a manejar y, al mismo tiempo, reducir el tiempo de procesamiento. Éstos se explican a continuación:

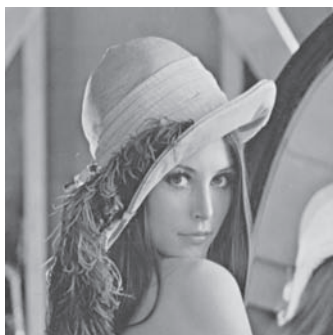
- a) Un planteamiento es la visión binaria que se utiliza cuando se procesa solamente una información en blanco y negro (se ignoran las variaciones de intensidad y tonos grises). En la visión binaria, una fotografía se convierte en una imagen binaria por medio del *umbralamiento*, como se ilustra en la figura 4.19. En el umbralamiento, se selecciona un nivel de brillo. Todos los datos con intensidades iguales o mayores que este valor se consideran blanco; todos los demás valores, como negro.
- b) Otro método para recortar el tiempo de proceso es el control de la colocación de objetos, de tal modo que los objetos de interés no pueden traslaparse en la imagen. Por lo tanto, los complicados algoritmos para separar imágenes son innecesarios, y se reduce el tiempo de procesamiento de imágenes.
- c) Un tercer planteamiento reduce la gestión de datos por medio del procesamiento de únicamente una ventana pequeña de los datos existentes; es decir, el objeto se ubica en un campo de vista predefinido. Por ejemplo, si el robot busca una marca en una tarjeta de circuitos impresos, el sistema de televisión puede disponerse de tal modo que la marca se encuentre siempre en la esquina superior derecha.
- d) Una cuarta manera toma una muestra estadística de datos y adopta decisiones basadas en esta muestra. Desgraciadamente, todos estos planteamientos ignoran algunos de los datos disponibles y, en efecto, producen un sistema de robot menos sólido. Se ahorra tiempo de procesamiento, pero algunos tipos de objetos complejos no pueden reconocerse.

4.5



Selección de sensores

Cuando se utilizan sensores, primero que nada tiene que decidirse qué es lo que el sensor tendrá que hacer y cuál es el resultado que se espera. Esta sección abordará algunas de las



a) Imagen inicial



b) 30% umbral

Figura 4.19 Umbralamiento de imágenes

[Cortesía de: Handbook of Industrial Automation, R. L. Shell y E. L. Hall editores, © 2000, Marcel Dekker, Nueva York]

características que deben tomarse en consideración para la selección y el uso de diferentes tipos de sensores para aplicaciones de robots. Se trata de las siguientes:

i) Rango El rango es una medida de la diferencia entre los valores mínimos y máximos medidos. Por ejemplo, una galga pudiera medir valores en el rango de 0.1 a 10 newton.

ii) Sensibilidad La sensibilidad se define como la proporción del cambio de salida a un cambio de entrada. Como ejemplo, si un movimiento de 0.025 mm causa un voltaje de salida por 0.02 voltios, entonces la sensibilidad es 0.8 voltios por mm. A veces se usa para indicar el cambio más pequeño en la entrada que será observable como cambio de salida. Usualmente, se busca la máxima sensibilidad que ofrezca una señal lineal y precisa.

iii) Linealidad La linealidad perfecta permitiría que se grafique la salida *versus* la entrada como línea recta en una hoja cuadrículada. La linealidad es una medida de la constancia de la proporción de salida y entrada. La forma de ecuación sería

$$y = bx$$

donde x es la entrada, y la salida y b es una constante. Si b es variable, la relación no es lineal. Por ejemplo, b podrá ser una función de x , de tal modo que $b = a + dx$, donde el valor de d introduce una no linealidad. Una medida de no linealidad podría darse como valor de d .

iv) Tiempo de respuesta El tiempo de respuesta es aquel que se necesita para que un cambio en la entrada sea observable como cambio estable en la salida. En algunos sensores, la salida oscila durante un tiempo breve antes de fijarse en un valor estable. Se mide el tiempo de respuesta desde el inicio de un cambio en la entrada hasta el momento en el que la salida se haya fijado en un rango especificado.

v) Precisión Precisión es una medida de la diferencia entre los valores medidos y reales. Una precisión de ± 0.025 mm significa que en todas las circunstancias consideradas, el valor medido estará dentro de 0.025 mm del valor real. Para el posicionamiento de un robot y su ejecutor final, la verificación de este nivel de precisión requeriría la medición cuidadosa de la posición del ejecutor final respecto a la ubicación base de referencia con una precisión general de 0.025 mm en todas las condiciones de temperatura, aceleración, velocidad y carga. Se necesitaría un equipo de medición de precisión cuidadosamente calibrado contra estándares secundarios para verificar esta precisión.

vi) Repetibilidad La repetibilidad es una medida de la diferencia de valor entre dos mediciones sucesivas en las mismas condiciones y es un criterio mucho menos estricto que la precisión. En tanto que las fuerzas, la temperatura y otros parámetros no hayan cambiado, se esperaría que los valores sucesivos estuvieran iguales, sin importar lo mala que fuera la precisión.

vii) Resolución La resolución es una medida del número de mediciones dentro de un rango desde el mínimo hasta el máximo. También se usa para indicar el valor del incremento más pequeño del valor que sea observable.

viii) Tipo de salida La salida puede ser en forma de un movimiento mecánico, una corriente o voltaje eléctrico, una presión o un nivel de líquido, una intensidad de luz u otra forma. Para ser útil, debe convertirse en otra forma, por ejemplo, en el LVDT (transformador diferencial lineal variable) o en galgas extensométricas que se explicaron con anterioridad.

Además de las características que se mencionan arriba, los sensores deberán tener características físicas adecuadas. Por ejemplo:

i) Tamaño y peso Usualmente, tamaño y peso son importantes características físicas de los sensores. Si el sensor ha de ser montado sobre la mano o el brazo del robot, se volverá parte de la masa que tiene que acelerarse y desacelerarse por parte de los motores de accionamiento de muñeca y brazo. De esta manera, afecta el desempeño del robot en forma directa. La reducción de tamaño y peso es un reto para los diseñadores de sensores. Uno de los primeros sensores de fuerza/par de torsión de la muñeca, por ejemplo, tenía un diámetro de aproximadamente 125 mm, pero se redujo a aproximadamente 75 mm de diámetro por medio de un cuidadoso rediseño.

ii) Confiabilidad La confiabilidad es de máxima importancia en todas las aplicaciones de robots. Puede medirse en términos de tiempo medio sin averías (MTTF) como el número medio de horas entre la falla que causa que alguna parte del sensor se vuelva inoperante. En el uso industrial, se espera que el sistema del robot en total esté disponible hasta 98 o 99% de los días laborales. Puesto que hay cientos de componentes en un sistema de robot, cada uno de ellos debe tener una confiabilidad muy alta. Algunos de los sensores, aunque buenos, son incapaces de resistir la presión ambiental diaria y, por ende, no pueden utilizarse en robots. Parte del requerimiento para la confiabilidad es la facilidad de mantenimiento. Un sensor de fácil reparación no tiene que ser tan confiable como el que se esconde en las profundidades del robot. La facilidad de mantenimiento es, por tanto, una medida en términos de tiempo medio sin reparación (MTTR).

iii) Interconexión La interconexión de sensores con dispositivos de acondicionamiento de señales y del controlador del robot es a menudo un factor determinante en la utilidad de sensores. Los enchufes no estándares o los requerimientos para voltajes y corrientes no estándares podrán hacer que un sensor sea demasiado complejo y caro para el uso. Las señales de un sensor también tienen que ser compatibles con el resto del equipo que se usa si el sistema ha de trabajar correctamente.

RESUMEN

En este capítulo se presentan la necesidad de sensores en la robótica, los diferentes tipos de sensores que se usan en aplicaciones robóticas y los criterios de su selección. Se enfatizan los aspectos funcionales más que sus modelos matemáticos para que el lector sea capaz de decidir qué sensor debe usarse y cuándo. Los diferentes sensores se clasifican según sus usos funcionales, por ejemplo, posición, velocidad, aceleración, fuerza, etcétera.



EJERCICIOS

- 4.1 Defina sensibilidad y linealidad.
- 4.2 Distinga precisión de repetibilidad.
- 4.3 Indique las características físicas en la selección de sensores.
- 4.4 ¿Cuáles son los componentes fundamentales de un sensor?
- 4.5 ¿Por qué se usan los términos “interno” y “externo” para clasificar sensores?
- 4.6 Clasifique los sensores internos.
- 4.7 Mencione algunos sensores de velocidad.
- 4.8 ¿Por qué no se prefieren los sensores de posición para velocidad y aceleración?
- 4.9 ¿Existe alguna ventaja de los sensores externos sobre los internos?
- 4.10 Mencione algunos tipos de sensores de contacto y sin contacto.
- 4.11 ¿Cuáles son las ventajas de sensores de proximidad capacitivos?
- 4.12 ¿Qué es una visión de máquina?
- 4.13 ¿Cuáles son los componentes principales de un sistema de visión?
- 4.14 ¿Cuál es el componente del sensor en un sistema de visión?
- 4.15 ¿Cuáles son las dificultades típicas en un sistema de visión?
- 4.16 ¿Cuáles son las características que deberán revisarse en la selección de un sensor?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

Basándose en búsquedas en la web, conteste las siguientes preguntas:

- 4.17 Mencione por lo menos cinco empresas comerciales que fabrican diferentes tipos de sensores. Ordene los sensores según el nombre de cada compañía.
- 4.18 ¿Cuáles son los precios típicos de encoders, generadores tacométricos y acelerómetros?
- 4.19 ¿Cuál es el precio de una cámara CCD?
- 4.20 Mencione una compañía fabricante de robots que implemente un sistema de visión en sus robots.



Capítulo

5

Transformaciones

Con el fin de controlar un robot, es necesario conocer las relaciones entre los movimientos de las articulaciones (entrada) y los movimientos del efector final (salida), ya que los primeros controlan a los segundos. Por tanto, el estudio de la cinemática es importante cuando tienen que realizarse transformaciones entre los sistemas de referencia de las coordenadas a los que son referidos los diferentes eslabones del robot.

5.1



Arquitectura de robots

Un robot se compone de varios eslabones que se conectan en forma serial mediante articulaciones. Los grados de libertad del robot (DOF) dependen del número y tipos de eslabones y articulaciones, así como de la cadena cinemática del robot.

5.5.1 Eslabones y articulaciones

Los cuerpos individuales que forman un robot se llaman “eslabones”. En este estudio, a menos que se señale lo contrario, se supone que todos los eslabones son rígidos, es decir, la distancia entre dos puntos dentro del cuerpo no cambia mientras éste se mueva. Un cuerpo rígido en el espacio cartesiano tridimensional tiene seis DOF. Esto implica que la posición del cuerpo puede describirse mediante tres coordenadas de traslación y la orientación por medio de tres coordenadas de rotación. Por así convenir al análisis, ciertos cuerpos no rígidos, como cadenas, cables o correas, podrán considerarse como eslabones cuando realizan la misma función que los cuerpos rígidos. Desde el punto de vista cinemático, se consideran como un solo eslabón dos o más miembros cuando se conectan entre sí sin ningún movi-

miento relativo entre ellos. Por ejemplo, un ensamble con dos engranes conectados por un eje común representa un solo eslabón.

Los eslabones de un robot se acoplan mediante pares o articulaciones cinemáticas. Una “articulación” acopla dos eslabones y proporciona las restricciones físicas para el movimiento relativo entre los eslabones. No es una entidad física, sino simplemente un concepto que permite especificar cómo un eslabón se mueve respecto a otro. Por ejemplo, una articulación en bisagra de una puerta le permite a ésta moverse alrededor de un eje en relación con el muro fijo. Ningún otro movimiento es posible. El tipo de un movimiento relativo permitido por una articulación se rige por la forma de la superficie de contacto entre los miembros, que puede ser una superficie, una línea o un punto. Por consiguiente, se les llama articulaciones de pares “inferiores” o “superiores”. Si dos eslabones pareados están en contacto mediante una superficie, a esta articulación se le conoce como articulación de par inferior. De lo contrario, si los eslabones están en línea o contacto mediante un punto, la articulación se conoce como de par superior. Por esta definición, la articulación de bisagra de la puerta siempre es una articulación de par inferior, mientras que una bola que corre sobre un plano representa una articulación de par superior. Los pares inferiores y superiores de mayor uso aparecen en la tabla 5.1.

i) Articulación revoluta o rotacional, R Una articulación revoluta o rotacional, también conocida como “par giratorio”, “bisagra” o “articulación de clavija”, permite que dos eslabones pareados giren, uno respecto al otro, alrededor del eje de la articulación, por ejemplo Z , tal como se muestra en la figura 5.1. Por lo tanto, una articulación revoluta impone cinco restricciones, es decir, prohíbe que uno de los eslabones se traslade respecto al otro a lo largo de los tres ejes perpendiculares X , Y y Z , junto con la rotación alrededor de dos ejes, X y Y . Esta articulación tiene un grado de libertad (DOF).

ii) Articulación prismática, P Una “articulación prismática” o “par cinemático prismático” permite que dos eslabones arreglados en pares se deslicen, uno respecto al otro, a lo largo de su eje, como se muestra en la figura 5.2. También impone cinco restricciones y, por tanto, tiene un DOF.

iii) Articulación helicoidal, H Como se muestra en la figura 5.3, una articulación helicoidal permite que dos eslabones unidos giren alrededor del eje de la articulación y se trasladen, al mismo tiempo, a lo largo de él. Sin embargo, el traslado no es independiente, sino que se relaciona con la rotación por el paso del tornillo. Por ende, la articulación helicoidal también tiene cinco restricciones y, por consiguiente, un DOF.

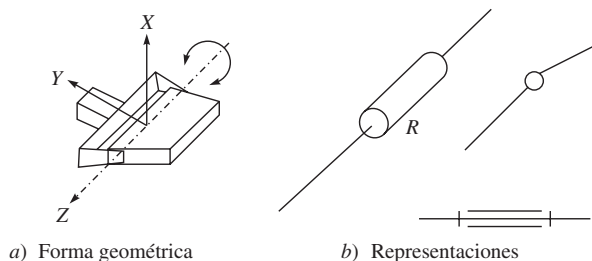


Figura 5.1 Una articulación revoluta o rotacional

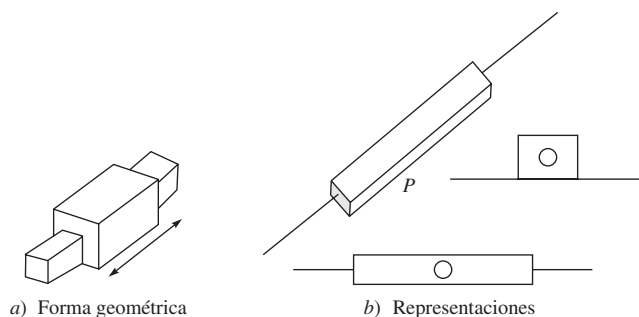


Figura 5.2 Una articulación prismática

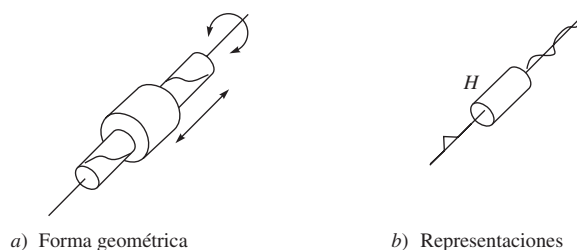


Figura 5.3 Una articulación helicoidal

iv) Articulación cilíndrica, C Esta articulación permite la rotación alrededor del eje de la articulación y el traslado independiente a lo largo de ella, como se muestra en la figura 5.4. Por lo tanto, una articulación cilíndrica impone cuatro restricciones sobre los eslabones pareados y tiene dos DOF.

v) Articulación esférica, S Este tipo de articulación permite que uno de los eslabones pareados gire libremente en todas las orientaciones posibles respecto al otro alrededor del centro de una esfera. No permite el traslado relativo. Por consiguiente, impone tres restricciones y tiene tres DOF.

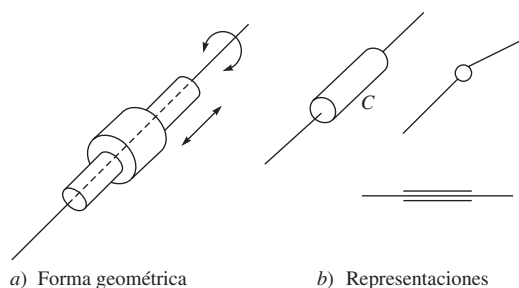
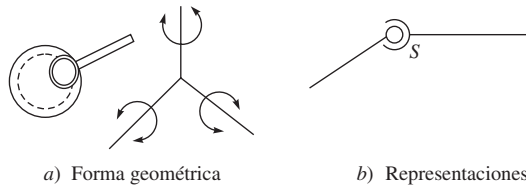
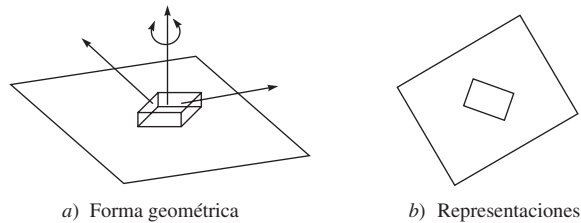


Figura 5.4 Una articulación cilíndrica

**Figura 5.5** Una articulación esférica**Figura 5.6** Una articulación planar

vi) Articulación planar, L Esta articulación de tres DOF permite dos traslados a lo largo de dos ejes independientes del plano de contacto y una rotación alrededor del eje perpendicular del plano, como se ve en la figura 5.6.

La tabla 5.1 resume las articulaciones básicas de pares inferiores, donde todas tienen contacto de superficie entre los eslabones interconectados. Otra articulación de pares inferiores de uso común en la robótica es la “articulación universal” de dos DOF, como se muestra en la figura 5.7, que es la combinación de dos articulaciones revolutas entrecruzadas. Ejemplos de articulaciones de pares superiores en robots son los “engranes” y las “levas con seguidores de rodillos”, donde hacen líneas de contacto.

5.1.2 Cadena cinemática

Una “cadena cinemática” es una serie de eslabones conectados por articulaciones. Cuando cada uno de los eslabones de una cadena cinemática se acopla a un máximo de otros dos, la cadena se denomina “cadena cinemática simple”.

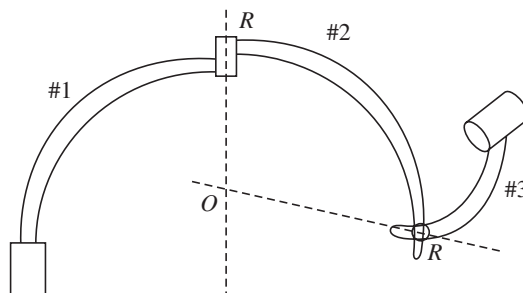
**Figura 5.7** Una articulación universal

Tabla 5.1 Articulaciones de pares inferiores

<i>Nombre</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Forma geométrica y representaciones</i>	<i>DOF</i>	<i>Superficie común</i>
Rotacional	<i>R</i>	Figura 5.1	1	Cilindro
Prismática	<i>P</i>	Figura 5.2	1	Prisma
Helicoidal	<i>H</i>	Figura 5.3	1	Tornillo
Cilíndrica	<i>C</i>	Figura 5.4	2	Cilindro
Esférica	<i>S</i>	Figura 5.5	3	Esfera
Planar	<i>L</i>	Figura 5.6	3	Plano



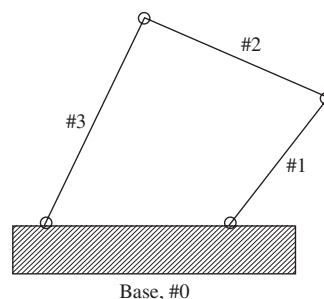
Mecanismo vs. manipulador

Mientras que un mecanismo puede ser un sistema mecánico de cadena abierta y cerrada, un manipulador se trata en este estudio como un sistema de cadena abierta.

Una cadena cinemática sencilla puede ser “abierta” o “cerrada”. Es cerrada cuando cada uno de los eslabones se acopla a otros dos eslabones, como se muestra en la figura 5.8. Una cadena cinemática es abierta si contiene exactamente dos eslabones, es decir, los eslabones de los extremos, que se acoplan solamente a un eslabón. El manipulador robótico que se muestra en la figura 5.9 se clasifica en esta categoría.

5.1.3 Grado de libertad

Formalmente, el grado de libertad (DOF) de un sistema mecánico se define como el número de coordenadas independientes o coordenadas mínimas necesarias para describir perfectamente su posición o configuración. Así, un cuerpo rígido que se mueve en el espacio cartesiano tridimensional tiene seis DOF, tres para la posición y tres para la orientación. Existen varias metodologías para determinar el DOF. Uno de estos métodos, presentado por Grubler en 1917 para mecanismos planares, fue posteriormente generalizado por Kutzbach, en 1929, para mecanismos espaciales. En forma conjunta, se conocen como el criterio de Grubler-Kutzbach y se describen a continuación:

**Figura 5.8** Un mecanismo de cuatro barras

Suponga lo siguiente:

- s*: dimensión del espacio de trabajo (para mecanismos planares, $s = 3$; para espaciales, $s = 6$),
- r*: número de cuerpos rígidos o eslabones en el sistema;
- p*: número de pares cinemáticos o articulaciones en el sistema;
- c_i*: número de restricciones impuestas por cada articulación;
- c*: número total de restricciones impuestas por articulaciones *p*;
- n_i*: grado de libertad relativo de cada articulación;
- n*: grado de libertad de todo el sistema.

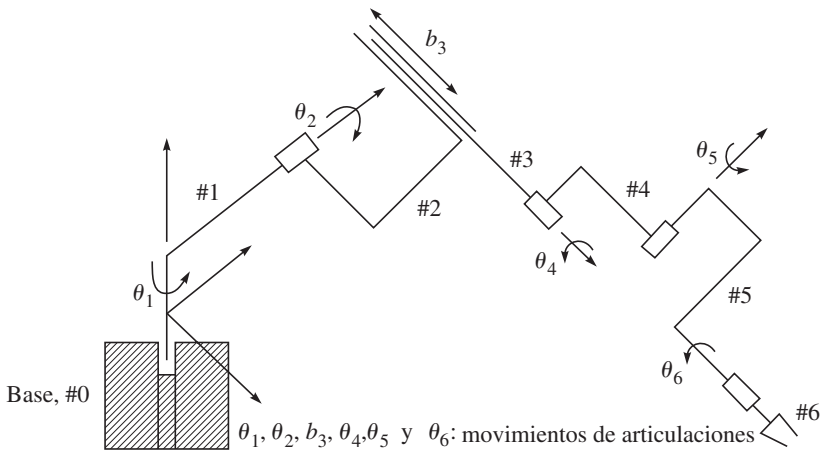


Figura 5.9 Un manipulador robótico

El DOF del sistema completo, n , se determina entonces a partir del DOF total asociado con todas las articulaciones móviles menos el número total de restricciones impuestas por todas las articulaciones, es decir,

$$n = s(r - 1) - c \quad (5.1)$$

donde $c \equiv \sum_{i=1}^p c_i$.

Observe que -1 en la ecuación (5.1) corresponde al eslabón fijo del sistema que tiene un DOF de cero. Además, para los eslabones acoplados, la suma del número de restricciones impuestas por cada articulación c_i y el grado de libertad relativo permitido por esta articulación n_i es igual a la dimensión del espacio de trabajo s , es decir,

$$s = c_i + n_i$$

Por lo tanto, el número total de restricciones impuestas por todas las articulaciones puede ser reescrito

$$c = \sum_{i=1}^p c_i = \sum_{i=1}^p (s - n_i) = sp - \sum_{i=1}^p n_i \quad (5.2)$$

Cuando se sustituye la ecuación (5.2) en la ecuación (5.1), se obtiene el DOF n como

$$n = s(r - p - 1) + \sum_{i=1}^p n_i \quad (5.3)$$

que es el muy conocido criterio de Grubler-Kutzbach para la determinación de los grados de libertad de un sistema. Observe que las dimensiones del eslabón no se incluyen en la fórmula, lo que ocasionalmente afecta al DOF del mecanismo debido a la disposición geométrica de sus eslabones.

Ejemplo 5.1**Mecanismo de cuatro barras**

La figura 5.8 muestra un mecanismo plano de cuatro barras cuyos eslabones, incluida la base, se conectan en un giro mediante cuatro articulaciones rotacionales. Aquí, $s = 3$, $r = 4$ y $p = 4$. La ecuación (5.3) da

$$n = 3(4 - 4 - 1) + (1 + 1 + 1 + 1) = 1 \quad (5.4)$$

Por tanto, la conexión planar de cuatro barras tiene un DOF.

Ejemplo 5.2**Un manipulador robótico**

La figura 5.9 muestra el diagrama esquemático de un robot Stanford. Su DOF puede determinarse usando la ecuación (5.3) siendo $s = 6$, $r = 7$ (incluida la base fija) y $p = 6$. Entonces, según la ecuación (5.3), el DOF del robot es

$$n = 6(7 - 6 - 1) + 6 \times 1 = 6 \quad (5.5)$$

Ejemplo 5.3**Mecanismo de cinco barras**

La figura 5.10 muestra un mecanismo planar de cinco barras. Hay cinco eslabones conectados en un lazo mediante cinco articulaciones rotacionales o revolutas. Por tanto, $s = 3$, $r = 5$ (incluida la base) y $p = 5$. La ecuación (5.3) proporciona

$$n = 3(5 - 5 - 1) + 5 \times 1 = 2 \quad (5.6)$$

El mecanismo planar de cinco barras tiene dos DOF, el cual también se usa frecuentemente como manipulador robótico.

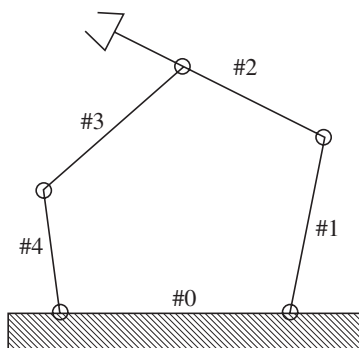


Figura 5.10 Un mecanismo de cinco barras

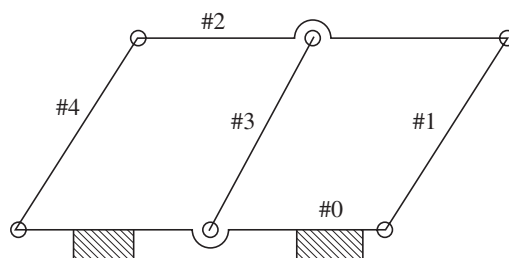


Figura 5.11 Un mecanismo de paralelogramo doble

Ejemplo 5.4**Un mecanismo de paralelogramo doble**

La figura 5.11 muestra un mecanismo de paralelogramo doble, donde $s = 3$, $r = 5$ (incluida la base fija) y $p = 6$. Según lo anterior, la ecuación (5.3) proporciona

$$n = 3(5 - 6 - 1) + 6 \times 1 = 0 \quad (5.7)$$

lo que interpreta el sistema como una estructura con cero DOF. Esto no es cierto, puesto que se sabe que el mecanismo tiene un DOF. En realidad, el eslabón 4 tiene una longitud igual que la del eslabón 1. Por ende, el eslabón 4 es cinemáticamente redundante y puede quitarse sin destruir la cadena cinemática básica ni el comportamiento de entrada/salida del mecanismo.

En general, si el criterio de Grubler-Kutzbach, ecuación (5.3), proporciona $n > 0$, el mecanismo tiene n DOF. Si el criterio proporciona $n = 0$, se trata de una estructura con cero DOF, y si $n < 0$, el sistema es una estructura estáticamente indeterminada con restricciones redundantes. Sin embargo, se presentan excepciones como la que se muestra en la figura 5.11, que no obedece al criterio de Grubler-Kutzbach. Para estos sistemas, Tsai (1999) describe un criterio de movilidad diferente, por ejemplo, el criterio de movilidad del lazo, etc., que puede emplearse para determinar su DOF.

5.2**Posición de un cuerpo rígido**

El movimiento de un cuerpo rígido en el espacio cartesiano tridimensional comprende la traslación y la rotación. Mientras que la traslación se define mediante el uso de las tres coordenadas cartesianas, la rotación necesita tres coordenadas angulares. Por lo tanto, el movimiento del cuerpo rígido puede definirse en forma completa usando las seis coordenadas. En el estudio de la cinemática de manipuladores robóticos, se trata constantemente con la posición y orientación de varios cuerpos en el espacio. Los cuerpos de interés incluyen los eslabones del manipulador, las herramientas y las piezas de trabajo. Con el fin de identificar la posición y orientación de un cuerpo, es decir, su “postura” o “configuración”, se establece un sistema de coordenadas fijas que se llama “sistema o marco de referencia fijo”. Luego se emplea un sistema de coordenadas cartesianas que se adjunta al cuerpo móvil para describir su postura.

La postura o la posición y orientación de un cuerpo rígido respecto al sistema de coordenadas de referencia se conoce a partir de los seis parámetros independientes. Como se muestra en la figura 5.12, supongamos que el sistema de coordenadas X - Y - Z fuese el “sistema de referencia fijo”. El sistema de coordenadas U - V - W se adjunta al cuerpo móvil y se denomina “sistema de referencia móvil”. Queda claro que la postura o configuración del cuerpo rígido se conoce si se sabe la posición del sistema móvil respecto al sistema fijo. Esta posición se

**Diferencia entre posición y configuración**

Estos términos significan lo mismo en este libro, es decir, la posición de un punto sobre un cuerpo rígido y la orientación del cuerpo rígido.

determina a partir de la “posición” de cualquier punto sobre él, por ejemplo, el origen O o el punto P , y la “orientación” del sistema móvil respecto a al sistema fijo.

5.2.1 Descripción de la posición

La “posición” de cualquier punto P sobre un cuerpo rígido en movimiento respecto a un sistema de referencia fijo puede describirse mediante el vector cartesiano tridimensional \mathbf{p} como se indica en la figura 5.12. Si las coordenadas del punto P o los componentes del vector \mathbf{p} son p_x, p_y, p_z en el sistema fijo F , se denota como

$$[\mathbf{p}]_F \equiv \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

donde el subíndice F se refiere al sistema de referencia en el que el vector \mathbf{p} se representa. Los subíndices x, y y z representan las proyecciones del vector de posición \mathbf{p} sobre los ejes de coordenadas del sistema de referencia fijo, a decir, a lo largo de X, Y y Z , respectivamente. El vector \mathbf{p} puede expresarse en forma alternativa como

$$\mathbf{p} = p_x \mathbf{x} + p_y \mathbf{y} + p_z \mathbf{z} \quad (5.9)$$

donde \mathbf{x}, \mathbf{y} y \mathbf{z} denotan los vectores unitarios a lo largo de los ejes X, Y y Z del sistema F , respectivamente, como se indica en la figura 5.12. Sus representaciones en el sistema F , es decir, $[\mathbf{x}]_F, [\mathbf{y}]_F$ y $[\mathbf{z}]_F$ son como sigue:

$$[\mathbf{x}]_F \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{y}]_F \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } [\mathbf{z}]_F \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Si se sustituye la ecuación (5.10) en la (5.9), puede demostrarse que la expresión del vector \mathbf{p} en el sistema F , es decir, $[\mathbf{p}]_F$, es la misma que se da en la ecuación (5.8). Observe que si el vector \mathbf{p} se representa en otro sistema de referencia fijo al del sistema F , tendrá diferentes componentes a lo largo de los ejes de coordenadas nuevos, a pesar de que la posición real del punto P no ha cambiado. Por lo tanto, se escribirá un vector normalmente sin mencionar

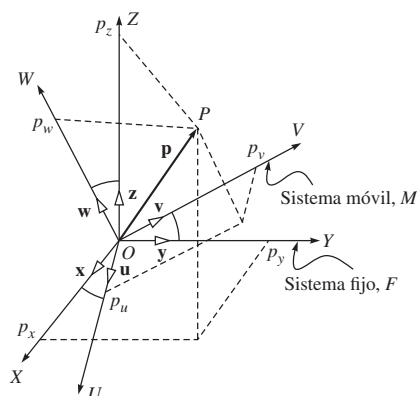


Figura 5.12 Descripción espacial

algún sistema, por ejemplo, como ocurre en la ecuación (5.9), la cual se llama, en contraste con las ecuaciones (5.8) y (5.10), representación de un sistema invariante. Sin embargo, es importante observar que cuando se resuelve un problema numérico, debe elegirse un sistema de coordenadas adecuado.

Ejemplo 5.5

Posición de un punto en el sistema fijo

Si las coordenadas de un punto P en el sistema de coordenadas fijas son $p_x = 3$, $p_y = 4$ y $p_z = 5$, entonces el vector de posición \mathbf{p} , según la ecuación (5.8), puede calcularse con

$$[\mathbf{p}]_F \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

5.2.2 Descripción de la orientación

La “orientación” de un cuerpo rígido respecto al sistema fijo puede describirse de diferentes maneras. Por ejemplo,

- i) Representación por coseno director;
- ii) Representación por los ángulos de Euler; y otras.

Cada una tiene sus propias limitaciones. De ser necesario, puede cambiarse de una representación a otra durante el control de movimiento de un robot para evitar sus limitaciones. Aquí se representarán las dos maneras previamente señaladas, que son suficientes para entender los conceptos subyacentes y sus limitaciones. Quien se interese en otras representaciones, podrá recurrir a los libros de Tsai (1999) o Ángeles (2003).

i) Representación del coseno director Para describir la orientación o la rotación de un cuerpo rígido, considere el movimiento de un sistema móvil M respecto a uno fijo F con un punto fijo, por ejemplo, el origen sistema fijo O , como se muestra en la figura 5.12. Suponga que \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} denotan los tres vectores unitarios que apuntan a lo largo de los ejes de coordenadas U , V y W de la trama móvil M , respectivamente, los cuales son parecidos a los vectores unitarios \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} , a lo largo de X , Y y Z de la trama fija F . Puesto que cada uno de los vectores unitarios \mathbf{u} , \mathbf{v} o \mathbf{w} denota la posición de un punto a una distancia de unidad del origen en los ejes de la trama M , ellos se expresan usando sus proyecciones sobre los ejes X , Y , Z o sobre el sistema F como

$$\mathbf{u} = u_x \mathbf{x} + u_y \mathbf{y} + u_z \mathbf{z} \quad (5.11a)$$

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{x} + v_y \mathbf{y} + v_z \mathbf{z} \quad (5.11b)$$

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{x} + w_y \mathbf{y} + w_z \mathbf{z} \quad (5.11c)$$

donde u_x , u_y y u_z son los componentes del vector unitario \mathbf{u} , a lo largo de los ejes X , Y y Z , respectivamente. De manera similar, v_x , v_y y v_z y w_x , w_y y w_z se definen para los vectores unitarios \mathbf{v} y \mathbf{w} , respectivamente. Ahora el punto P del cuerpo rígido, como se muestra en la figura 5.12 y lo da la ecuación (5.8), se expresa en el marco de referencia móvil M como

$$\mathbf{p} = p_u \mathbf{u} + p_v \mathbf{v} + p_w \mathbf{w} \quad (5.12)$$

donde p_u , p_v y p_w son los componentes del vector \mathbf{p} a lo largo de los ejes U , V y W del sistema de referencia móvil M . La sustitución de las ecuaciones (5.11a-c) en la ecuación (5.12) da como resultado

$$\mathbf{p} = (p_u u_x + p_v v_x + p_w w_x)\mathbf{x} + (p_u u_y + p_v v_y + p_w w_y)\mathbf{y} + (p_u u_z + p_v v_z + p_w w_z)\mathbf{z} \quad (5.13)$$

Si se compara el lado derecho de las ecuaciones (5.8) y (5.13), se obtienen las siguientes identidades:

$$p_x = u_x p_u + v_x p_v + w_x p_w \quad (5.14a)$$

$$p_y = u_y p_u + v_y p_v + w_y p_w \quad (5.14b)$$

$$p_z = u_z p_u + v_z p_v + w_z p_w \quad (5.14c)$$

Las ecuaciones (5.14a-c) se escriben en forma de matriz como

$$[\mathbf{p}]_F = \mathbf{Q}[\mathbf{p}]_M \quad (5.15)$$

donde $[\mathbf{p}]_F$ y $[\mathbf{p}]_M$ son las representaciones del vector tridimensional \mathbf{p} en los sistemas F y M , respectivamente, y \mathbf{Q} es la rotación de 3×3 o matriz de orientación que transforma la representación del vector \mathbf{p} del sistema M al F . Éstas se denotan como sigue:

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}]_F &\equiv \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, [\mathbf{p}]_M \equiv \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T \mathbf{x} & \mathbf{v}^T \mathbf{x} & \mathbf{w}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{u}^T \mathbf{y} & \mathbf{v}^T \mathbf{y} & \mathbf{w}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{u}^T \mathbf{z} & \mathbf{v}^T \mathbf{z} & \mathbf{w}^T \mathbf{z} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Observe las columnas de la matriz \mathbf{Q} . Son nada más los componentes de los vectores unitarios ortogonales (es decir, con 90° entre uno y otro) \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} en el sistema de referencia fijo F , que deben cumplir con las siguientes seis condiciones ortogonales:

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = \mathbf{w}^T \mathbf{w} = 1, \text{ y } \mathbf{u}^T \mathbf{v} (\equiv \mathbf{v}^T \mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{w} (\equiv \mathbf{w}^T \mathbf{u}) = \mathbf{v}^T \mathbf{w} (\equiv \mathbf{w}^T \mathbf{v}) = 0 \quad (5.17)$$

Además, para los tres vectores ortogonales \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} , lo siguiente es válido:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{u}, \quad \text{y} \quad \mathbf{w} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad (5.18)$$

Por tanto, la matriz de rotación de 3×3 \mathbf{Q} , que denota la orientación del sistema móvil M respecto al sistema fijo F , se llama ortogonal. Ella cumple con las siguientes propiedades debido a la ecuación (5.17):

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}; \text{ donde } \det(\mathbf{Q}) = 1, \text{ y } \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \quad (5.19)$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz de identidad de 3×3 . Además, si se quiere encontrar la descripción de rotación en el sistema F respecto al sistema M denotado por \mathbf{Q}' , puede derivarse de modo similar. Puede demostrarse que $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}^T$.

Observe también que, según la ecuación (5.16), el elemento (1, 1) de \mathbf{Q} es el coseno del ángulo entre los vectores \mathbf{u} y \mathbf{x} , es decir, $\mathbf{u}^T \mathbf{x}$. Lo mismo es válido para los demás elementos de \mathbf{Q} . Por lo tanto, esta matriz de rotación se conoce como “Representación por coseno director” de la matriz de rotación. Esta representación requiere nueve parámetros, a saber, los elementos de la matriz de 3×3 \mathbf{Q} . Sin embargo, los nueve parámetros no son independientes, ya que también tienen que cumplir con las seis condiciones de la ecuación (5.17). Por lo tanto, sólo tres son independientes y deberían ser suficientes para definir el movimiento

de rotación tridimensional. Empero, es difícil elegir el conjunto de tres parámetros independientes. Éste es el inconveniente de la representación del coseno director.

Ejemplo 5.6

Rotaciones elementales

Suponga que un sistema de referencia M coincide con el sistema de referencia fijo F . Entonces se gira el sistema M con un ángulo α alrededor del eje Z , como se muestra en la figura 5.13a). Los vectores unitarios del nuevo sistema M pueden describirse en términos de sus componentes en el sistema F como sigue:

$$[\mathbf{u}]_F \equiv \begin{bmatrix} C\alpha \\ S\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}]_F \equiv \begin{bmatrix} -S\alpha \\ C\alpha \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } [\mathbf{w}]_F \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

donde $S \equiv \text{sen}$; $C \equiv \text{cos}$. Por lo tanto, la matriz de rotación denominada por \mathbf{Q}_Z se calcula con

$$\mathbf{Q}_Z \equiv \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

En forma parecida, puede demostrarse que la rotación del ángulo β alrededor del eje Y y con un ángulo γ alrededor del eje X , se dan, respectivamente, por

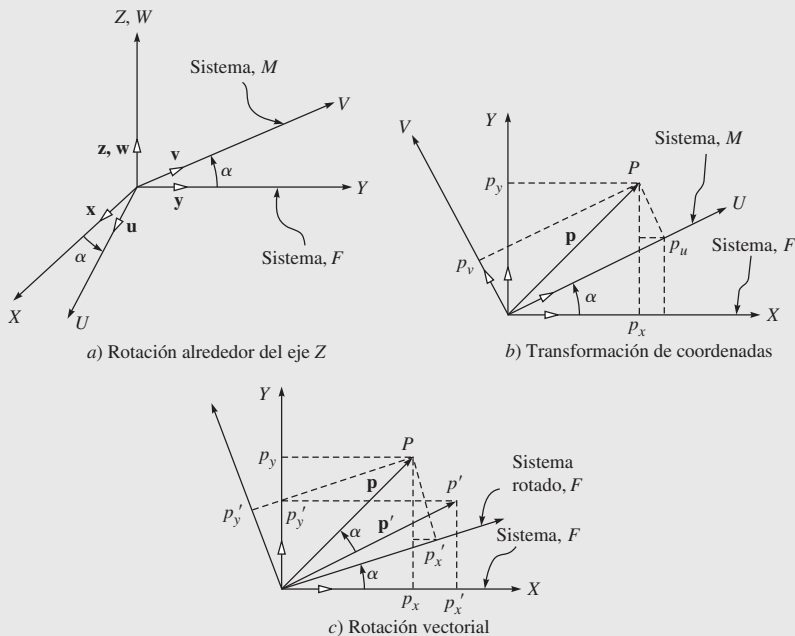


Figura 5.13 Interpretaciones alternativas de la matriz de rotación

$$\mathbf{Q}_Y \equiv \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{Q}_X \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Las matrices mencionadas en las ecuaciones (5.21) y (5.22) se llaman “rotaciones elementales” y son útiles para describir cualquier rotación arbitraria donde se conozcan los ángulos respecto a los ejes de coordenadas.

Ejemplo 5.7

Propiedades de matrices de rotación elemental

De las ecuaciones (5.21) y (5.22), la multiplicación de matrices de, por ejemplo, \mathbf{Q}_z^T y \mathbf{Q}_z , da como resultado lo siguiente:

$$\mathbf{Q}_z^T \mathbf{Q}_z = \begin{bmatrix} C\alpha & S\alpha & 0 \\ -S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usando la definición de determinante de una matriz dada en el apéndice A, puede fácilmente calcularse que $\det(\mathbf{Q}_z) = 1$. Por ende, \mathbf{Q}_z cumple con las dos propiedades de una matriz de rotación. Del mismo modo, puede demostrarse que las otras dos matrices también tienen las propiedades de una matriz de rotación.

Ejemplo 5.8

Transformación de coordenadas

Considere dos sistemas de coordenadas con un origen común. Uno de ellos gira con un ángulo α alrededor del eje Z. Suponga que $[\mathbf{p}]_F$ y $[\mathbf{p}]_M$ son las representaciones vectoriales del punto P en los sistemas F y M , respectivamente, como se muestra en la figura 5.13b). Con base en geometría simple, la relación entre las coordenadas del punto P en los dos sistemas de coordenadas se da por

$$p_x = p_u C\alpha - p_v S\alpha \quad (5.23)$$

$$p_y = p_u S\alpha + p_v C\alpha \quad (5.24)$$

$$p_z = p_w \quad (5.25)$$

donde p_x , p_y y p_z , así como p_u , p_v y p_w , son las tres coordenadas del punto P a lo largo de los ejes de los sistemas F y M , respectivamente. Es fácil darse cuenta a partir de las ecuaciones (5.23) a (5.25) que el vector $[\mathbf{p}]_F \equiv [p_x, p_y, p_z]_F$ no es otra cosa que

$$[\mathbf{p}]_F = \mathbf{Q}_Z [\mathbf{p}]_M \quad (5.26)$$

donde $[\mathbf{p}]_M \equiv [p_u, p_v, p_w]^T$ y \mathbf{Q}_Z se calculan con la ecuación (5.21). La matriz \mathbf{Q}_Z no solamente representa la orientación del sistema M respecto al sistema fijo F , como en la figura 5.13a), sino también transforma la representación de un vector desde el sistema M , por ejemplo, $[\mathbf{p}]_M$, a otro sistema F , es decir, $[\mathbf{p}]_F$.

Ejemplo 5.9**Rotación del vector**

Considere el vector \mathbf{p} que se obtiene mediante la rotación de un vector \mathbf{p}' en el plano X - Y con un ángulo α alrededor del eje Z del sistema de referencia F de la figura 5.13c). Suponga que p'_x , p'_y y p'_z son las coordenadas del vector \mathbf{p}' en el sistema F , es decir, $[\mathbf{p}']_F \equiv [p'_x, p'_y, p'_z]^T$. Entonces, el vector \mathbf{p} en el sistema F $[\mathbf{p}]_F$ tiene los siguientes componentes:

$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha \quad (5.27)$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \quad (5.28)$$

$$p_z = p'_z \quad (5.29)$$

que pueden obtenerse mediante la rotación del sistema fijo F por lo cual el vector \mathbf{p}' se adjunta con un ángulo α en sentido opuesto al de las manecillas del reloj alrededor del eje Z , de tal manera que el vector \mathbf{p}' alcanza al vector \mathbf{p} , como se indica en la figura 5.13c). Las ecuaciones de la (5.27) a la (5.29) pueden reescribirse en una forma más compacta como

$$[\mathbf{p}]_F = \mathbf{Q}_Z [\mathbf{p}']_F \quad (5.30)$$

donde \mathbf{Q}_Z se calcula con la ecuación (5.21).

ii) Representación de los ángulos de Euler Los ángulos de Euler constituyen una representación “mínima” de la orientación, obtenida al componer las tres rotaciones elementales respecto a los ejes de los sistemas de referencia actuales. Existe la posibilidad de 12 conjuntos distintos de ángulos de Euler respecto a la secuencia de posibles rotaciones elementales, a saber, $XYZ, XZY, XZX, YXY, YXZ, YZX, YZY, ZXY, ZYZ, ZZX$ y ZYX . De todos ellos, se utiliza más comúnmente el conjunto YZZ en la representación de ángulos de Euler. Esto implica que el sistema fijo F gira primero alrededor de su eje Z para alcanzar un sistema intermedio A , luego lo hace alrededor del eje Y del sistema rotado, es decir, Y' del sistema A , para llegar a otro sistema intermedio B y finalmente alrededor del eje Z del sistema que fue rotado dos veces, es decir, Z'' del sistema B , para llegar al sistema deseado M , como se muestra en la figura 5.14. Suponga que ϕ , θ y φ son los ángulos alrededor de Z , Y' y Z'' , respectivamente. La rotación total descrita por estos ángulos se obtiene entonces como las composiciones de las rotaciones elementales, como se explica a continuación, en la figura 5.14.

- Gire el sistema fijo F con el ángulo ϕ alrededor del eje Z , como se indica en la figura 5.14a). Esta rotación se describe con la matriz de rotación \mathbf{Q}_Z , como se deriva en la ecuación (5.21), es decir,

$$\mathbf{Q}_Z \equiv \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.31a)$$

- Gire el sistema actual A con un ángulo θ alrededor de su eje Y' , figura 5.14b). Esta rotación se denota por $\mathbf{Q}_{Y'}$ y se describe con la matriz de rotación \mathbf{Q}_Y de la ecuación (5.22), es decir,

$$\mathbf{Q}_{Y'} \equiv \begin{bmatrix} C\theta & 0 & S\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\theta & 0 & C\theta \end{bmatrix} \quad (5.31b)$$

- Gire el sistema B con un ángulo ϕ alrededor de su eje Z'' , figura 5.14c). Esta rotación se denota por $\mathbf{Q}_{Z''}$ y se describe con la matriz de rotación \mathbf{Q}_Z de la ecuación (5.21), es decir,

$$\mathbf{Q}_{Z''} \equiv \begin{bmatrix} C\phi & -S\phi & 0 \\ S\phi & C\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.31c)$$

La orientación resultante del sistema M denotada por \mathbf{Q} se obtiene a partir de la composición de las tres rotaciones elementales $\mathbf{Q}_{Z''}$, $\mathbf{Q}_{Y'}$ y $\mathbf{Q}_{X'}$ respecto a sus referencias actuales. Lo anterior se obtiene por medio de posmultiplicación de las sucesivas matrices de rotación, es decir,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_Z \mathbf{Q}_{Y'} \mathbf{Q}_{X'} \quad (5.31d)$$

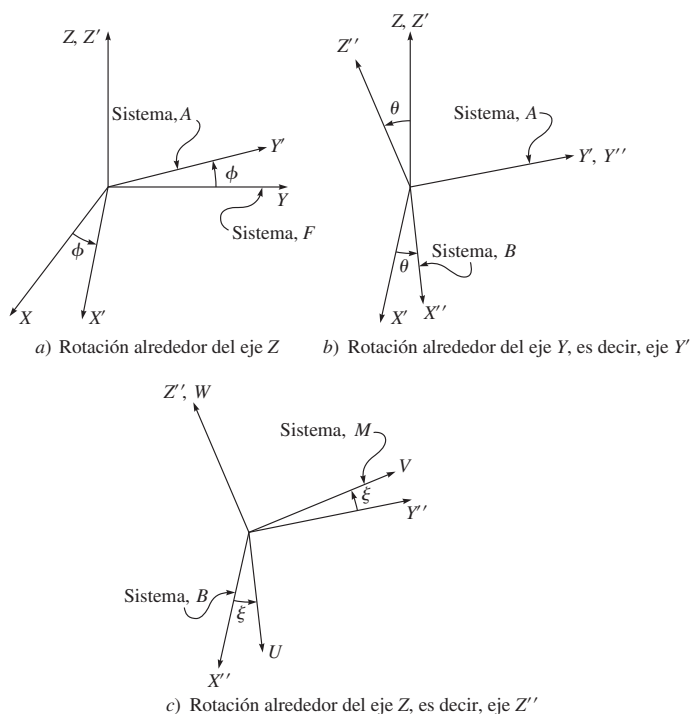


Figura 5.14 Los ángulos de Euler ZYZ

cuyos elementos se calculan a continuación:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} C\phi C\theta C\varphi - S\phi S\varphi & -C\phi C\theta S\varphi - S\phi C\varphi & C\phi S\theta \\ S\phi C\theta C\varphi + C\phi S\varphi & -S\phi C\theta S\varphi + C\phi C\varphi & S\phi S\theta \\ -S\theta C\varphi & S\theta S\varphi & C\theta \end{bmatrix} \quad (5.31e)$$

La desventaja de la representación mínima de ángulos de Euler, ecuación (5.31e), es que a veces fracasa en encontrar la solución para un problema inverso, es decir, que una matriz de rotación dada encuentre los ángulos de rotación de Euler equivalentes. Por ejemplo, si \mathbf{Q} se da de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \quad (5.32a)$$

entonces el ángulo ϕ puede obtenerse a partir de la comparación de (1, 3) y (2, 3) elementos de \mathbf{Q} dados por las ecuaciones (5.31e) y (5.32a), es decir,

$$\phi = \text{atan2}\left(\frac{q_{23}}{S\theta}, \frac{q_{13}}{S\theta}\right) \quad (5.32b)$$

donde “atan2(y, x)” es la función de dos argumentos que proporciona una solución única para el ángulo. La solución de la ecuación (5.32b) existe, siempre y cuando $S\theta \neq 0$, es decir, cuando $\theta \neq 0$, o $n\pi$ para $n = 1, 2, \dots$. Un aspecto importante de la representación de rotación, ya sea un coseno director o un ángulo de Euler o cualquier otra, es que, a diferencia de los vectores es no conmutativa, es decir, el orden de rotaciones es importante para derivar la matriz de rotación correcta. Como se ilustra en la figura 5.15a-c), la rotación de un paralelepípedo alrededor del eje Z y del eje actual Y es distinta de la rotación alrededor del eje Y del eje actual Z, como se muestra en la figura 5.16a-c). A fin de mostrar esto en forma matemática, la matriz resultante para las rotaciones alrededor de los ejes Z y Y, denotada por \mathbf{Q}_{ZY} , puede darse de esta manera:

$$\mathbf{Q}_{ZY} = \mathbf{Q}_Y \mathbf{Q}_Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33a)$$

donde \mathbf{Q}_Y y \mathbf{Q}_Z son como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_Y &\equiv \begin{bmatrix} C90^\circ & 0 & S90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -S90^\circ & 0 & C90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{Q}_Z &\equiv \begin{bmatrix} C90^\circ & -S90^\circ & 0 \\ S90^\circ & C90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.33b)$$

Observe que el orden de multiplicación en la ecuación (5.33a) es contrario al de la ecuación (5.31d). Esto se debe al hecho de que las rotaciones en la ecuación (5.31d) se determi-

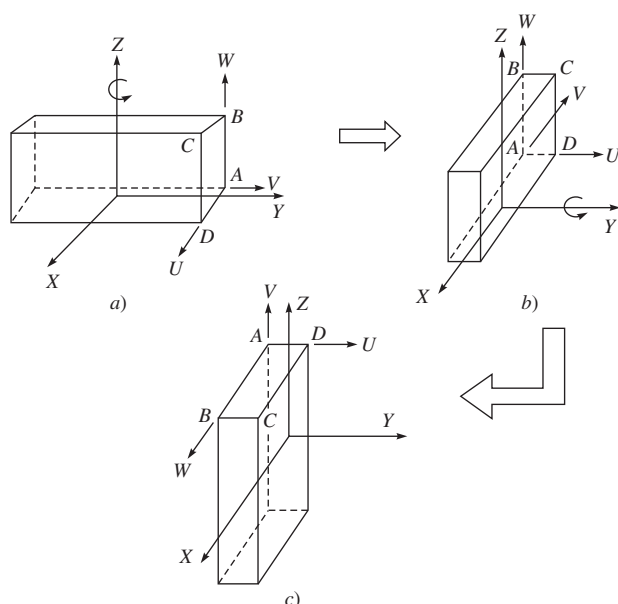


Figura 5.15 Rotación sucesiva de un paralelepípedo alrededor de los ejes Y y Z

nan respecto a los sistemas en uso, mientras que en la ecuación (5.33a) lo hacen respecto al sistema fijo. El resultado de la ecuación (5.33a) puede verificarse a partir de la figura 5.15c) utilizando el concepto de representación por coseno director de una matriz de rotación, como se explicó anteriormente. Del mismo modo, puede obtenerse la matriz de rotación resultante para las rotaciones alrededor de los ejes Y y Z , que son denotadas por \mathbf{Q}_{YZ} como

$$\mathbf{Q}_{YZ} = \mathbf{Q}_Z \mathbf{Q}_Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33c)$$

Cuando se comparan las ecuaciones (5.33a) y (5.33c), resulta obvio que las dos secuencias de rotaciones son diferentes. Sin embargo, lo mismo no es válido para la representación vectorial de un punto P respecto a O . Puede sumarse el vector \mathbf{b} a \mathbf{a} o el \mathbf{a} a \mathbf{b} , como en la figura 5.17. Ambas sumas resultarán en el mismo vector \mathbf{p} .

5.3



Transformación de coordenadas

Como se ilustra en la subsección 5.2.1, la posición de un cuerpo rígido en el espacio se expresa en términos de la posición de un punto apropiado sobre el cuerpo, por ejemplo, O_M en la figura 5.18 respecto al origen O del sistema fijo F , mientras que su orientación o rotación se expresa en términos de los componentes del vector unitario del sistema móvil M , adjun-

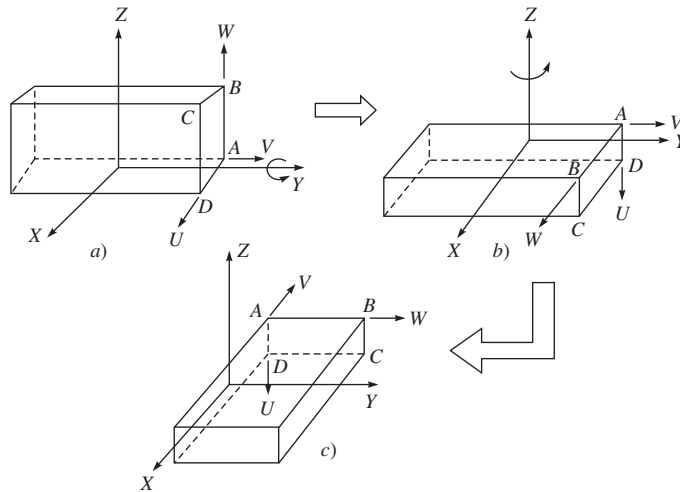


Figura 5.16 Rotación sucesiva de un paralelepípedo alrededor de los ejes Y y Z

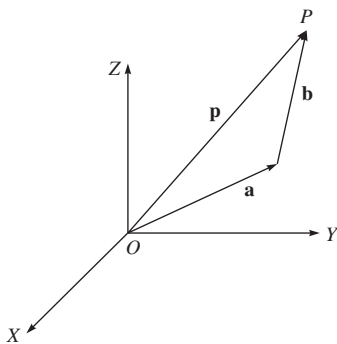


Figura 5.17 Suma de dos vectores

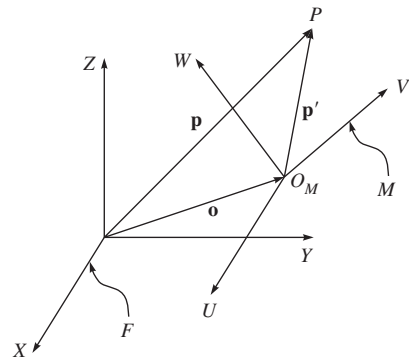


Figura 5.18 Dos sistemas de coordenadas

tada al cuerpo, como se explicó en la subsección 5.2.2. En la figura 5.18, la relación entre los dos sistemas de coordenadas, a saber, F y M , se deriva como sigue: considere un punto arbitrario P sobre el cuerpo rígido por el cual el sistema M se adjunta a O_M . Suponga que \mathbf{p} y \mathbf{p}' son los vectores que denotan el punto P desde el origen de los sistemas de referencia F y M , respectivamente. Además, suponga que \mathbf{o} es el vector posicional que denota la traslación del origen del sistema M , O_M desde el del sistema F , es decir, O . De este modo,

$$\mathbf{p} = \mathbf{o} + \mathbf{p}' \quad (5.34)$$

Observe que si \mathbf{p}' se conoce en el sistema móvil M , entonces no es otra cosa que las coordenadas del punto P en el sistema M , es decir, $[\mathbf{p}']_M$. Además, si \mathbf{Q} es la orientación del sistema M respecto al sistema F , entonces el vector \mathbf{p}' en el sistema F es $[\mathbf{p}']_F = \mathbf{Q}[\mathbf{p}']_M$. Por lo tanto, el vector \mathbf{p} en el sistema fijo F , es decir, $[\mathbf{p}]_F$, puede obtenerse como

$$[\mathbf{p}]_F = [\mathbf{o}]_F + \mathbf{Q}[\mathbf{p}']_M \quad (5.35)$$

La ecuación (5.35) representa la “transformación de coordenadas” del punto P del cuerpo rígido desde el sistema móvil M al sistema de referencia fijo F , mientras que la traslación y la rotación se involucran.

5.3.1 Transformación homogénea

La transformación de coordenadas dada por la ecuación (5.35) puede reordenarse como

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{p}]_F \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & [\mathbf{o}]_F \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{p}']_M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

donde $\mathbf{0} \equiv [0, 0, 0]^T$ es el vector tridimensional de ceros. La ecuación (5.36) se escribe en forma compacta como

$$\overline{[\mathbf{p}]}_F = \mathbf{T} \overline{[\mathbf{p}']}_M \quad (5.37)$$

donde $\overline{[\mathbf{p}]}_F$ y $\overline{[\mathbf{p}']}_M$ son los vectores en cuatro dimensiones que se obtienen cuando uno se coloca en el fondo de los vectores tridimensionales originales $[\mathbf{p}]_F$ y $[\mathbf{p}']_M$, respectivamente, como el cuarto elemento, mientras que la matriz \mathbf{T} de 4×4 se llama “matriz de transformación homogénea”.



¿Por qué homogéneo?

La matriz \mathbf{T} de la ecuación (5.36) se ocupa tanto de la traslación como de la rotación del sistema adjunto al cuerpo respecto al sistema de referencia fijo.

La ecuación (5.36) o (5.37) es sencilla en el sentido de que la transformación de un vector, que incluye tanto la traslación como la rotación desde el sistema M al sistema F , se realiza por simple multiplicación de una matriz de 4×4 en lugar de una multiplicación de matrices y suma de vectores, como en la ecuación (5.35).

Sin embargo, desde el punto de vista de la complejidad computacional, es decir, de los números de multiplicaciones/divisiones y sumas/restas que se requieren en un programa de computación, la ecuación (5.35) es más económica en comparación con las ecuaciones (5.36) y (5.37), puesto que se tendrán que ejecutar algunas multiplicaciones y sumas innecesarias con unos y ceros. Aquí cabe señalar que para la matriz \mathbf{T} de transformación homogénea, no es válida la propiedad de ortogonalidad, es decir,

$$\mathbf{T}^T \mathbf{T} \neq \mathbf{1} \quad \text{o} \quad \mathbf{T}^{-1} \neq \mathbf{T}^T \quad (5.38)$$

Sin embargo, el inverso de la matriz \mathbf{T} de transformación homogénea puede obtenerse fácilmente a partir de la ecuación (5.36) como

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & -\mathbf{Q}^T [\mathbf{o}]_F \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Ejemplo 5.10

Traslación pura

Recurriendo a la figura 5.19a), considere el sistema M que se obtiene a partir del sistema F mediante su traslación por dos unidades a lo largo del eje Y y una unidad a lo largo del eje Z . Su relación se representa por una matriz de transformación homogénea, es decir,

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Ejemplo 5.11 Rotación pura

Considere la figura 5.19b), donde el sistema M se obtiene a partir del sistema de referencia F por medio de su rotación alrededor de su eje Z con un ángulo de 30° . La matriz de transformación homogénea para la rotación pura se proporciona entonces por

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & 0 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

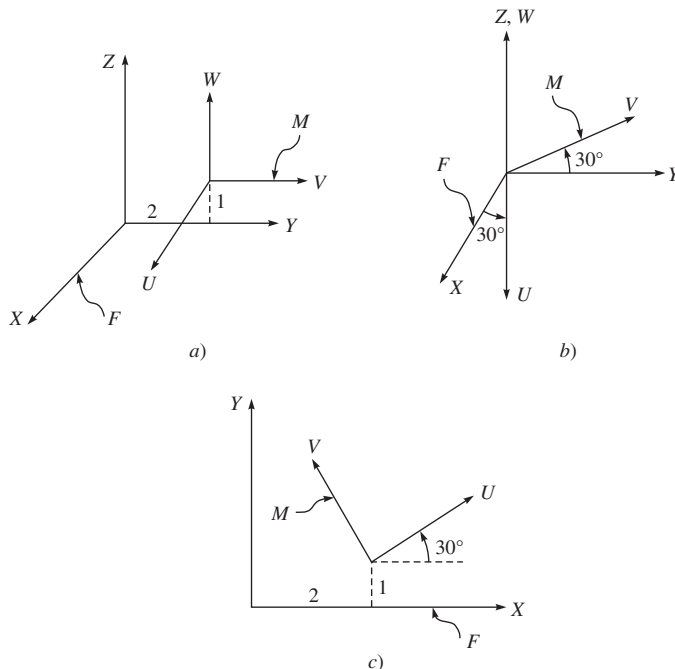


Figura 5.19 Diferentes movimientos

Ejemplo 5.12**Movimiento general**

Como se muestra en la figura 5.19c), el sistema M se obtiene del sistema de referencia F mediante su traslación a lo largo de los ejes X y Y por 2 y 1 unidades, respectivamente, seguida por una rotación de 30° alrededor de W . La matriz de transformación homogénea correspondiente se obtiene de la multiplicación de las matrices de transformación homogénea que representan la traslación y la rotación puras, respectivamente, respecto a los sistemas de referencia originales, es decir,

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_t \mathbf{T}_r \quad (5.42)$$

donde los subíndices “ t ” y “ r ” significan “traslación” y “rotación”, respectivamente, y donde \mathbf{T}_t y \mathbf{T}_r se proporcionan con las ecuaciones (5.40) y (5.41), respectivamente. La matriz \mathbf{T} resultante se proporciona con

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & 2 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Ejemplo 5.13**Transferencia de un punto**

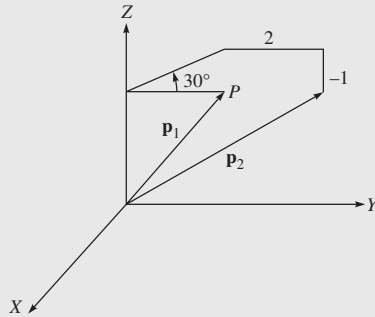
Recurriendo a la figura 5.20, considere un punto P que se expresa en el sistema F y que se denota con el vector \mathbf{p}_1 . Suponga que \mathbf{p}_2 denota la nueva ubicación de este punto después de rotar \mathbf{p}_1 con 30° alrededor del eje Z , y luego trasladando 2 unidades a lo largo del eje Y y -1 unidad a lo largo del eje Z . La relación entre \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 puede describirse como

$$[\mathbf{p}_2]_F = \mathbf{T}[\mathbf{p}_1]_F, \text{ donde } \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}_t \mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & 0 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.44a)$$

donde \mathbf{T}_t y \mathbf{T}_r corresponden a la traslación pura y a la rotación pura, es decir,

$$\mathbf{T}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & 0 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.44b)$$

Observe que el orden de multiplicaciones en la ecuación (5.44a), que se parece a la ecuación (5.33a) o (5.33c), y los movimientos se especifican respecto al sistema fijo F en lugar de los sistemas de referencia originales.

**Figura 5.20** Transferencia de un punto**Ejemplo 5.14****Producto de dos transformaciones homogéneas**

Suponga que \mathbf{T}_A y \mathbf{T}_B son proporcionados por

$$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & 2 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{T}_B = \begin{bmatrix} C45^\circ & S45^\circ & 0 & 1 \\ -S45^\circ & C45^\circ & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

que se representan gráficamente en la figura 5.21. Observe que cada una de las transformaciones \mathbf{T}_A o \mathbf{T}_B es un producto de las dos transformaciones elementales que representan la traslación y rotación respecto a los sistemas de referencia dados. Por ejemplo, la matriz \mathbf{T}_A puede escribirse como

$$\mathbf{T}_A = \mathbf{T}_{At} \mathbf{T}_{Ar} \quad (5.46a)$$

donde las matrices de transformación homogénea de 4×4 , \mathbf{T}_{At} y \mathbf{T}_{Ar} , se asocian con la traslación y rotación desde el sistema fijo F al sistema A , respectivamente; es decir,

$$\mathbf{T}_{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{T}_{Ar} = \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & 0 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.46b)$$

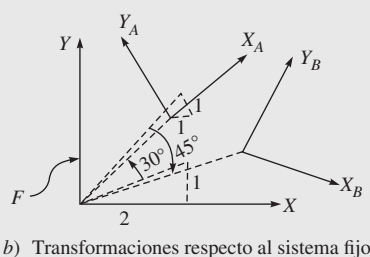
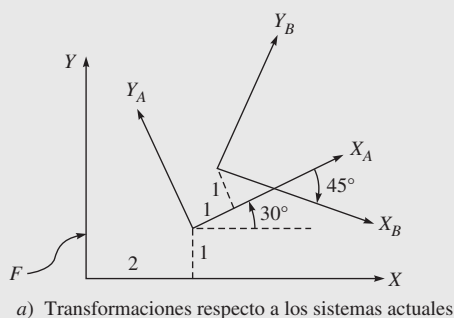


Figura 5.21 Interpretaciones gráficas de los productos de dos matrices de transformación homogénea

El total de transformaciones por alcanzar el sistema B desde el sistema F se obtiene ahora como

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_A \mathbf{T}_B \quad (5.47a)$$

La matriz \mathbf{T} de 4×4 se expresa como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47b)$$

Observe que si se ejecutan las mismas transformaciones respecto al sistema fijo F , como se muestra en la figura 5.21b), el orden de multiplicaciones tiene que ser invertido, es decir,

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_B]_F [\mathbf{T}_A]_F \quad (5.48a)$$

donde $[\mathbf{T}_A]_F$ y $[\mathbf{T}_B]_F$ también se obtienen de las multiplicaciones de orden inverso de las traslaciones y rotaciones, por ejemplo,

$$[\mathbf{T}_A]_F = [\mathbf{T}_{A_T}]_F [\mathbf{T}_{A_T}]_F$$

donde \mathbf{T}_{Ar} y \mathbf{T}_{Ar} son las matrices de 4×4 proporcionadas en la ecuación (5.46b). Las matrices $[\mathbf{T}_A]_F$, $[\mathbf{T}_B]_F$ y \mathbf{T} se calculan como sigue:

$$[\mathbf{T}_A]_F = \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 & \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{T}_B]_F = \begin{bmatrix} C45^\circ & S45^\circ & 0 & \sqrt{2} \\ -S45^\circ & C45^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.48b)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.48c)$$

Cuando se comparan las ecuaciones (5.47b) y (5.47c), sólo las coordenadas del origen del sistema B son diferentes, como queda claro a partir de las figuras 5.21a-b).

Ejemplo 5.15

Verificación de la ecuación (5.48c) por medio de MATLAB

Para verificar la ecuación, deben usarse los siguientes comandos:

```
>tam=[cos(pi/6),-sin(pi/6),0,sqrt(3)-1/2;sin(pi/6),cos(pi/6),0,1+sqrt(3)/2;0,0,1,0;0,0,0,1];
>tbm=[cos(pi/4),sin(pi/4),0,sqrt(2);-sin(pi/4),cos(pi/4),0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
>tm=tbm*tam
tm =
```

0.9659	0.2588	0	3.6049
-0.2588	0.9659	0	0.4483
0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000

donde “tam” y “tbm” representan las matrices $[\mathbf{T}_A]_F$ y $[\mathbf{T}_B]_F$, respectivamente, mientras que la matriz resultante $[\mathbf{T}]_F$ se denota por “tm”. Puede verificarse fácilmente que la ecuación (5.48c) es la expresión proporcionada por “tm”.

5.4



Los parámetros de Denavit y Hartenberg (DH)

Un manipulador robótico consiste en varios eslabones, usualmente conectados por articulaciones de un solo grado de libertad, por ejemplo, una articulación rotacional o prismática. Con el fin de controlar el efector final respecto a la base, es necesario encontrar la relación



La primera aparición de los parámetros DH

Los parámetros DH aparecieron por vez primera en 1955 (Denavit y Hartenberg, 1955) para representar una línea dirigida que no es otra cosa que el eje de una articulación de par inferior.

entre los sistemas de coordenadas adjuntos al efector final y la base. Esto puede obtenerse a partir de la descripción de las transformaciones de coordenadas adjuntas a todos los eslabones que forman la descripción general de manera recursiva. Para este propósito, el material que se presenta en la sección previa para describir la posición y orientación del cuerpo rígido es útil para obtener la composición de transformaciones de coordenadas entre los sistemas consecutivos. Como primer paso, deberá derivarse un método sistemático

general para definir la posición y orientación relativa de los dos eslabones consecutivos. El problema es la definición de los dos sistemas adjuntos a los dos eslabones sucesivos y el cálculo de la transformación de coordenadas entre ellos. En general, los sistemas de referencia se eligen de manera arbitraria mientras estén de manera adjunta al eslabón al que se refieran. No obstante, conviene establecer algunas reglas para la definición de los sistemas de eslabones. La convención que aquí se adopta para un robot de cadena serial como el que se muestra en la figura 5.22 es que tiene $n + 1$ eslabones, es decir, vínculo #0, ... # n , acoplados por n articulaciones, es decir, articulación 1, ... n .

Ahora, en la figura 5.23,

- Supongamos que el eje i denota el eje de la articulación que conecta el eslabón $i - 1$ al vínculo i .
- Un sistema de coordenadas X_i, Y_i, Z_i se adjunta al extremo del eslabón $i - 1$, no al eslabón i , para $i = 1, \dots, n + 1$.
- Elija el eje Z_i a lo largo del eje de la articulación i , cuyo sentido positivo puede tomarse hacia cualquier dirección del eje.
- Ubique el origen O_i en la intersección del eje Z_i con la perpendicular común a Z_{i-1} y Z_i . También localice O'_i sobre Z_i en la intersección de la perpendicular común a Z_i y Z_{i+1} .
- Elija el eje X_i a lo largo de la perpendicular común a los ejes Z_{i-1} y Z_i con la dirección del primero al último.
- Elija el eje Y_i para que se complete con un sistema de referencia derecho.

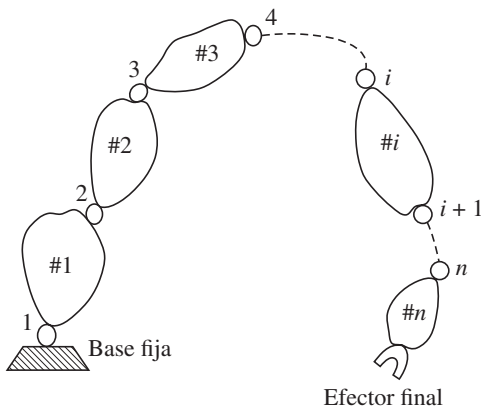
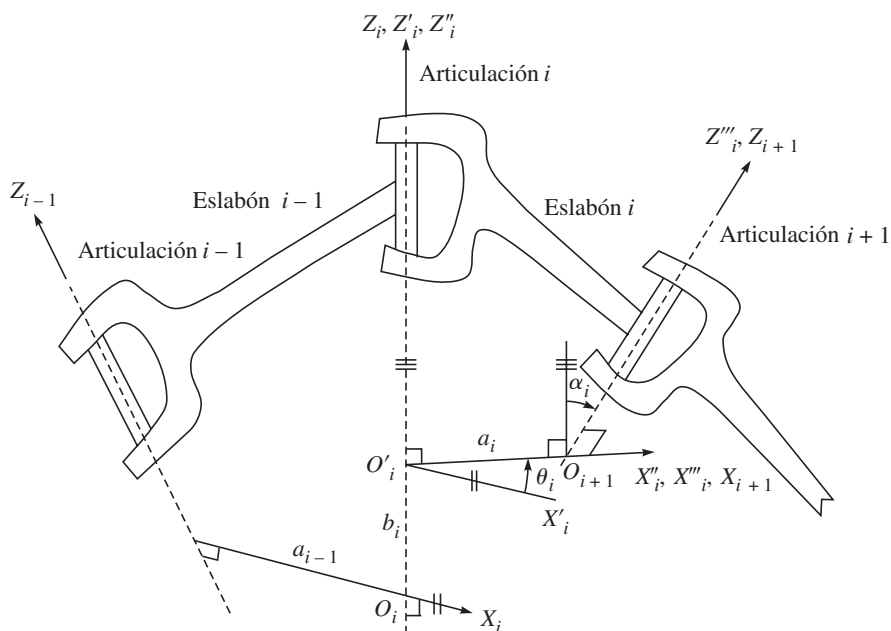
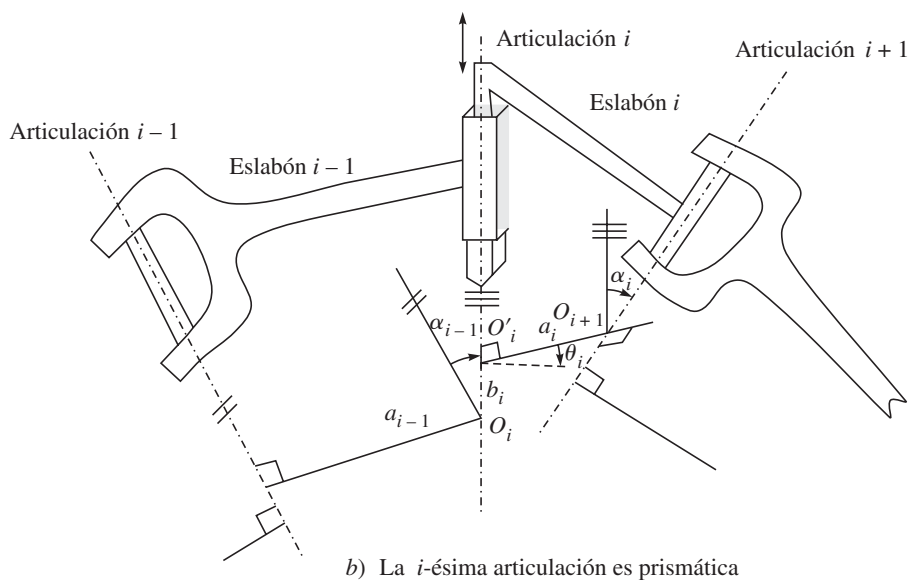


Figura 5.22 Manipulador serial

a) La i -ésima articulación número es rotacionalb) La i -ésima articulación es prismática**Figura 5.23** Convención de sistemas de referencia y parámetros de Denavit y Hartenberg (DH)

Observe que las convenciones arriba ilustradas no dan una definición única de los sistemas de eslabones en los siguientes casos:

- Para el sistema 1 que se une a la base fija, es decir, el eslabón 0, sólo se especifica el sentido de los ejes Z_1 . Entonces O_1 y X_1 pueden elegirse en forma arbitraria.
- Para el último sistema $n + 1$ no aplica la convención mencionada, ya que no existe ningún eslabón $n + 1$. Por ende, el sistema $n + 1$ puede elegirse en forma arbitraria.
- Cuando dos ejes consecutivos son paralelos, la perpendicular común entre ellos no se define de manera única.
- Cuando se cruzan dos ejes consecutivos, el sentido de X_i es arbitrario.

Cuando la articulación i es prismática, sólo se determina el sentido del eje Z_i , mientras que la ubicación de O_i es arbitraria.

En todos estos casos, puede explotarse la indeterminación para simplificar el proceso. Por ejemplo, los ejes del sistema $n + 1$ pueden hacerse paralelos a los del sistema n . Una vez que se hayan establecido los sistemas de los eslabones, la posición y orientación de el sistema i respecto a el sistema $i - 1$ quedan completamente especificadas por los cuatro parámetros que se conocen como parámetros de Denavit y Hartenberg (DH). Por tanto, a estos sistemas también se les conoce como sistemas de referencia de DH. Los cuatro parámetros DH se definen como sigue:

a) b_i (Desplazamiento de la articulación) Longitud de las intersecciones de las perpendiculares comunes en el eje de articulación Z_i , es decir, O_i y O'_i . Ésta es la posición relativa de los eslabones $i - 1$ e i . Esto se mide como la distancia entre X_i y X_{i+1} a lo largo de Z_i .

b) θ_i (Ángulo de la articulación) Es el ángulo entre las proyecciones ortogonales de las perpendiculares normales X_i y X_{i+1} a un plano perpendicular del eje de la articulación Z_i . La rotación es positiva cuando se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Es el ángulo relativo entre los eslabones $i - 1$ e i . Esto se mide como el ángulo entre X_i y X_{i+1} alrededor de Z_i .

c) a_i (Longitud del eslabón) La longitud entre O'_i y O_{i+1} . Esto se mide como la distancia entre las perpendiculares comunes a los ejes Z_i y Z_{i+1} a lo largo de X_{i+1} .

d) α_i (Ángulo de torsión) El ángulo entre las proyecciones ortogonales de los ejes de articulación Z_i y Z_{i+1} sobre un plano perpendicular a la perpendicular común. Esto se mide como el ángulo entre los ejes Z_i y Z_{i+1} alrededor del eje X_{i+1} para que se tome como positivo cuando la rotación se realiza en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Observe que los cuatro parámetros que se mencionan arriba se definen en forma secuencial cuando se mueve desde el eslabón $i - 1$ al eslabón $i + 1$ a través del eslabón i . Además, los primeros dos parámetros, es decir, b_i y θ_i , definen la posición relativa de los eslabones $i - 1$ e i , mientras que los últimos dos, a_i y α_i , describen el tamaño y la forma del eslabón i que siempre son constantes. Los parámetros b_i y θ_i , sin embargo, son variables, dependiendo del tipo de articulaciones que se usen. En particular,

- θ_i es variable si la articulación i es rotacional; y
- b_i es variable si la articulación i es prismática.

Así, para un tipo de articulación dada, es decir, rotacional (revoluta) o prismática, uno de los parámetros DH es variable, lo que se denomina “variable de articulación”, mientras que los tres parámetros restantes son constantes y se llaman “parámetros de eslabones”.

Ejemplo 5.16**Parámetros DH de un brazo planar de tres eslabones**

La figura 5.24 muestra un brazo planar de tres eslabones. Los sistemas de coordenadas para definir los parámetros DH se muestran en la figura. Los parámetros DH se tabulan en la tabla 5.2, donde a_i y θ_i , para $i = 1, 2, 3$, son las longitudes de los eslabones y los ángulos de articulaciones, respectivamente. El eje Z_1 es perpendicular al plano de la página y X_1 se elige en forma arbitraria. Observe que el sistema 1, es decir, X_1, Y_1 y Z_1 , se adjunta al eslabón denotado como #0. Puesto que no existe un vínculo 4, el sistema 4 puede ser asignada arbitrariamente, de tal modo que su eje X se sitúa a lo largo del eslabón, tal como se hizo para los sistemas 2 y 3.

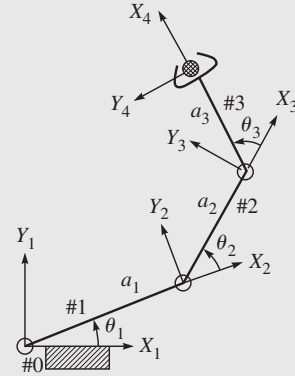


Figura 5.24 Un brazo planar de tres eslabones

Tabla 5.2 Parámetros DH del brazo de tres eslabones

Eslabón	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	$\theta_1(JV)$	a_1	0
2	0	$\theta_2(JV)$	a_2	0
3	0	$\theta_3(JV)$	a_3	0

JV: Variable de articulación

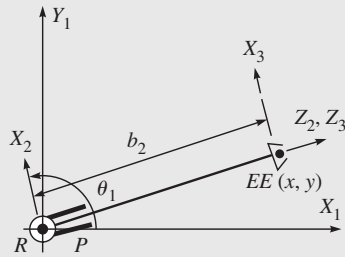
Cabe señalar lo siguiente: para que un miembro de dos eslabones tenga las dos articulaciones rotacionales o revolutas, es decir, que la #3 se remueva de la figura 5.24, los parámetros DH de la tabla 5.2, sin la tercera hilera, siguen siendo válidos.

Ejemplo 5.17**Parámetros DH de un brazo planar rotacional-prismático**

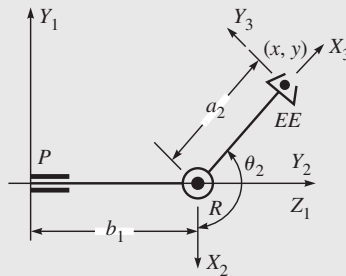
En un brazo planar rotacional-prismático (RP), figura 5.25, donde las articulaciones rotacional y prismática se indican como R y P , respectivamente, los parámetros DH se encuentran en la tabla 5.3.

Tabla 5.3 Parámetros DH del brazo RP

Eslabón	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	$\theta_1(JV)$	0	$\pi/2$
2	$b_2(JV)$	0	0	0°

**Figura 5.25** Brazo planar rotacional-prismático**Ejemplo 5.18****Parámetros DH de un brazo planar prismático-rotacional**

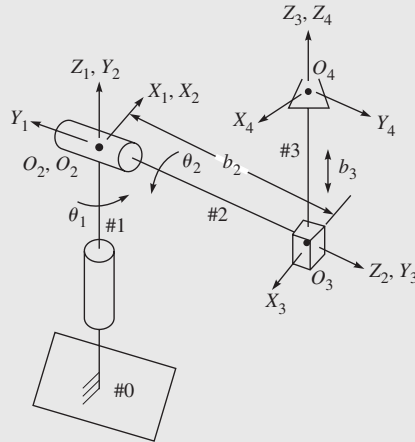
Si se intercambian las articulaciones rotacional y prismática, el resultado es un brazo prismático-rotacional (PR), como se muestra en la figura 5.26. Sus parámetros DH se muestran en la tabla 5.4.

**Figura 5.26** Brazo planar prismático-rotacional**Tabla 5.4** Parámetros DH del brazo PR

Eslabón	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	$b_1(JV)$	0	0	$\pi/2$
2	0	$\theta_2(JV)$	a_i	0

Ejemplo 5.19**Parámetros DH de un brazo esférico**

Respecto al brazo de robot del tipo esférico que se muestra en la figura 5.27, observe que el primero y segundo eslabones, es decir, #1 y #2, se entrecruzan y la longitud del primero no afecta el movimiento del efector final debido a la rotación de la primera articulación. Por lo tanto, es útil situar tanto el primer como el segundo sistema de

**Figura 5.27** Un brazo de tipo esférico

referencia en la intersección de los primeros dos ejes rotacionales, es decir, en O_1 u O_2 . Los parámetros DH se tabulan en la tabla 5.5, donde b_2 , b_3 y θ_i , para $i = 1, 2, 3$, se indican en la figura 5.27.

Tabla 5.5 Parámetros DH del brazo esférico

Eslabón	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1 (JV)	0	$\pi/2$
2	b_2	θ_2 (JV)	0	$\pi/2$
3	b_3 (JV)	0	0	0

5.4.1 Transformaciones entre sistemas DH

En este momento puede expresarse la transformación de coordenadas entre los sistemas DH i e $i + 1$, que se adjuntan a los eslabones $i - 1$ e i , respectivamente. En la figura 5.23,

- a) Traslade el sistema i mediante b_i a lo largo de los ejes Z_i . Esto lleva el origen O_i del sistema i en coincidencia con O'_i . Suponga que O'_i es el origen de el sistema desplazado i' . La matriz de transformación correspondiente es

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49a)$$

donde b_i indica la traslación por la cantidad b_i a lo largo del eje Z_i .

- b) El sistema desplazado, es decir, el sistema i' , se gira con un ángulo θ_i alrededor del eje Z_i , lo que lleva el eje X'_i (paralelo a X_i) en alineación con el eje X_{i+1} . El nuevo sistema se llama i'' . La matriz de transformación correspondiente es

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49b)$$

- c) Deslice el sistema i'' mediante a_i a lo largo del eje $X_{i''}$ ($\equiv X_{i+1}$). Esto lleva al origen del sistema i'' , $O_{i''}$ ($\equiv O'_i$) en coincidencia con O_{i+1} . La matriz de transformación correspondiente es

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49c)$$

El nuevo sistema se llama i''' .

- d) Finalmente, gire el sistema i''' con un ángulo α_i alrededor del eje $X_{i'''} (\equiv X_{i+1})$, que ahora coincidirá con el sistema $i + 1$. La matriz de transformación correspondiente es

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.49d)$$

La resultante transformación de coordenadas entre los sistemas conectados con los cuerpos $i - 1$ e i , es decir, \mathbf{T}_i , se obtiene ahora mediante la posmultiplicación de las cuatro transformaciones elementales de arriba, como se hace en la ecuación (5.31d), es decir,

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{T}_b \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_a \mathbf{T}_\alpha \quad (5.50a)$$

La expresión \mathbf{T}_i también puede leerse como matriz de transformación del sistema adjunto al cuerpo i , es decir, sistema $i + 1$, como se representa en el sistema incorporado al cuerpo $i - 1$, es decir, sistema i . Por medio de sustitución de las expresiones de matriz de las ecuaciones (5.49 a-d) a la ecuación (5.50a), se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i C\alpha_i & S\theta_i S\alpha_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i C\alpha_i & -C\theta_i S\alpha_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & b_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50b)$$

Observe que la matriz de transformación del sistema i al sistema $i + 1$ es una función de únicamente la i -ésima variable de articulación de potencia, es decir, θ_i para una articulación revoluta o rotacional, y b_i para una articulación prismática, porque los otros tres parámetros DH son constantes.

Ejemplo 5.20**Transformación homogénea del brazo planar de tres eslabones**

Conforme a la figura 5.24 y a los parámetros DH indicados en la tabla 5.2, las matrices de transformación homogénea T_i pueden derivarse de la ecuación (5.50b) como

$$T_i = \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & a_i S\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ para } i = 1, 2, 3 \quad (5.51)$$

Ejemplo 5.21**Transformación homogénea del brazo planar RP**

Conforme a la figura 5.25 y a los parámetros DH indicados en la tabla 5.3, las matrices de transformación homogénea T_i , para $i = 1, 2$, pueden derivarse de la ecuación (5.50b) como

$$T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Ejemplo 5.22**Transformación homogénea del brazo planar PR**

Conforme a la figura 5.26 y a los parámetros DH indicados en la tabla 5.4, las matrices de transformación homogénea T_i para $i = 1, 2$, pueden derivarse de la ecuación (5.50b) como

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & -S\theta_2 & 0 & a_2 C\theta_2 \\ S\theta_2 & C\theta_2 & 0 & a_2 S\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Ejemplo 5.23**Transformación homogénea del brazo esférico**

Conforme a la figura 5.27 y a los parámetros DH indicados en la tabla 5.5, las matrices de transformación homogénea T_i , para $i = 1, 2, 3$, pueden derivarse de la ecuación (5.50b) como

$$T_1 = \begin{bmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } T_2 = \begin{bmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Ejemplo 5.24**Obtenga la ecuación (5.50b) por medio de MATLAB**

Para obtener la ecuación (5.50b), las operaciones simbólicas tienen que ejecutarse en MATLAB. Para este fin, se usan los siguientes comandos:

```
>syms bi thi ai ali;
>tbm=[1,0,0,0;0,1,0,0;0,0,1,bi;0,0,0,1];
>tthm=[cos(thi),-sin(thi),0,0;sin(thi),cos(thi),0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
>tam=[1,0,0,ai;0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1];
>talm=[1,0,0,0;0,cos(ali),-sin(ali),0;0,sin(ali),cos(ali),0;0,0,0,1];
>tim=tbm*tthm*tam*talm
tim =
[ cos(thi), -sin(thi)*cos(ali), sin(thi)*sin(ali), cos(thi)*ai]
[ sin(thi), cos(thi)*cos(ali), -cos(thi)*sin(ali), sin(thi)*ai]
[ 0, sin(ali), cos(ali), bi]
[ 0, 0, 0, 1]
```

donde el comando “syms” se usa para definir las variables simbólicas “bi”, “thi”, “ai” y “ali” para los parámetros DH b_i , θ_i , a_i y α_i , respectivamente. Además, se usan las notaciones “tbm”, “tthm”, “tam” y “talm” para representar las matrices T_b , T_θ , T_a y T_α , dadas por las ecuaciones (5.49a-d), respectivamente. Finalmente, la resultante matriz T_i denotada como “tim” en el ambiente de MATLAB, se evalúa arriba, lo que coincide con la ecuación (5.50b).

RESUMEN

En este capítulo, primero se define la postura o configuración del cuerpo rígido. Se presentan sus representaciones. También se define la matriz de transformación homogénea que se ocupa tanto de la traslación como de la rotación de un sistema de coordenadas entre sí. En la última parte, se introducen los parámetros de Denavit y Hartenberg (DH) y se deriva la matriz de transformación homogénea correspondiente.



EJERCICIOS

5.1 Compruebe lo siguiente:

- a) $\det(\mathbf{Q}) = 1$ (5.55a)
- b) $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ (5.55b)
- c) $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}^T$, donde \mathbf{Q}' se define según la ecuación (5.19). (5.55c)
- d) Para la rotación elemental con α alrededor de cualquier eje, X , Y o Z , $\mathbf{Q}_k^{-1} = \mathbf{Q}_k^T$, donde $k = X, Y$ o Z .

5.2 ¿Cuáles son los significados equivalentes de una matriz de rotación?

5.3 Suponga que \mathbf{Q}_A es la rotación del sistema fijo a un nuevo sistema A respecto al sistema F , y que \mathbf{Q}_B es la rotación del sistema A a otro nuevo sistema B respecto al sistema A . ¿Cuál es la representación de matriz resultante del sistema B respecto a su sistema de referencia original F , es decir, \mathbf{Q} ?

5.4 Suponga que $[\mathbf{Q}_A]$ es la rotación d del sistema fijo a un nuevo sistema A respecto del sistema F , y que $[\mathbf{Q}_B]_F$ es la rotación del sistema A a otro nuevo sistema B , también respecto al sistema F . Busque la representación de matriz resultante del sistema B respecto al sistema de referencia original F , es decir, \mathbf{Q} . ¿Debería el resultado ser el mismo que se obtiene en la pregunta 5.3?

5.5 Suponga que \mathbf{Q}_A y \mathbf{Q}_B , como se definen en la pregunta 5.3, son dadas por

$$\mathbf{Q}_A = \begin{bmatrix} C30^\circ & -S30^\circ & 0 \\ S30^\circ & C30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{Q}_B = \begin{bmatrix} C45^\circ & -S45^\circ & 0 \\ S45^\circ & C45^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

5.6 Ilustre las dos transformaciones de arriba en forma gráfica y busque $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_A \mathbf{Q}_B$. Si \mathbf{T}_A fuese la matriz homogénea que representa una transformación del sistema fijo a un nuevo sistema A respecto al sistema fijo F , y si \mathbf{T}_B fuese otra transformación a un sistema B respecto al sistema A , busque la matriz de transformación resultante \mathbf{T} .

- 5.7 Si $[\mathbf{T}_A]_F$ fuese la matriz homogénea que representa una transformación del sistema fijo a un nuevo sistema de referencia A respecto al sistema F , y si $[\mathbf{T}_B]_F$ fuese otra transformación a uno sistema B , también respecto al sistema F , busque la matriz de transformación resultante. Comente los resultados obtenidos en ésta y en la anterior pregunta.
- 5.8 Busque los parámetros DH del robot SCARA que aparece en la figura 5.28.
- 5.9 La figura 5.29 muestra un brazo articulado antropomorfo. Busque los parámetros DH.
- 5.10 Busque las matrices de transformación homogénea para la arquitectura de robot que se muestra en la figura 5.29.
- 5.11 Busque los parámetros DH del brazo esférico que se muestra en la figura 5.30.
- 5.12 ¿Cuáles son las matrices de transformación homogénea para la arquitectura de robot de la figura 5.30?



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 5.13 Evalúe los valores numéricos de \mathbf{Q}_A y \mathbf{Q}_B .
- 5.14 Compruebe las ecuaciones (5.55a-c).
- 5.15 Utilizando los valores numéricos del ejercicio 5.5, demuestre la propiedad no conmutativa de las rotaciones, es decir, $\mathbf{Q}_A \mathbf{Q}_B \neq \mathbf{Q}_B \mathbf{Q}_A$.
- 5.16 Usando las funciones “atan” y “atan2”, encuentre el ángulo formado por la línea que une el origen (0, 0) y un punto (2, 1).
- 5.17 Repita el ejercicio 5.16 para los puntos (0, 0) y $(-2, -1)$. Comente los resultados obtenidos usando “atan” y “atan2”. ¿Cuál es el correcto?

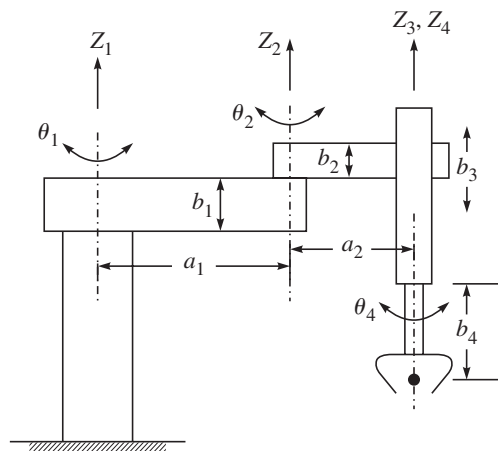


Figura 5.28 Un robot SCARA

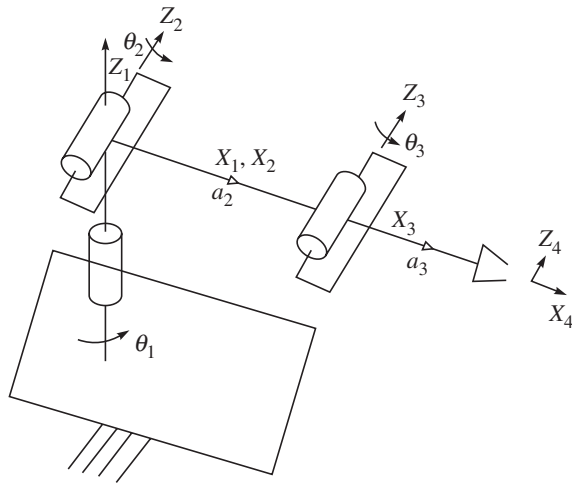


Figura 5.29 Un brazo articulado

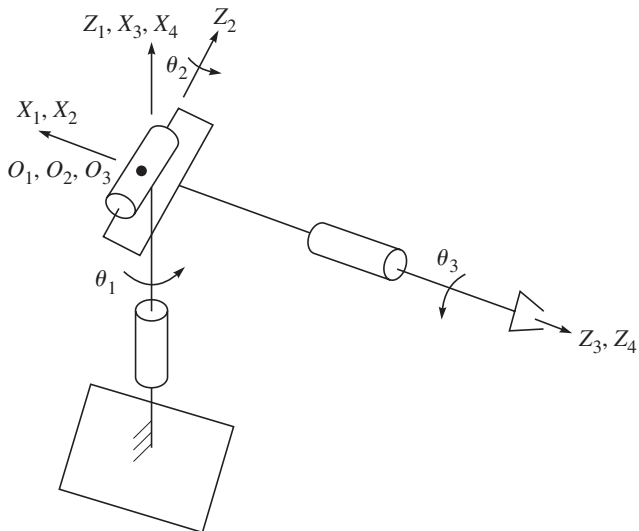


Figura 5.30 Un brazo esférico



Capítulo

6

Cinemática

Para que un robot ejecute una tarea específica, primero que nada deberá establecerse la posición y la orientación del efector final, es decir, su posición o configuración en relación con su base. Esto es esencial para resolver problemas de posicionamiento. Una vez que



Cinemática inversa vs. directa

Mientras que la cinemática inversa de robots seriales permite encontrar múltiples soluciones, la cinemática directa sólo tiene una solución.

las relaciones mencionadas se diferencian una y dos veces, surgen entonces los problemas de análisis de la velocidad y aceleración necesarios para el control de movimientos uniformes del efector final, así como el análisis dinámico del robot en cuestión. Puesto que la configuración del efector final se determina por las seis variables cartesianas que se controlan mediante los movimientos de las articulaciones del robot, es necesario encontrar las relaciones entre los dos conjuntos.

En el análisis de posición, se encuentra una relación entre las coordenadas cartesianas, es decir, la posición de un punto en el efector final y su orientación con los ángulos de las articulaciones. Aquí existen dos tipos de problemas: la cinemática directa y la inversa, como se ilustra en la figura 6.1. En la cinemática directa, las posiciones de las articulaciones ya están determinadas y el problema radica en encontrar la configuración del efector final. En la cinemática inversa, se resuelve inverso, es decir, la posición del efector final está determinada y el problema radica en encontrar los ángulos de las articulaciones.

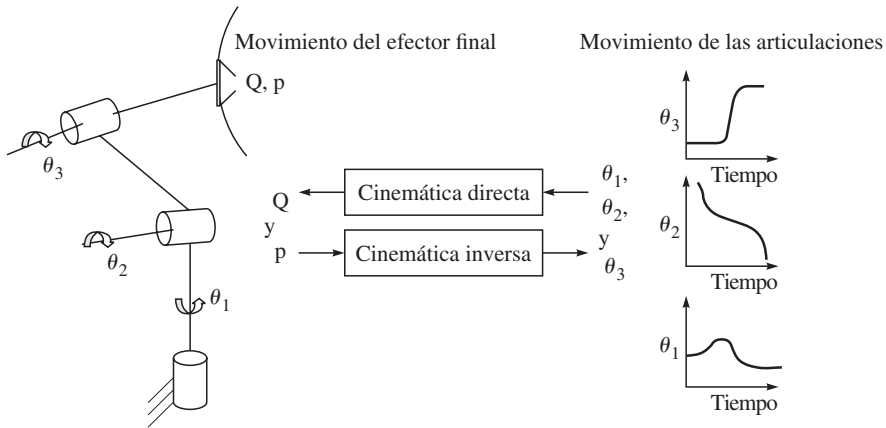


Figura 6.1 Cinemática directa e inversa

6.1 Análisis de la posición directa

En la cinemática directa para posición, las posiciones de las articulaciones, es decir, los ángulos de las articulaciones de revoluta y el desplazamiento de las articulaciones prismáticas se conocen. La tarea es encontrar la configuración del efector final, es decir, su posición y orientación. Esto puede obtenerse a partir de las ecuaciones de clausura, como se explicará en los siguientes pasos:

- De acuerdo con las reglas que se dieron en la sección 5.4, adjunte un sistema de coordenadas a cada uno de los eslabones $n + 1$ del robot, donde el sistema 1 se adjunta al sistema de coordenadas fijo y el sistema $n + 1$, al efector final o cuerpo n -ésimo.
- Defina los parámetros Denavit-Hartenberg (DH) que se presentaron en la sección 5.4.
- Escriba las matrices de transformación homogénea de la ecuación (5.50) como $T_1, T_2 \dots T_n$, donde T_i para $i = 1, \dots, n$, que representa la transformación del cuerpo i o sistema $i + 1$ respecto a su cuerpo anterior $i - 1$, o sistema adjunto a él, es decir, sistema i .

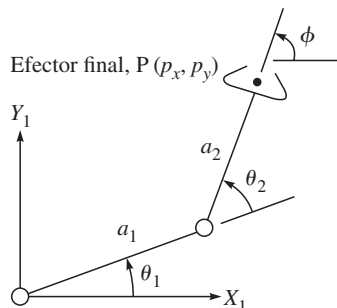


Figura 6.2 Cinemática de un brazo planar de dos eslabones

- d) Como se muestra en la subsección 5.4.1, la matriz de transformación homogénea del sistema de coordenadas del efector final respecto al sistema 1, es decir, \mathbf{T} , se obtiene entonces mediante la posmultiplicación de las transformaciones homogéneas individuales mostradas arriba, \mathbf{T}_i , para $i = 1, \dots, n$, es decir,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \dots \mathbf{T}_n \quad (6.1)$$

Observe que para cada transformación del lado derecho de la ecuación (6.1), \mathbf{T}_i se expresa en el sistema de coordenadas adjunto al cuerpo $i - 1$ o sistema i , mientras que el lado izquierdo de la matriz \mathbf{T} se expresa respecto al sistema fijo, es decir, sistema 1. Por lo tanto, deberá tenerse cuidado para transferir correctamente los vectores y matrices asociados a los sistemas sucesivos antes de multiplicarlos o sumarlos en los últimos sistemas. La ecuación (6.1) se conoce como la ecuación de clausura del robot en cuestión. Si se sustituye la expresión para la matriz de transformación homogénea \mathbf{T}_i de la ecuación (5.50b) en la ecuación (6.1), se obtienen dos relaciones distintas en términos de la orientación de los eslabones de las articulaciones y de las posiciones de los orígenes de los sistemas adjuntos a los eslabones. Éstas son

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \dots \mathbf{Q}_n \quad (6.2)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{a}_n \quad (6.3)$$

donde la matriz \mathbf{Q}_i es la matriz de rotación ortogonal que se introdujo en la subsección 5.2.2, que representa la orientación del sistema $i + 1$ respecto al sistema i . Además, el vector \mathbf{a}_i es la posición del origen del sistema $i + 1$ adjunto al cuerpo i del cuerpo del sistema i adjunto al cuerpo $i - 1$. Aunado a esto, \mathbf{Q} es la orientación del efector final respecto al sistema fijo, es decir, sistema 1, y \mathbf{p} es la posición del origen del sistema adjunto al efector final, es decir, sistema $n + 1$, desde el origen del sistema 1. Al comparar ambos lados de la ecuación (6.1) o las ecuaciones (6.2) y (6.3), se observa que la primera es fácil de entender, mientras que las últimas ecuaciones son computacionalmente eficientes. Usando la ecuación (6.1), se tienen que calcular 16 parámetros de las matrices 4×4 , mientras que sólo se utilizan 12 parámetros, nueve para las matrices de 3×3 y tres para los vectores de posición. Observe que en el análisis cinemático de posición directa, el lado derecho de la ecuación (6.1) o los de las ecuaciones (6.2) y (6.3) están determinados como entradas y los lados izquierdos se calculan como salidas.

Ejemplo 6.1

Cinemática directa de un brazo planar de dos eslabones

Como se muestra en la figura 6.2, los parámetros DH de un brazo de dos eslabones pueden obtenerse de la tabla 5.2, como se señala después de la tabla, es decir, en las primeras dos hileras de la tabla 5.2. Sus dos matrices de transformación homogénea \mathbf{T}_i , $i = 1, 2$, se obtienen con la ecuación (5.50b), es decir,

$$\mathbf{T}_i \equiv \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

donde $s_i \equiv \sin \theta_i$ y $c_i \equiv \cos \theta_i$. La solución para el análisis de posición de cinemática directa del manipulador se da entonces como

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$$

donde \mathbf{T} representa la posición o configuración del efector final respecto a su base, es decir, el sistema 1. La matriz \mathbf{T} de 4×4 se expresa como

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

donde $s_{12} \equiv \sin \theta_{12}$; $c_{12} \equiv \cos \theta_{12}$; y $\theta_{12} \equiv \theta_1 + \theta_2 \dots \theta_i$, siendo el ángulo de la i -ésima articulación, como se indica en la figura 6.2. Además,

$$a_1 c_1 + a_2 c_{12} \equiv p_x$$

y

$$a_1 s_1 + a_2 s_{12} \equiv p_y$$

donde p_x y p_y se muestran en la figura 6.2. Conociendo los valores numéricos de los parámetros DH, a saber, a_1 y a_2 aquí, y los valores de entrada de θ_1 y θ_2 , puede calcularse fácilmente la matriz \mathbf{T} , que especificará la posición del punto P en el efector final y la orientación del efector final, es decir, ϕ .

Ejemplo 6.2

Cinemática directa de un brazo planar rotacional-prismático

En la figura 5.25, se muestra un brazo planar rotacional-prismático (RP) cuyos parámetros DH se evalúan en la tabla 5.3. Sus matrices de transformación homogénea \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 también se obtienen con la ecuación (5.52). Por lo tanto, la relación de cinemática directa que proporciona la matriz de 4×4 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2$ puede obtenerse como

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & b_2 s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & -b_2 c_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Ejemplo 6.3

Cinemática directa de un brazo planar de tres eslabones

Los parámetros DH del brazo, como se muestra en la figura 6.3, se presentan en la tabla 5.2. Las tres matrices de transformación homogénea \mathbf{T}_i , $i = 1, 2, 3$, se obtienen entonces con la ecuación (5.50b). Éstas aparecen en la ecuación (6.4). La solución para el análisis de posición de cinemática directa del manipulador se da entonces como

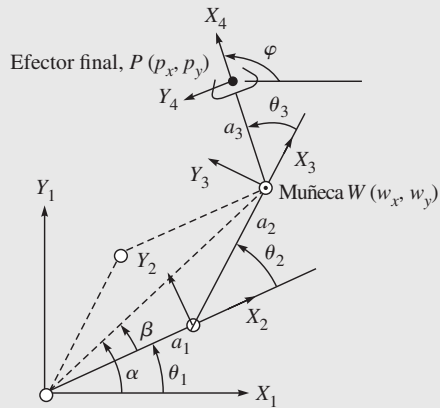


Figura 6.3 Cinemática de un brazo planar de tres eslabones

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3$$

donde \mathbf{T} representa la posición o configuración del efector final respecto a su base, es decir, el sistema 1. La matriz de 4×4 \mathbf{T} se expresa como

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

donde s_{12} , c_{12} y θ_{12} se definen según la ecuación (6.5). Además, $s_{123} \equiv \sin \theta_{123}$; $c_{123} \equiv \cos \theta_{123}$ y $\theta_{123} \equiv \theta_{12} + \theta_3 \equiv \theta_1 + \varphi$ que se muestran en la figura 6.3. Además, $a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \equiv p_x$, y $a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \equiv p_y$, donde p_x y p_y se indican en la figura 6.3.

Observe que el uso directo de las ecuaciones (6.2) y (6.3) para el caso planar también proporciona las expresiones $\varphi = \theta_{123}$, y las relaciones arriba mencionadas de p_x y p_y , respectivamente, lo cual será computacionalmente más eficiente.

Ejemplo 6.4

Cinemática directa de un robot SCARA

Un robot SCARA se muestra en la figura 5.28. Basándose en sus parámetros DH que se encuentran en el ejercicio 5.8, sus transformaciones homogéneas se obtienen como

$$\mathbf{T}_1 \equiv \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 \equiv \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8a)$$

$$\mathbf{T}_3 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_4 \equiv \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8b)$$

La cinemática directa resultante para la posición puede entonces obtenerse como

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4$$

que da

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} c_{124} & -s_{124} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{124} & c_{124} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

donde $s_{124} \equiv \sin \theta_{124}$; $c_{124} \equiv \cos \theta_{124}$, y $\theta_{124} \equiv \theta_{12} + \theta_4$.

Ejemplo 6.5

Cinemática directa de un brazo esférico

El diagrama cinemático de un brazo esférico que se introdujo en la figura 2.13 se muestra en la figura 5.27. Sus parámetros DH se dan en la tabla 5.5, mientras que las matrices de transformación homogénea se expresan en el ejemplo 5.23. Según la ecuación (5.54), la relación de cinemática directa se expresa como

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 & c_1 s_2 & b_2 s_1 + b_3 c_1 s_2 \\ s_1 c_2 & -c_1 & s_1 s_2 & -b_2 c_1 + b_3 s_1 s_2 \\ s_2 & 0 & -c_2 & -b_3 c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Ejemplo 6.6

Cinemática directa de un brazo articulado antropomórfico

Los parámetros DH y las matrices de transformación homogénea del brazo articulado antropomórfico de la figura 5.29 se obtienen en los ejercicios 5.9 y 5.10, respectivamente. Puesto que tiene tres grados de libertad, la posmultiplicación de las tres matrices de transformación homogénea, es decir, $\mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3$, proporciona

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

donde \mathbf{T} representa la configuración del efector final representado en el sistema fijo.

Ejemplo 6.7

Cinemática directa de una muñeca

Los parámetros DH y las matrices de transformación homogénea de la muñeca que se ve en la figura 5.30 se evalúan en los ejercicios 5.11 y 5.12. Ésta tiene tres grados de libertad. La multiplicación de las tres matrices de transformación homogénea se obtiene con $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3$, es decir,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - s_1 c_3 & -c_1 s_2 & 0 \\ s_1 c_2 c_3 + c_1 s_3 & -s_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 & -s_1 s_2 & 0 \\ s_2 c_3 & -s_2 s_3 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Ejemplo 6.8

Cinemática directa de un robot articulado antropomórfico

En la figura 6.4 se muestra un robot articulado antropomórfico, cuyos parámetros DH se marcan en la tabla 6.1. Consiste básicamente en el brazo de la figura 5.29 con la muñeca de la figura 5.30 montada en él. Tiene seis grados de libertad (DOF). La configuración del efector final se obtiene como $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \dots \mathbf{T}_6$. La expresión final de la matriz de orientación \mathbf{Q} , y el vector de posición del efector final \mathbf{p} , que son componentes de bloque de la matriz \mathbf{T} de 4×4 , se obtienen con

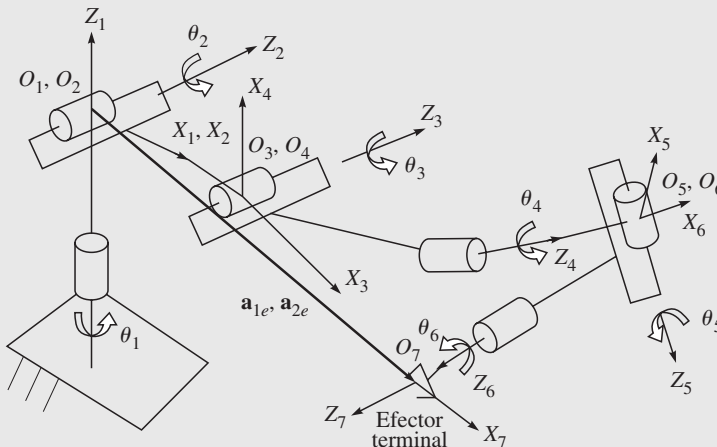


Figura 6.4 Robot articulado antropomórfico

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{p} \equiv \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (6.13a)$$

donde

$$\begin{aligned} q_{11} &\equiv c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\ q_{12} &\equiv c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - s_1(s_4c_5s_6 - c_4c_6) \\ q_{13} &\equiv c_1(-c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5) - s_1s_4s_5 \\ q_{21} &\equiv s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] + c_1(-s_4c_5c_6 - c_4s_6) \\ q_{22} &\equiv s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + c_1(s_4c_5s_6 - c_4c_6) \\ q_{23} &\equiv s_1(-c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5) + c_1s_4s_5 \\ q_{31} &\equiv -c_{23}s_5c_6 + s_{23}(s_4s_6 - c_4c_5c_6) \\ q_{32} &\equiv c_{23}s_5s_6 + s_{23}(s_4s_6 + c_4c_5s_6) \\ q_{33} &\equiv -c_{23}c_5 + s_{23}c_4s_5 \end{aligned} \quad (6.13b)$$

y

$$\begin{aligned} p_1 &= a_2c_1c_2 \\ p_2 &= a_2s_1c_2 \\ p_3 &= -a_2s_2 \end{aligned} \quad (6.13c)$$

Tabla 6.1 Los parámetros DH del brazo articulado de 6 DOF

i	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1 (JV)	0	$-\pi/2$
2	0	θ_2 (JV)	a_2	0
3	0	θ_3 (JV)	0	$-\pi/2$
4	0	θ_4 (JV)	0	$\pi/2$
5	0	θ_5 (JV)	0	$-\pi/2$
6	0	θ_6 (JV)	0	0

JV: Variable de articulación

Ejemplo 6.9**Cinemática directa de un robot PUMA**

En la figura 6.5 se muestra la arquitectura de un robot PUMA, cuyos parámetros DH se presentan en la tabla 6.2. La cinemática directa del robot PUMA para un conjunto determinado de sus ángulos de articulaciones θ_i , para $i = 1, \dots, 6$, puede obtenerse de manera parecida al robot articulado del ejemplo 6.8. Puesto que las expresiones

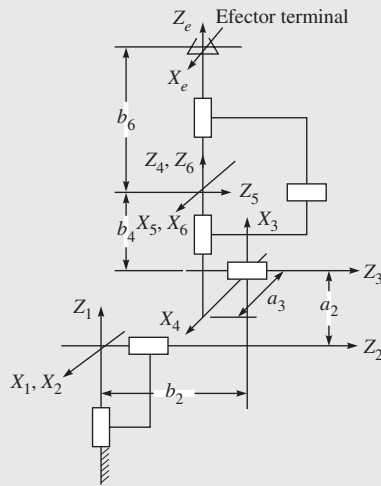


Figura 6.5 Un robot PUMA

resultantes son muy complejas, se proporciona el resultado para un conjunto de θ_i que corresponde a la configuración de la figura 6.2. Los valores de θ_i para los cuales se da el resultado se muestran dentro de los corchetes [y] de la tabla 6.2. La matriz \mathbf{Q} y el vector \mathbf{p} se obtienen entonces con:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{p} \equiv \begin{bmatrix} a_3 \\ b_2 \\ a_2 + b_4 + b_6 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Tabla 6.2 Parámetros DH del robot PUMA

i	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	θ_1 (JV) [0]	0	$-\pi/2$
2	b_2	θ_2 (JV) [$-\pi/2$]	a_2	0
3	0	θ_3 (JV) [$\pi/2$]	a_3	$\pi/2$
4	b_4	θ_4 (JV) [0]	0	$-\pi/2$
5	0	θ_5 (JV) [0]	0	$\pi/2$
6	b_6	θ_6 (JV) [0]	0	0

JV: Variable de articulación; los valores dentro de [y] representan los ángulos para las JV correspondientes a la figura 6.2

Al comparar las expresiones de la ecuación (6.14) con la orientación y posición del sistema del efector final $X_e - Y_e - Z_e$, puede verificarse fácilmente que los resultados son correctos.

Ejemplo 6.10

Cinemática directa del brazo Stanford

En la figura 6.6 se muestra la arquitectura del robot PUMA Stanford, cuyos parámetros DH se presentan en la tabla 6.3. Parecido al robot PUMA, la matriz \mathbf{Q} y el vector \mathbf{p} para el efector final se obtienen de la siguiente manera:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{p} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_1 + b_3 + b_4 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

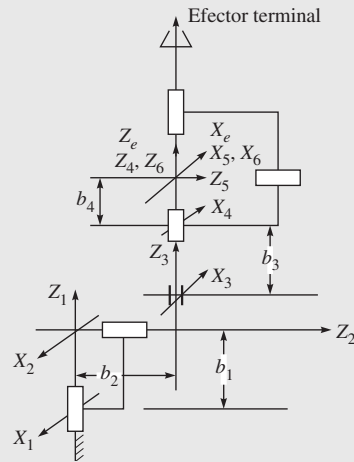


Figura 6.6 El robot Stanford

donde los valores de variables de articulaciones se presentan en la tabla 6.3 para la configuración que se muestra en la figura 6.6. La comparación de la ecuación (6.15) con la figura 6.6 también muestra que los resultados son correctos.

Tabla 6.3 Parámetros DH del brazo Stanford

i	b_i	θ_i	a_i	α_i
1	b_1	θ_1 (JV) [0]	0	$-\pi/2$
2	b_2	θ_2 (JV) [π]	0	$-\pi/2$
3	b_3 (JV)	0	0	0
4	b_4	θ_4 (JV) [0]	0	$\pi/2$
5	0	θ_5 (JV) [0]	0	$-\pi/2$
6	0	θ_6 (JV) [0]	0	0

6.2



Análisis de la posición con cinemática inversa

Las ecuaciones cinemáticas directas, en la forma de la ecuación (6.1) o de las ecuaciones (6.2) y (6.3), establecieron la relación funcional entre las variables de articulaciones y la orientación y posición del efector final. El problema de la cinemática inversa consiste en la determinación de las variables de articulaciones correspondientes a una orientación y

posición específicas del efector final. La solución de este problema es de fundamental importancia con el fin de transformar las especificaciones de movimiento asignadas al efector final en el espacio operacional en los correspondientes movimientos de espacio de las articulaciones. En la cinemática directa (ecuación 6.1), la matriz de posición y rotación del efector final se computa en forma única una vez que se conocen las variables de las articulaciones. Por otro lado, el problema de la cinemática inversa es mucho más complejo debido a las siguientes razones:

- Por lo general, las ecuaciones por resolver son no lineales en las variables de articulaciones; de este modo, no siempre es posible encontrar una solución explícita.
- Pueden existir múltiples soluciones.
- También pueden existir soluciones infinitas, por ejemplo, en el caso de manipuladores robóticos cinemáticamente redundantes.
- Posiblemente no hay soluciones admisibles debido a la arquitectura del manipulador.

Un planteamiento posible frente al problema de la cinemática inversa es buscar una solución explícita usando álgebra o geometría. Otra posibilidad es encontrar una solución numérica por medio de algún algoritmo de aproximación sucesiva. Aunque el primer planteamiento es generalmente más deseable para la aplicación de la solución al control de tiempo real de robots, no siempre es posible obtener las soluciones explícitas para manipuladores con arquitectura arbitraria. Más bien, la clase de manipuladores para los cuales las soluciones explícitas quedan garantizadas es muy limitada. Observe, sin embargo, que la mayoría de los manipuladores que se utilizan en la industria pertenecen a esta clase. El enfoque algebraico a la solución explícita significa la búsqueda de los ángulos de las articulaciones por medio de la transformación algebraica de las ecuaciones (6.1)-(6.3). El enfoque geométrico significa la búsqueda de los ángulos de las articulaciones usando la heurística geométrica para aprovecharse de la estructura especial de los manipuladores. A veces es útil usar ambos enfoques juntos para resolver un problema. Puesto que es difícil encontrar una solución general para un manipulador con arquitectura arbitraria, las soluciones de cinemática inversa para la posición se presentan respecto a arquitecturas de robots específicas, como se explicará a continuación.

6.2.1 Brazo planar de tres eslabones

Considere el brazo de la figura 6.3, cuya cinemática directa de posición se resuelve en el ejemplo 6.3. Lo que se busca aquí es encontrar los ángulos de las articulaciones θ_1 , θ_2 y θ_3 correspondientes a la posición y orientación determinadas para un efector final. Para un movimiento planar, la posición y orientación del efector final pueden especificarse por el origen del sistema coordenado 4, es decir, (p_x, p_y) , y por la orientación del sistema adjunto al efector final respecto al eje X_1 , es decir, el ángulo φ , como se muestra en la figura 6.3. Por lo tanto, se especifican como la entrada. Las soluciones se obtienen entonces mediante dos planteamientos distintos, como se explicará a continuación.

i) Solución algebraica En primer lugar, se ilustra la técnica de la solución algebraica. Según el análisis de la cinemática de posición directa del brazo planar de tres eslabones, como se realizó en el ejemplo 6.3,

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (6.15a)$$

$$p_x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \quad (6.15b)$$

$$p_y = a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \quad (6.15c)$$

Observe que estas ecuaciones son no lineales en los ángulos de las articulaciones θ_1 , θ_2 y θ_3 . Además, el problema de la cinemática inversa se simplifica mediante la subdivisión de la tarea, es decir, el efector final se orienta ya que se haya posicionado su muñeca W de la figura 6.3. Las coordenadas de W son w_x y w_y . Las relaciones de posición de las ecuaciones (6.15a-c) se reescriben entonces como

$$w_x = p_x - a_3 c\varphi = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (6.16a)$$

$$w_y = p_y - a_3 s\varphi = a_1 s_1 + a_2 s_{12} \quad (6.16b)$$

Elevando los dos lados de la ecuación (6.12) al cuadrado, se encuentra

$$w_x^2 + w_y^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 c_2 \quad (6.17a)$$

que proporciona

$$c_2 = \frac{w_x^2 + w_y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2 a_1 a_2} \quad (6.17b)$$

La existencia de una solución para la ecuación (6.17b) impone la condición $-1 \leq c_2 \leq 1$. De lo contrario, el punto (p_x, p_y) estará fuera del espacio de trabajo alcanzable del brazo. Entonces,

$$s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2} \quad (6.17c)$$

donde el signo positivo es relativo a la postura del codo hacia arriba y el signo negativo se refiere a la postura del codo hacia abajo. Por lo tanto, el ángulo θ_2 se computa como

$$\theta_2 = \text{atan2}(s_2, c_2) \quad (6.18)$$

donde “atan2”, en contraste con “atan”, es una función en cualquier lenguaje de computación, como MATLAB, C, FORTAN, etc., que computa el valor de “ $\tan^{-1}(\)$ ” en el cuadrante apropiado. Si un punto se encuentra en el primer y tercer cuadrantes, la función “atan” da la respuesta en los dos casos que corresponden únicamente al primer cuadrante. Esto es así porque los argumentos y/x y $-y/(-x)$ dan como resultado el mismo valor numérico. Cuando se usa “atan2”, el argumento y/x proporcionará el resultado correspondiente al primer cuadrante, mientras que $-y/-x$ dará resultados que se encuentran en el tercer cuadrante. Una vez que se determinó θ_2 , el ángulo θ_1 se encuentra mediante la expansión de c_{12} y s_{12} de la ecuación (6.16) y su reestructuración como

$$w_x = (a_1 + a_2 c_2) c_1 - a_2 s_1 s_2 \quad (6.19a)$$

$$w_y = (a_1 + a_2 c_2) s_1 + a_2 c_1 s_2 \quad (6.19b)$$

Con el fin de evaluar θ_1 , la ecuación (6.19a) se multiplica por $a_2 s_2$ y la ecuación (6.19b) por $(a_1 + a_2 c_2)$, seguido por la resta de la primera con respecto a la última. Esto da como resultado el valor de s_1 como

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) w_y - a_2 s_2 w_x}{\Delta} \quad (6.20a)$$

En forma parecida, c_1 se obtiene como

$$c_1 = \frac{(a_1 + a_2 c_2) w_x + a_2 s_2 w_y}{\Delta} \quad (6.20b)$$

donde $\Delta \equiv a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2c_2 = w_x^2 + w_y^2$. Siguiendo la analogía a la ecuación (6.18), la solución para θ_1 se obtiene de la siguiente manera:

$$\theta_1 = \text{atan2}(s_1, c_1) \quad (6.20c)$$

Finalmente, se encuentra el ángulo θ_3 , según la expresión de la ecuación (6.15a), como

$$\theta_3 = \varphi - \theta_1 - \theta_2 \quad (6.21)$$

ii) Solución geométrica Aquí se presenta una técnica de solución geométrica. Como el caso visto anteriormente, el ángulo de orientación se da en la ecuación (6.15a) y las coordenadas del origen del sistema coordenado 3 se computan según la ecuación (6.16). La aplicación de la ley de los cosenos al ángulo formado por los eslabones a_1 , a_2 y los puntos de conexión de segmentos O_1 y W , figura 6.3, da como resultado

$$w_x^2 + w_y^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \theta_2) \quad (6.22)$$

Las dos configuraciones admisibles del triángulo se muestran en la figura 6.3. Cuando se observa $\cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2 \equiv -c_2$, se obtiene inmediatamente la ecuación (6.17a), mientras que la existencia del triángulo garantiza lo siguiente:

$$\sqrt{w_x^2 + w_y^2} \leq a_1 + a_2$$

Esta condición no se cumple cuando el punto W se encuentra fuera del espacio de trabajo que es alcanzable por el brazo. Sin embargo, basado en la suposición de soluciones admisibles, el ángulo θ_2 se obtiene como

$$\theta_2 = \cos^{-1}(c_2) \quad (6.23)$$

donde la postura de codo hacia arriba se obtiene cuando θ_2 se encuentra entre $-\pi$ y 0, y la posición de codo hacia abajo se obtiene para θ_2 entre 0 y π . Para encontrar θ_1 , considere los ángulos α y β en la figura 6.3, que se computan según

$$\alpha = \text{atan2}(w_y, w_x) \quad \text{y} \quad \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \cos \beta = a_1 + a_2 c_2 \quad (6.24a)$$

donde la determinación de los ángulos α y β depende del signo de w_x y w_y . Además, la sustitución de la expresión de c_2 de la ecuación (6.17b) en la ecuación (6.24a) proporciona el ángulo β , es decir,

$$\beta = \cos^{-1} \frac{w_x^2 + w_y^2 + a_1^2 + a_2^2}{2a_1 \sqrt{w_x^2 + w_y^2}} \quad (6.24b)$$

En la ecuación (6.24b), β debería estar dentro de 0 y π con el fin de conservar la existencia del triángulo. Entonces,

$$\theta_1 = \alpha \pm \beta \quad (6.25)$$

donde el signo positivo es válido para $\theta_2 \in (\pi, 0)$ y el signo negativo lo es para $\theta_2 \in (0, \pi)$. Finalmente, θ_3 se computa según la ecuación (6.21).



¿Por qué geométrico?

La solución geométrica tiene una mejor comprensión gráfica. Por lo tanto, es útil para el estudio.

Ejemplo 6.11***Cinemática inversa del brazo planar de tres eslabones***

En la figura 6.3, la matriz homogénea de entrada **T** de la ecuación (6.7) se da como

$$\mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \sqrt{3} + \frac{5}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.26a)$$

donde $\varphi = 60^\circ$, y los parámetros DH constantes no cero, según la tabla 5.2, son $a_1 = a_2 = 2$ unidades, y $a_3 = 1$ unidad. Usando las ecuaciones (6.17b-c), c_2 y s_2 se calculan como $c_2 = 0.866$ y $s_2 = 0.5$, que da $\theta_2 = 30^\circ$. Entonces se evalúan s_1 y c_1 según las ecuaciones (6.20a-b) como $s_1 = 0$ y $c_1 = 1$. El valor del ángulo de articulación θ_1 se obtiene como $\theta_1 = 0^\circ$. Finalmente, se obtiene θ_3 según la ecuación (6.21) como $\theta_3 = 30^\circ$. Los resultados se resumen abajo:

$$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 30^\circ \text{ y } \theta_3 = 30^\circ \quad (6.26b)$$

Observe que se usaron los valores positivos de s_2 para evaluar $\theta_2 = 30^\circ$. El uso del valor negativo daría como resultado el siguiente conjunto de resultados:

$$\theta_1 = 26.56^\circ, \theta_2 = -30^\circ, \text{ y } \theta_3 = 63.43^\circ \quad (6.26c)$$

Ejemplo 6.12***Cinemática inversa del brazo planar de tres eslabones usando MATLAB***

Con el fin de resolver el ejemplo 6.11, puede escribirse un programa de MATLAB, como se muestra a continuación, que puede guardarse en un archivo denominado, por ejemplo, “ch6ikin3.m”, que puede ejecutarse para arrojar los resultados arriba mencionados.

```
%Program for the inverse kinematics of 3-link arms
%Non-zero constant DH parameters
a1=2; a2=2;a3=1;

%Input
phi=pi/3; px=2.5+sqrt(3); py=1+sqrt(3)/2;

%Intermediate calculations
wx=px-a3*cos(phi); wy=py-a3*sin(phi); del=wx*wx+wy*wy;

%Calculations for theta_2
c2=(del-a1*a1-a2*a2)/(2*a1*a2); s2=sqrt(1-c2*c2);
th2l=atan2(s2,c2); th2h=atan2(-s2,c2);

%Calculation for finding theta_1
```

```

s11=((a1+a2*cos(th21))*wy-a2*s2*wx)/del; c11=((a1+a2*cos(th21))*wx-
a2*s2*wy)/del;
s12=((a1+a2*cos(th22))*wy+a2*s2*wx)/del; c12=((a1+a2*cos(th22))*wx+
a2*s2*wy)/del;
th11=atan2(s11,c11); th12=atan2(s12,c12);

%Calculation for theta_3
th31=phi-th11-th21; th32=phi-th12-th22;

%Angles in degree
r2d=180/pi;
th11d=th11*r2d, th12d=th12*r2d, th21d=th21*r2d, th22d=th22*r2d,
th31d=th31*r2d, th32d=th32*r2d

```

6.2.2 Un brazo articulado

Considere el brazo articulado que se presenta en la figura 6.7. Se buscan las variables de las articulaciones θ_1 , θ_2 y θ_3 , correspondientes a una posición conocida \mathbf{p}_w del efector final. Observe que la relación cinemática para \mathbf{p}_w se expresa en la cuarta columna de la matriz \mathbf{T} en la ecuación (6.11), según la cual

$$\theta_1 = a \tan 2(p_y, p_x) \quad (6.27a)$$

donde las entradas p_x y p_y son iguales a los elementos (4,1) y (4,2) de la matriz \mathbf{T} , es decir,

$$p_x = c_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

y

$$p_y = s_1(a_2c_2 + a_3c_{23})$$

Observe que otra solución admisible para θ_1 es

$$\theta_1 = \pi + a \tan 2(p_y, p_x) \quad (6.27b)$$

cuando θ_2 es igual a $\pi - \theta_2^{(1)}$, donde $\theta_2^{(1)}$ es una de las soluciones correspondientes a θ_1 que se obtiene con la ecuación (6.27a), como se indica en la figura 6.7.

Una vez que se conozca θ_1 , la arquitectura restante es planar respecto a las variables θ_2 y θ_3 . Por ende, explotando la solución para la muñeca del brazo planar de tres eslabones de la subsección 6.2.1, se obtiene

$$\theta_3 = a \tan 2(s_3, c_3) \quad (6.28)$$

en donde

$$c_3 \equiv \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

$$s_3 \equiv \pm \sqrt{1 - c_3^2}$$

y

$$\theta_2 = a \tan 2(s_2, c_2) \quad (6.29)$$

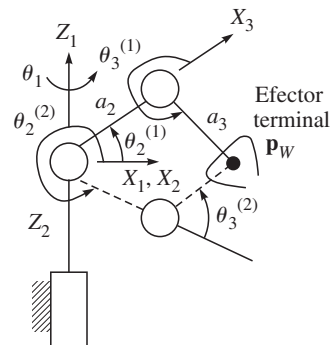


Figura 6.7 Dos soluciones admisibles

En la ecuación (6.29), los argumentos s_2 y c_2 se evalúan como

$$s_2 \equiv \frac{(a_2 + a_3 c_3) p_z - a_3 s_3 \sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{\Delta}$$

$$c_2 \equiv \frac{(a_2 + a_3 c_3) \sqrt{p_x^2 + p_y^2} + a_3 s_3 p_z}{\Delta}$$

El denominador Δ es igual a $\Delta \equiv p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. El problema inverso de este brazo admite cuatro soluciones. Dos de ellas se presentan en la figura 6.7, mientras que una de las otras dos es la imagen de espejo de la figura alrededor del eje Z_1 , seguido por una rotación alrededor de Z_2 para alcanzar \mathbf{p}_w . La cuarta solución es la imagen de espejo de los últimos dos eslabones alrededor de X_1 desde su última configuración. Para un brazo de robot que es más genérico por naturaleza donde se da el desplazamiento del eslabón $b_2 \neq 0$, también puede verse que existen cuatro soluciones, como se presenta en la figura 6.8a). Según los valores de θ_1 , θ_2 y θ_3 , se conocen como

- hombro al frente / codo arriba (SFEU) y hombro-frente / codo abajo (SFED), como lo muestran las líneas continuas; y
- hombro atrás / codo arriba (SBEU) y hombro atrás / codo abajo (SBED), como lo muestran las líneas punteadas.

Observe que para la configuración de hombro al frente, las configuraciones de codo arriba y codo abajo se muestran en la figura 6.8b). Es obvio que la orientación del antebrazo es distinta para los dos pares de soluciones. Observe también que sólo es posible encontrar las soluciones si $p_x \neq 0$ y $p_y \neq 0$. En caso de que $p_x = p_y = 0$, la ecuación (6.27a) no proporciona ningún θ_1 . Además, se obtiene una infinidad de soluciones y es posible determinar las variables de las articulaciones θ_2 y θ_3 , independientemente del valor de θ_1 . A continuación se verá que el brazo en una de estas configuraciones es cinemáticamente *singular* y, más específicamente, tiene singularidad de hombro.

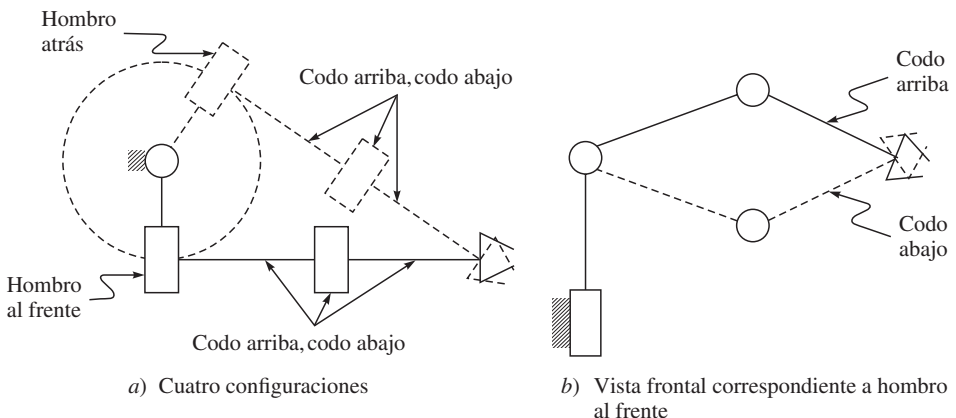


Figura 6.8 Configuraciones de un brazo articulado con desplazamiento no cero

Ejemplo 6.13***Cinemática inversa del brazo articulado***

Con el fin de encontrar las cuatro soluciones admisibles del brazo que se presenta en la figura 6.7, deben considerarse los siguientes valores numéricos: $a_2 = a_3 = 1$ unidad, y $p_x = 1$ unidad, $p_y = p_z = 0$ unidades. Las soluciones se evalúan entonces como

- 1) $\theta_1^{(1)} = 0^\circ$; $\theta_2^{(1)} = 60^\circ$; $\theta_3^{(1)} = -120^\circ$; Configuración SFEU
- 2) $\theta_1^{(1)} = 0^\circ$; $\theta_2^{(2)} = -60^\circ$; $\theta_3^{(2)} = 120^\circ$; Configuración SFED
- 3) $\theta_1^{(2)} = 180^\circ$; $\theta_2^{(1)} = 240^\circ$; $\theta_3^{(1)} = -120^\circ$; Configuración SBEU
- 4) $\theta_1^{(2)} = 180^\circ$; $\theta_2^{(2)} = 120^\circ$; $\theta_3^{(2)} = 120^\circ$; Configuración SBED

Observe que los valores de p_x , p_y y p_z se toman de tal modo que las cuatro soluciones de arriba pueden verificarse fácilmente usando la figura 6.7.

Ejemplo 6.14***Cinemática inversa del brazo articulado usando MATLAB***

Con el fin de resolver el ejemplo 6.13, puede escribirse un programa de MATLAB, como se muestra abajo, que puede guardarse en un archivo, por ejemplo, “ch6ikin3aa.m”, y ejecutarse para arrojar los resultados que se señalan arriba. Además, si se cambian los valores de “a2”, “a3” y “px”, “py”, “pz”, que corresponden a los parámetros DH de robots, y la posición del efector final, pueden generarse muchas otras soluciones.

```
%Inverse Kinematics of Articulated Arm
%Non-zero constant DH parameters
a2=1; a3=1;

%Input
px=1; py=0; pz=0;

%Intermediate calculation
delxy = px*px+py*py; del=delxy+pz*pz;

%Calculations for theta_1
th11=atan2(py,px);
th12=pi+atan2(py,px);

%Calculations for theta_3
c3=(del-a2*a2-a3*a3)/(2*a2*a3); s3=sqrt(1-c3*c3);
th31=atan2(s3,c3); th32=atan2(-s3,c3);

%Calculation for finding theta_2
s21=(-(a2+a3*cos(th31))*pz-a3*s3*delxy)/del; c21=((a2+a3*cos(th31))
*delxy+a3*s3*pz)/del;
s22=(-(a2+a3*cos(th31))*pz+a3*s3*delxy)/del; c22=((a2+a3*cos(th31))
*a3*s3*pz)/del;
```

```

th21=atan2(s21,c21); th22=atan2(s22,c22);
th23=pi-th21; th24=pi-th22;

%Angles in degree
r2d=180/pi;
th11d=th11*r2d, th12d=th12*r2d, th21d=th21*r2d, th22d=th22*r2d, th23d =
th23*r2d,
th24d = th24*r2d, th31d=th31*r2d, th32d=th32*r2d

```

6.2.3 Una muñeca

Considere la muñeca de la figura 6.9, cuyas relaciones cinemáticas pueden darse mediante la ecuación (6.12). Se buscan las variables de las articulaciones θ_1 , θ_2 y θ_3 , correspondientes a una orientación del efector final \mathbf{Q} con la siguiente forma:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

donde q_{ij} , para $i, j = 1, \dots, 3$, son los elementos de la matriz de bloque \mathbf{Q} de la matriz de transformación homogénea \mathbf{T} , ecuación (6.12). Entonces es posible computar las soluciones de los ángulos de las articulaciones directamente como

$$\theta_1 = a \tan 2(q_{23}, q_{13}) \quad (6.30a)$$

$$\theta_2 = a \tan 2\left(\sqrt{q_{13}^2 + q_{23}^2}, q_{33}\right) \quad (6.30b)$$

$$\theta_3 = a \tan 2(-q_{32}, q_{31}) \quad (6.30c)$$

para θ_2 entre 0 y π . Observe que si se permite que cada articulación gire 360° , existen dos posibles soluciones para los últimos tres desplazamientos de las articulaciones. En efecto, ya que las ecuaciones (6.30a-c) involucran la función de arcotangente, el ángulo θ_1 podrá tener dos valores que se encuentran a 180° . Las dos configuraciones que corresponden a las dos soluciones se ilustran en la figura 6.9.

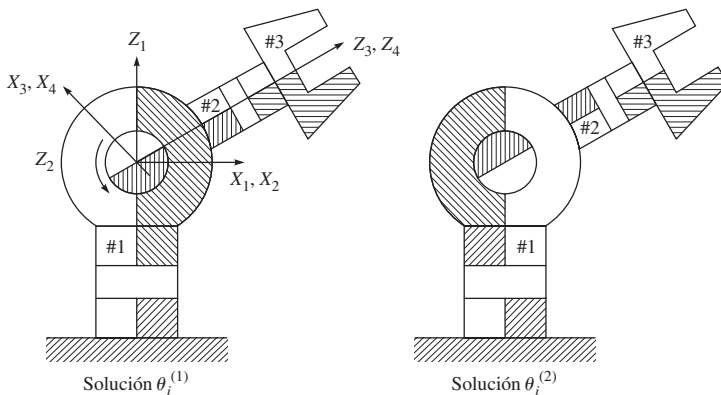


Figura 6.9 Múltiples configuraciones de la muñeca

Supongamos que $\theta_i^{(1)}$ y $\theta_i^{(2)}$ son la primera y la segunda solución con $\theta_i^{(1)} \leq \theta_i^{(2)}$. Se relacionan por

$$\theta_1^{(2)} = \theta_1^{(1)} + \pi, \quad \theta_2^{(2)} = -\theta_2^{(1)}; \quad \text{y} \quad \theta_3^{(2)} = \theta_3^{(1)} + \pi$$

Por lo tanto, para θ_2 entre $-\pi$ y 0,

$$\theta_1 = a \tan 2(-q_{23}, -q_{13}) \quad (6.31a)$$

$$\theta_2 = a \tan 2\left(-\sqrt{q_{13}^2 + q_{23}^2}, q_{33}\right) \quad (6.31b)$$

$$\theta_3 = a \tan 2(q_{32}, -q_{31}) \quad (6.31c)$$

Aquí se observa que los ángulos de articulaciones siempre tendrán que obtenerse usando los valores “tan” en vez de los valores “sen” o “cos”, debido a la razón que se explicó después de la ecuación (6.18). Además, observe que un robot de muñeca particionada de 6 DOF tiene un total de ocho soluciones de cinemática inversa para el análisis de posición.

Ejemplo 6.15

Cinemática inversa de la muñeca

Con el fin de encontrar las dos soluciones de la muñeca de la figura 6.9, se consideran los siguientes valores numéricos para la matriz de orientación \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que lleva a los siguientes dos conjuntos de resultados:

- 1) $\theta_1^{(1)} = 0^\circ; \theta_2^{(1)} = 90^\circ; \theta_3^{(1)} = 0^\circ;$
- 2) $\theta_1^{(2)} = 180^\circ; \theta_2^{(2)} = -90^\circ; \theta_3^{(2)} = 180^\circ.$

Los valores arriba mencionados pueden verificarse fácilmente a partir de los sistemas de coordenadas adjuntos que aparecen en la figura 6.9.

6.3



Análisis de velocidad: la matriz jacobiana



Jacobiano

Éste es un término tomado de las matemáticas para describir una función vectorial, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, para la cual se define la jacobiana \mathbf{J} como $\mathbf{J} \equiv \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$, que es la matriz de $m \times n$ para la función m -dimensional \mathbf{f} y la variable dependiente \mathbf{x} de la dimensión n .

En las secciones anteriores se presentaron ecuaciones cinemáticas que establecen las relaciones entre las variables de las articulaciones y la posición y orientación del efector final. En esta sección se presentará la relación entre las velocidades de articulaciones y las velocidades lineales y angulares correspondientes del efector final. Esta representación de la relación se describe mediante una matriz que se llama jacobiana, que depende de la configuración del manipulador. La

matriz jacobiana es una de las herramientas más importantes para la caracterización de manipuladores. De hecho, es útil para:

- i) encontrar configuraciones singulares
- ii) analizar redundancias
- iii) determinar algoritmos de cinemática inversa para el análisis de velocidad
- iv) describir la relación entre las fuerzas aplicadas al efector final y los pares de torsión resultantes en las articulaciones
- v) derivar los algoritmos de dinámica

Observe que las ecuaciones de cinemática de posición que se obtienen con las ecuaciones (6.1)-(6.3) tienen tanto la matriz de rotación \mathbf{Q} como el vector de posición \mathbf{p} , que son funciones de las variables de articulaciones $\boldsymbol{\theta} \equiv [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$. Tanto la posición como la orientación del efector final varían conforme varía $\boldsymbol{\theta}$. Aquí el objetivo es expresar la velocidad angular del efector final $\boldsymbol{\omega}_e$, la velocidad lineal, o simplemente la velocidad \mathbf{v}_e ($\equiv \dot{\mathbf{p}}$), igual que una función de las velocidades de las articulaciones $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, como

$$\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{J}_\omega \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.32a)$$

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{J}_v \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.32b)$$

donde \mathbf{J}_ω y \mathbf{J}_v son las matrices de $3 \times n$ que describen la contribución de las velocidades de las articulaciones $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ a la velocidad angular del efector final $\boldsymbol{\omega}_e$ y la velocidad \mathbf{v}_e , respectivamente. Las matrices \mathbf{J}_ω y \mathbf{J}_v también son las funciones de las variables de articulación $\boldsymbol{\theta}$. Las ecuaciones (6.32a-b) pueden escribirse en forma compacta como

$$\mathbf{t}_e = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.33)$$

donde

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\omega \\ \mathbf{J}_v \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{t}_e \equiv [\boldsymbol{\omega}_e^T \mathbf{v}_e^T]^T$. El vector de seis dimensiones \mathbf{t}_e se describe aquí como la “rotación” del efector final (Ángeles, 2003), donde la matriz jacobiana \mathbf{J} de $6 \times n$ es una función de las variables de articulación $\boldsymbol{\theta}$, únicamente. En las ecuaciones (6.32a-b), la velocidad \mathbf{v}_e fue especificada como la derivada respecto al tiempo de la posición \mathbf{p} del efector final, es decir, $\mathbf{v}_e \equiv \dot{\mathbf{p}}$, mientras que nada se mencionó acerca de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_e$ y de la matriz de representación de orientación \mathbf{Q} . Esto se deriva de la siguiente manera:

- i) Considere una matriz de rotación de tiempo variable \mathbf{Q} . Puesto que la matriz \mathbf{Q} es ortogonal, tiene la siguiente propiedad:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad (6.34a)$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad de 3×3 . La diferenciación de la ecuación (6.34a) respecto al tiempo nos da

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{0} \quad (6.34b)$$

- ii) Ahora introduzca

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \quad (6.35a)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la matriz antisimétrica de 3×3 debido a la ecuación (6.34b), es decir,

$$\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T = \mathbf{0}$$

iii) La posmultiplicación de ambos lados de la ecuación (6.35a) por \mathbf{Q} proporciona

$$\mathbf{\Omega}\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}} \quad (6.36)$$

lo que nos permite expresar la derivada de tiempo de la matriz de rotación \mathbf{Q} , es decir, $\dot{\mathbf{Q}}$, como una función de \mathbf{Q} .

iv) Ahora considere un vector arbitrario \mathbf{x} sujeto a un cuerpo móvil. Las representaciones del vector \mathbf{x} en el sistema coordenado fijo F y el sistema móvil sujeto al cuerpo M son $[\mathbf{x}]_F$ y $[\mathbf{x}]_M$, respectivamente. Si \mathbf{Q} representa la orientación del sistema M respecto al sistema F , entonces $[\mathbf{x}]_F = \mathbf{Q}[\mathbf{x}]_M$, cuya derivada respecto al tiempo es

$$[\dot{\mathbf{x}}]_F = \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}]_M + \mathbf{Q}[\dot{\mathbf{x}}]_M \quad (6.37a)$$

Puesto que el vector $[\mathbf{x}]_M$ es la representación del vector \mathbf{x} fijo en el sistema móvil M , su expresión en el sistema M no cambia cuando se mueve el cuerpo. Por lo tanto, $[\dot{\mathbf{x}}]_M = \mathbf{0}$. Como resultado, la ecuación (6.37a) se vuelve

$$[\dot{\mathbf{x}}]_F = \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}]_M \quad (6.37b)$$

Usando la expresión de $\dot{\mathbf{Q}}$, es decir, la ecuación (6.36), la ecuación (6.37b) se reescribe como

$$[\dot{\mathbf{x}}]_F = \mathbf{\Omega}\mathbf{Q}[\mathbf{x}]_M \quad (6.37c)$$

En forma alternativa, si $\boldsymbol{\omega}$ denota la velocidad angular del cuerpo rígido al que el sistema M se sujeta, entonces se sabe, según los principios básicos de la mecánica (Ghosh y Mallik, 1998), que

$$[\dot{\mathbf{x}}]_F = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}]_F, \text{ o } [\dot{\mathbf{x}}]_F = [\boldsymbol{\omega}]_F \times \mathbf{Q}[\mathbf{x}]_M \quad (6.38)$$

donde “ \times ” denota el producto cruz entre dos vectores cartesianos tridimensionales. Al comparar las ecuaciones (6.37c) y (6.38), es obvio que la matriz antisimétrica $\mathbf{\Omega}$ denota el operador vectorial entre el vector $\boldsymbol{\omega}$ y el vector $\mathbf{Q}[\mathbf{x}]_M$. La matriz $\mathbf{\Omega}$ es tal que sus elementos simétricos respecto a los elementos de diagonal cero representan los componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$, es decir, $\boldsymbol{\omega} \equiv [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ en la forma

$$\mathbf{\Omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

lo que justifica que $\mathbf{\Omega}$ es una función de $\boldsymbol{\omega}$.

Ejemplo 6.16

Matriz de rotación y velocidad angular

Considere la matriz de rotación elemental alrededor del eje Z que se da en la ecuación (5.21). Si el ángulo de rotación es α , que es una función del tiempo, entonces la matriz de rotación \mathbf{Q} es como sigue:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Su derivada respecto al tiempo $\dot{\mathbf{Q}}$ se obtiene entonces por

$$\dot{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha & -\dot{\alpha} \cos \alpha & 0 \\ \dot{\alpha} \cos \alpha & -\dot{\alpha} \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.41a)$$

Por lo tanto, la matriz del producto cruz $\mathbf{\Omega}$, asociada con el vector de velocidad angular $\mathbf{\omega}$, se calcula como

$$\mathbf{\Omega} \equiv \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & 0 \\ \dot{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.41b)$$

Al comparar las ecuaciones (6.39) y (6.41b), el vector de velocidad angular $\mathbf{\omega}$ se obtiene por

$$\mathbf{\omega} \equiv [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T = [0 \ 0 \ \dot{\alpha}]^T$$

que es la velocidad angular del sistema coordenado alrededor del eje Z.

6.4



Velocidades de eslabones

Considere un eslabón genérico i de un manipulador. De acuerdo con la convención de Denavit-Hartenberg (DH) presentada en la sección 5.4, el eslabón i conecta las articulaciones i e $i + 1$, mientras que el eslabón $i - 1$ conecta las articulaciones $i - 1$ e i . Observe que el sistema i se sujeta al eslabón $i - 1$ con su origen sobre el eje de la articulación i , como se muestra en la figura 6.10. Suponga que \mathbf{o}_i y \mathbf{o}_{i-1} son los vectores de posición de los orígenes de los eslabones i e $i - 1$, es decir, O_i y O_{i-1} , respectivamente. Suponga que \mathbf{a}_{i-1} denota la posición del origen del eslabón i respecto al eslabón $i - 1$. De acuerdo con las reglas de la suma de vectores, puede escribirse

$$\mathbf{o}_i = \mathbf{o}_{i-1} + \mathbf{a}_{i-1} \quad (6.42a)$$

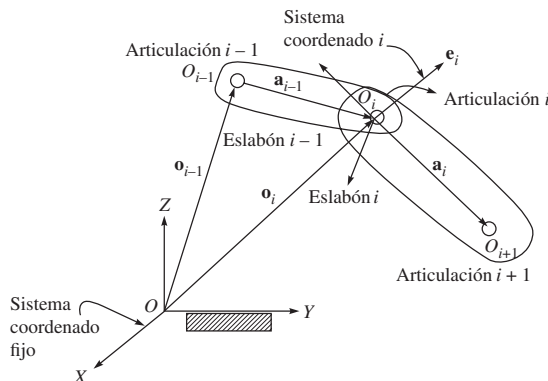


Figura 6.10 Eslabones acoplados de un robot

Mediante la diferenciación de la expresión anterior, la velocidad del origen del eslabón i , es decir, O_i , se obtiene como

$$\dot{\mathbf{o}}_i = \dot{\mathbf{o}}_{i-1} + \dot{\mathbf{a}}_{i-1} \quad (6.42b)$$

donde $\dot{\mathbf{a}}_{i-1} = \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{a}_{i-1}$, en el cual $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$ es la velocidad angular del eslabón $i-1$. Puesto que \mathbf{o}_i y \mathbf{o}_{i-1} son también los vectores de posición de los puntos en los eslabones i e $i-1$, respectivamente, la ecuación (6.43b) proporciona la expresión de la velocidad lineal del eslabón i como función de la velocidad y de la velocidad angular del eslabón $i-1$. Para la expresión de la velocidad angular del eslabón i , $\boldsymbol{\omega}_i$, puede obtenerse como

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i,i-1} \quad (6.43)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$ es la velocidad angular del eslabón $i-1$ y $\boldsymbol{\omega}_{i,i-1}$ es la velocidad angular relativa del eslabón i respecto al eslabón $i-1$. Observe que las ecuaciones (6.42a-b) logran expresiones distintas, dependiendo del tipo de articulación i , es decir, de revoluta o prismática.

Articulación de revoluta Puesto que la articulación de revoluta proporciona un movimiento angular para un eslabón respecto a su movimiento previo, el ángulo de articulación θ_i , como se definió en la sección 5.4, es variable. Si \mathbf{e}_i denota el vector unitario paralelo al eje de la articulación de revoluta, entonces $\boldsymbol{\omega}_{i,i-1} = \dot{\theta}_i \mathbf{e}_i$. Por lo tanto, $\boldsymbol{\omega}_i$ de la ecuación (6.43) puede reescribirse como

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_i \quad (6.44a)$$

La correspondiente expresión de velocidad, ecuación (6.42b), se proporciona por

$$\dot{\mathbf{o}}_i = \dot{\mathbf{o}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{a}_{i-1} \quad (6.44b)$$

Articulación prismática Una articulación prismática sólo permite el movimiento de traslación relativo. Es decir, la longitud de articulación b_i es variable y no hay movimiento angular relativo entre los eslabones $i-1$ e i . Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} \quad (6.45a)$$

y la expresión de velocidad, ecuación (6.42b), es como sigue:

$$\dot{\mathbf{o}}_i = \dot{\mathbf{o}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{a}_{i-1} + \dot{b}_i \mathbf{e}_i \quad (6.45b)$$

donde \mathbf{e}_i es el vector unitario paralelo a la dirección de traslación del eslabón i respecto al eslabón $i-1$ y $\dot{b}_i \mathbf{e}_i$ es la velocidad lineal relativa.

6.5



Computación jacobiana

Aquí se derivará la expresión general para la matriz jacobiana \mathbf{J} , ecuación (6.33). Puesto que el efector final es el cuerpo n -ésimo de la cadena serial, la velocidad angular y la velocidad del efector final, $\boldsymbol{\omega}_e$ y \mathbf{v}_e , respectivamente, se obtienen a partir de las velocidades del n -ésimo eslabón, es decir, $\boldsymbol{\omega}_n$ y $\dot{\mathbf{o}}_n$, como

$$\boldsymbol{\omega}_e \equiv \boldsymbol{\omega}_n, \text{ y } \mathbf{v}_e = \dot{\mathbf{o}}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{a}_{ne} \quad (6.46)$$

donde \mathbf{a}_{ne} es el vector de posición tridimensional del efector final respecto al origen del n -ésimo eslabón O_n . Entonces se computan las velocidades de los eslabones empezando des-

de el cuerpo fijo, es decir, el eslabón 0, y siguiendo las relaciones recursivas que se obtienen con las ecuaciones (6.44a-b) o con las ecuaciones (6.45a-b), dependiendo del tipo de articulaciones que se usan. Por ejemplo, si todas las articulaciones son de rotación, entonces

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0} \quad (6.47a)$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \quad (6.47b)$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{\omega}_n = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \dot{\theta}_n \mathbf{e}_n \quad (6.47c)$$

y

$$\dot{\mathbf{o}}_1 = \mathbf{0} \quad (6.48a)$$

$$\dot{\mathbf{o}}_2 = \dot{\mathbf{o}}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{a}_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_{12} \quad (6.48b)$$

$$\vdots$$

$$\dot{\mathbf{o}}_n = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_{1,n} + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}_{2,n} + \dots + \dot{\theta}_{n-1} \mathbf{e}_{n-1} \times \mathbf{a}_{n-1,n} \quad (6.48c)$$

donde $\mathbf{a}_{i,j} \equiv \mathbf{a}_i + \dots + \mathbf{a}_{j-1}$ es el vector que conecta el origen del eslabón i al origen del eslabón j , es decir, O_j . Según las ecuaciones (6.46)-(6.48), la matriz jacobiana \mathbf{J} de la ecuación (6.33) puede escribirse como

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_{1e} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}_{2e} & \dots & \mathbf{e}_n \times \mathbf{a}_{ne} \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

donde $\mathbf{a}_{i,e} \equiv \mathbf{a}_{i,n} + \mathbf{a}_n$ es el vector presentado en la figura 6.4 para $i = 1, 2$, y \mathbf{J} es la matriz de $6 \times n$. Según la ecuación (6.49), la i -ésima columna de la matriz, \mathbf{J} , denotada como \mathbf{j}_i , puede escribirse como

$$\mathbf{j}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{a}_{i,e} \end{bmatrix} \text{ si la articulación } i \text{ es de rotación, y} \quad (6.50a)$$

$$\mathbf{j}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \text{ si la articulación } i \text{ es prismática} \quad (6.50b)$$

Ejemplo 6.17

Jacobiano del brazo de dos eslabones

Puesto que hay dos articulaciones rotacionales que sólo pueden usarse para el posicionamiento del efector final, el renglón de bloques superior de la ecuación (6.49) que corresponde a la orientación del efector final no es relevante. Por lo tanto, el jacobiano del manipulador de dos eslabones puede expresarse como

$$\mathbf{J} = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_{1e} \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}_{2e}] \quad (6.51a)$$

donde $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_2 \equiv [0 \quad 0 \quad 1]^T$.

Además, $\mathbf{a}_{1e} \equiv \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \equiv [a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad a_1 s_1 + a_2 s_{12} \quad 0]^T$

$\mathbf{a}_{2e} \equiv \mathbf{a}_2 \equiv [a_2 c_{12} \quad a_2 s_{12} \quad 0]^T$

donde $s_1 = \sin \theta_1$; $c_1 = \cos \theta_1$; $s_{12} = \sin (\theta_1 + \theta_2)$; $c_{12} = \cos (\theta_1 + \theta_2)$

Observe que todos los vectores, según la ecuación (6.51), se expresan en un sistema fijo, es decir, el sistema 1. Además, si se extraen los elementos no cero de la ecuación (6.51a), la matriz jacobiana de 2×2 resultante se obtiene por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (6.51b)$$

Ejemplo 6.18

Jacobiano del brazo de tres eslabones

Puesto que hay tres articulaciones rotacionales, la ecuación (6.49) da

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 \times \mathbf{a}_{1e} & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{a}_{2e} & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{a}_{3e} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

donde $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_3 \equiv [0 \ 0 \ 1]^T$. Además,

$$\mathbf{a}_{1e} \equiv \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

$$\equiv [a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \quad a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \quad 0]^T$$

$$\mathbf{a}_{2e} \equiv \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \equiv [a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \quad a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \quad 0]^T$$

$$\mathbf{a}_{3e} \equiv \mathbf{a}_3 \equiv [a_3 c_{123} \quad a_3 s_{123} \quad 0]^T$$

donde s_1, c_1, s_{12} y c_{12} se definen según la ecuación (6.51a), mientras que s_{123} y c_{123} se definen como sigue:

$$s_{123} \equiv \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3); \text{ y } c_{123} \equiv (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Una vez que los elementos de los vectores \mathbf{e}_i y \mathbf{a}_{ie} para $i = 1, 2, 3$, representados en el sistema fijo 1, se sustituyen en la ecuación (6.52), habrá tres renglones no cero correspondientes al movimiento planar de tres grados de libertad del manipulador, que son relevantes, es decir,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Los tres renglones de arriba se refieren a los componentes del valor escalar de la velocidad angular alrededor del eje Z_1 , y a los dos valores para la velocidad lineal a lo largo de los ejes X_1, Y_1 , respectivamente.

Ejemplo 6.19

Brazo articulado antropomórfico

La matriz jacobiana para la parte del brazo del robot articulado antropomórfico que se muestra en la figura 6.4 se obtiene según la ecuación (6.49). Los elementos de los vectores se obtienen mediante las matrices de transformación que se dieron en el ejemplo 6.6, es decir,

$$[\mathbf{e}_1]_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; [\mathbf{e}_2]_1 \equiv [\mathbf{e}_3]_1 \equiv \begin{bmatrix} -s_1 \\ c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.54a)$$

y

$$[\mathbf{a}_1]_1 \equiv [\mathbf{a}_{2e}]_1 \equiv \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ -(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) \end{bmatrix}; [\mathbf{a}_{3e}]_1 \equiv [\mathbf{a}_3]_1 \equiv \begin{bmatrix} a_3 c_1 c_{23} \\ a_3 s_1 c_{23} \\ -a_3 s_{23} \end{bmatrix} \quad (6.54b)$$

Por lo tanto, la matriz jacobiana de 6×3 se obtiene por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & -(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -a_3 c_{23} \end{bmatrix} \quad (6.54c)$$

Ejemplo 6.20

Jacobiano de un robot PUMA usando MATLAB

Puesto que la evaluación de la expresión jacobiana para el robot PUMA es difícil, se escribe a continuación un programa en MATLAB para las configuraciones que se presentan en la figura 6.5.

```
%Jacobian calculation for PUMA Robot
syms a1 a2 a3 a4 a5 a6 b1 b2 b3 b4 b5 b6 a11 a12 a13 a14 a15 a16 th1 th2 th3
th4 th5 th6;

%For PUMA Robot DH parameters
a11=-pi/2;a12=0;a13=pi/2;a14=-pi/2;a15=pi/2;a16=0;
sall = -1; call = 0; sal2 = 0; cal2 = 1; sal3 = 1; cal3 = 0; sal4 = -1; cal4 = 0; sal5 =
1; cal5 = 0; sal6 = 0; cal6 = 1;
th1=0;th2=-pi/2;th3=pi/2;th4=0;th5=0;th6=0;
sth1 = 0; cth1 = 1; sth2 = -1; cth2 = 0; sth3 = 1; cth3 = 0; sth4 = 0; cth4
= 1; sth5 = 0; cth5 = 1; sth6 = 0; cth6 = 1;

t1m = [cth1, -sth1*call, sth1*sall, a1*cth1; sth1, cth1*call, -cth1*sall, a1*sth1;
0,sall,call,b1; 0,0,0,1];
t2m = [cth2, -sth2*cal2, sth2*sall, a2*cth2; sth2, cth2*cal2, -cth2*sall, a2*sth2;
0,sal2,cal2,b2; 0,0,0,1];
t3m = [cth3, -sth3*cal3, sth3*sall, a3*cth3; sth3, cth3*cal3, -cth3*sall, a3*sth3;
0,sal3,cal3,b3; 0,0,0,1];
t4m = [cth4, -sth4*cal4, sth4*sall, a4*cth4; sth4, cth4*cal4, -cth4*sall, a4*sth4;
0,sal4,cal4,b4; 0,0,0,1];
```

```

t5m = [cth5, -sth5*ca15, sth5*sa15, a5*cth5; sth5, cth5*ca15, -cth5*sa15, a5*sth5;
0,sa15,ca15,b5; 0,0,0,1];
t6m = [cth6, -sth6*ca16, sth6*sa16, a6*cth6; sth6, cth6*ca16, -cth6*sa16, a6*sth6;
0,sa16,ca16,b6; 0,0,0,1];

%To extract a_ie vectors in their own frames
t56m=t5m*t6m; t46m=t4m*t56m; t36m=t3m*t46m; t26m=t2m*t36m; t16m=t1m*t26m;
a6v=t6m(1:3,4);a56v=t56m(1:3,4);a46v=t46m(1:3,4);a36v=t36m(1:3,4);a26v=t26
m(1:3,4);a16v=t16m(1:3,4);

%To form rotation matrices for coordinate transformations
q1m=t1m(1:3,1:3); q12m=q1m*t2m(1:3,1:3); q13m=q12m*t3m(1:3,1:3);
q14m=q13m*t4m(1:3,1:3);
q15m=q14m*t5m(1:3,1:3);
%e_i and e_i x a_ie vectors in the 1st frame
e6v_1=simple(q15m(1:3,3)), e6ca6v_1=simple(q15m*[-a6v(2);a6v(1);0])
e5v_1=simple(q14m(1:3,3)), e5ca56v_1=simple(q14m*[-a56v(2);a56v(1);0])
e4v_1=simple(q13m(1:3,3)), e4ca46v_1=simple(q13m*[-a46v(2);a46v(1);0])
e3v_1=simple(q12m(1:3,3)), e3ca36v_1=simple(q12m*[-a36v(2);a36v(1);0])
e2v_1=simple(q1m(1:3,3)), e2ca26v_1=simple(q1m*[-a26v(2);a26v(1);0])
e1v_1=[0;0;1], e1ca16v_1=[-a16v(2);a16v(1);0]

```

Ejemplo 6.21

Jacobiano para la configuración del robot PUMA de la figura 6.5

La matriz jacobiana del robot PUMA para la configuración presentada en la figura 6.5 se obtiene del programa MATLAB del ejemplo 6.20 como

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -b_2 - b_3 - b_5 & a_2 + b_4 + b_6 & b_4 + b_6 & -b_5 & b_6 & 0 \\ a_1 + a_{3456} & 0 & 0 & a_{456} & 0 & a_6 \\ 0 & -a_{3456} & -a_{3456} & 0 & -a_{56} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.55)$$

donde $a_{56} \equiv a_5 + a_6$; $a_{456} \equiv a_4 + a_{56}$; y $a_{3456} \equiv a_3 + a_{456}$. Según la ecuación (6.55), puede verificarse que por lo menos los primeros tres renglones son verdaderos, ya que son los componentes de los vectores unitarios que representan los ejes de las articulaciones de revoluta del robot PUMA en el sistema fijo, es decir, el sistema 1.

6.6



Jacobiano usando el DeNOC*

En esta subsección, primero se deriva el concepto de las matrices de complemento ortogonal natural desacoplado (DeNOC) (Saha, 1999), que se introdujo originalmente para el mode-

* Sugerido para el nivel PG.

lado dinámico de robots seriales, y posteriormente se usó para sistemas paralelos y otros de ciclo cerrado. Posteriormente, se muestra cómo el DeNOC puede usarse para derivar la matriz jacobiana.



El origen del DeNOC

Apareció por primera vez en 1995, cuando fue presentado durante la Conferencia Internacional sobre Robótica y Automatización del IEEE celebrada en Nagoya, Japón.

6.6.1 Definición del DeNOC

Primero se define la rotación de un cuerpo rígido como

$$\mathbf{t}_i \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \dot{\mathbf{o}}_i \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_i$ y $\dot{\mathbf{o}}_i$ son los vectores tridimensionales de la velocidad angular y de la velocidad del origen del cuerpo i -ésimo, es decir, O_i . Haciendo uso de la definición de la rotación que se da en la ecuación (6.56), las ecuaciones (6.44a-b) se reescriben ahora como (Bhangale, 2004)

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{A}_{i,i-1} \mathbf{t}_{i-1} + \mathbf{p}_i \dot{\theta}_i \quad (6.57a)$$

donde $\dot{\theta}_i$ es el índice de articulación de la i -ésima articulación de rotación de i , \mathbf{e}_i es el vector unitario a lo largo del eje de la articulación de i y \mathbf{a}_{i-1} es el vector que denota el punto O_i respecto a O_{i-1} , como se muestra en la figura 6.10 para \mathbf{a}_i . Además, la matriz \mathbf{t}_{i-1} es el vector de rotación en 6 dimensiones de cuerpo $(i-1)$. Adicionalmente, la matriz $\mathbf{A}_{i,i-1}$ de 6×6 y el vector \mathbf{p}_i de seis dimensiones se definen por

$$\mathbf{A}_{i,i-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{a}_{i,i-1} \times \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{p}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (6.57b)$$

Observe aquí que el vector \mathbf{p}_i de arriba es distinto del vector tridimensional \mathbf{p} de la ecuación (6.3) que representa la posición del efector final de un robot. También en la ecuación (6.57b), $\mathbf{a}_{i,i-1} \equiv \mathbf{a}_{i-1,i} = -\mathbf{a}_{i-1}$ es el vector del origen del cuerpo i al origen del $(i-1)$, $\mathbf{1}$ y \mathbf{O} son las matrices de 3×3 de identidad y cero, respectivamente, $\mathbf{0}$ es el vector tridimensional de ceros y $\mathbf{a}_{i,i-1} \times \mathbf{1}$ es el tensor del producto vectorial asociado con el vector $\mathbf{a}_{i,i-1}$ que se define como $(\mathbf{a}_{i,i-1} \times \mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{a}_{i,i-1} \times \mathbf{x}$, para cualquier vector cartesiano tridimensional \mathbf{x} . La matriz $\mathbf{A}_{i,i-1}$ y el vector \mathbf{p}_i tienen las siguientes interpretaciones físicas:

- 1) Si $\dot{\theta}_i = 0$, es decir, cuando los dos eslabones $(i-1)$ e i se conectan rígidamente, $\mathbf{A}_{i,i-1} \mathbf{t}_{i-1}$ propaga la rotación \mathbf{t}_{i-1} a \mathbf{t}_i . Esto quiere decir que la velocidad angular del eslabón i permanece igual a la de $(i-1)$, es decir, $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}$, y la velocidad lineal del punto O_i , $\dot{\mathbf{o}}_i$ se obtiene de la velocidad del punto O_{i-1} , $\dot{\mathbf{o}}_{i-1}$ y de la velocidad angular del eslabón $(i-1)$, $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$, es decir, $\dot{\mathbf{o}}_i = \dot{\mathbf{o}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{a}_{i-1}$. La matriz de 6×6 $\mathbf{A}_{i,i-1}$ se llama aquí matriz de propagación de rotación (Saha, 1999) que tiene la siguiente propiedad:

$$\mathbf{A}_{i-1,i} \mathbf{A}_{i,i+1} = \mathbf{A}_{i-1,i+1} \quad (6.58)$$

- 2) Cuando $\dot{\theta}_i \neq 0$, es decir, cuando el movimiento de la articulación i -ésima se permite, $\mathbf{p}_i \dot{\theta}_i$, se suma a los componentes de $\mathbf{A}_{i,i-1} \mathbf{t}_{i-1}$, dando de esta manera pie a la rotación real del cuerpo i -ésimo \mathbf{t}_i . Por lo tanto, al vector de seis dimensiones \mathbf{p}_i se le llama vector *de propagación de movimiento de articulación* de la i -ésima articulación. Observe aquí que si la i -ésima articulación es prismática, la expresión de \mathbf{p}_i en la ecuación (6.57a) cambia a

$$\mathbf{p}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

y no habrá ningún cambio en la expresión de la matriz $\mathbf{A}_{i,i-1}$.

Ahora, para n cuerpos del manipulador serial, las ecuaciones (6.47-6.48) se obtienen por

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{p}_1 \dot{\theta}_1 \quad (6.60a)$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{A}_{21} \mathbf{t}_1 + \mathbf{p}_2 \dot{\theta}_2 \quad (6.60b)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{A}_{n,n-1} \mathbf{t}_{n-1} + \mathbf{p}_n \dot{\theta}_n \quad (6.60c)$$

Las ecuaciones (6.60a-c) se escriben en forma compacta así:

$$\mathbf{t} = \mathbf{A} \mathbf{t} + \mathbf{N}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.61a)$$

donde el vector de rotación generalizada de seis dimensiones \mathbf{t} , la matriz bidiagonal del bloque inferior de $6n \times 6n$ \mathbf{A} , la matriz diagonal del bloque inferior de $6n \times 6n$ \mathbf{T}_d y el vector de índice de articulación de n dimensiones $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ se obtienen por

$$\mathbf{t} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n \end{bmatrix}; \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & & \ddots \\ \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{A}_{n,n-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix}; \mathbf{N}_d \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \cdots & & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}; \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (6.61b)$$

Cuando se reescribe la ecuación (6.61a) como

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{t} = \mathbf{N}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.62)$$

puede encontrarse fácilmente la rotación generalizada \mathbf{t} , definida como $\mathbf{t} \equiv [\mathbf{t}_1^T \dots \mathbf{t}_n^T]^T$ en términos del vector de índice de articulación $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, es decir,

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.63)$$

donde $\mathbf{N}_1 \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, cuya expresión puede obtenerse como

$$\mathbf{N}_1 \equiv (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} & & & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{1} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{1} & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_{n,n-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (6.64)$$

En la ecuación (6.63) se señala el resultado de $\mathbf{N}_l \mathbf{N}_d$ como matriz de Complemento Ortogonal Natural (NOC), que fue originalmente propuesta por Ángeles y Lee (1988), mientras que la forma desacoplada que se obtiene por la ecuación (6.63), llamada matrices NOC Desacopladas (DeNOC), aparecieron por vez primera en Saha (1995). A continuación se mostrará cómo pueden usarse las matrices DeNOC para derivar la matriz jacobiana de un manipulador.

6.6.2 Derivación de la matriz jacobiana

La matriz jacobiana, ecuación (6.33), se deriva aquí a partir de la definición de las matrices DeNOC que aparecen en la ecuación (6.63). Observe que el efector final de un manipulador robótico no es más que una parte del n -ésimo cuerpo con su posición distinta de su origen O_n . Se ubica en un punto denotado por \mathbf{a}_{en} desde O_n . Por lo tanto, se introduce una matriz de propagación de rotación, digamos \mathbf{A}_{en} , como se define en la ecuación (6.57b) para encontrar la rotación del efector terminal \mathbf{t}_e a partir de \mathbf{t}_n , es decir,

$$\mathbf{t}_e = \mathbf{A}_{en} \mathbf{t}_n \quad (6.65a)$$

donde la matriz de 6×6 \mathbf{A}_{en} está dada por

$$\mathbf{A}_{en} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{a}_{en} \times \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{a}_n \times \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (6.65b)$$

El vector \mathbf{a}_{en} se define como el vector $\mathbf{a}_{i+1,i} \equiv \mathbf{a}_{i,i+1}$. Si se sustituye la expresión de \mathbf{t}_n de la expresión de rotación generalizada \mathbf{t} de la ecuación (6.61b), la ecuación (6.65a) puede reescribirse como

$$\mathbf{t}_e = \mathbf{A}_{en} \mathbf{N}_{1n} \mathbf{N}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.66)$$

donde la matriz de 6×6 , \mathbf{N}_{1n} , es como sigue:

$$\mathbf{N}_{1n} \equiv [\mathbf{A}_{n1} \mathbf{A}_{n2} \cdots \mathbf{A}_{n,n-1} \mathbf{1}] \quad (6.67)$$

en lo que \mathbf{N}_d y $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ se obtienen con la ecuación (6.61b). Si se sustituye la expresión de \mathbf{N}_{1n} de la ecuación (6.67) y \mathbf{N}_d de la ecuación (6.61b) a la ecuación (6.66), se obtiene

$$\mathbf{t}_e = \mathbf{A}_{en} [\mathbf{A}_{n1} \mathbf{p}_1, \mathbf{A}_{n2} \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{A}_{n,n-1} \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_n] \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.68a)$$

Usando la propiedad de la matriz de propagación de rotación, ecuación (6.58), la ecuación (6.68a) puede escribirse en la forma de la ecuación (6.33), donde

$$\mathbf{J} = [\mathbf{A}_{e1} \mathbf{p}_1, \mathbf{A}_{e2} \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{A}_{en} \mathbf{p}_n, \mathbf{p}_n] \quad (6.68b)$$

En la ecuación (6.68b), \mathbf{J} es la matriz jacobiana de $6 \times n$. Si se sustituyen las expresiones para la matriz \mathbf{A}_{ei} y el vector \mathbf{p}_i para $i = 1 \dots n$, como se define en la ecuación (6.75b), en la ecuación (6.68b), dará como resultado la expresión familiar de \mathbf{J} , como en la ecuación (6.49), donde $\mathbf{a}_{ei} = -\mathbf{a}_{ie} \dots \mathbf{a}_{ie}$ es el vector que junta el origen del eslabón i -ésimo O_i con un punto en el efector final, como se presenta en la ecuación (6.48c). Dependiendo del requerimiento, cualquiera de estas expresiones para la matriz jacobiana, es decir, la ecuación (6.49) o la ecuación (6.68b), podrá usarse en beneficio del usuario, por ejemplo, para lograr eficiencia o para obtener mejores interpretaciones físicas, etcétera.

6.7



Singularidad



Matriz singular

Se trata de un término proveniente del álgebra lineal. Para un sistema de ecuaciones de álgebra lineal, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, \mathbf{A} singular implica que no existe una solución para la incógnita \mathbf{x} . Esto significa que el determinante de la matriz \mathbf{A} desaparece.

En la ciencia de la robótica surge frecuentemente la pregunta acerca de si la matriz \mathbf{J} , como en la ecuación (6.33), es singular o no. Para un \mathbf{J} no singular, se calculan los índices de articulación necesarios en cada instante de tiempo a lo largo de la trayectoria de movimiento del efector final. La verdadera pregunta es: ¿el jacobiano es no singular o invertible para todos los valores de las posiciones de las articulaciones, es decir, θ ? La mayoría de los robots tienen valores de θ donde el jacobiano se convierte en singular. Estas

posiciones se llaman singularidades del robot. Todos los manipuladores robóticos tienen singularidades en los límites de su espacio de trabajo, y la mayoría tiene posiciones geométricas singulares dentro de sus espacios de trabajo. Un estudio a fondo de la clasificación de singularidades supera el alcance de este libro. Sin embargo, las singularidades se clasifican normalmente como:

1. *Singularidades de límites del espacio de trabajo:* Ocurren cuando el manipulador se extiende o se dobla completamente sobre sí mismo, de tal modo que el efector final está cerca o en el límite del espacio de trabajo.
2. *Singularidades interiores del espacio de trabajo:* ocurren fuera de los límites del espacio de trabajo y por lo general se producen cuando se alinean dos o más ejes de las articulaciones.

Observe que cuando un manipulador se encuentra en una posición singular, ha perdido uno o más grados de libertad, visto desde el espacio cartesiano. Esto significa que hay alguna dirección en el espacio cartesiano a lo largo de la cual es imposible mover el efector final del robot, sin importar qué incrementos en la articulación se seleccionen. Es obvio que estas situaciones ocurren en los límites del espacio de trabajo. Alternativamente, los incrementos en las articulaciones se acercan a infinito conforme se llega a la posición singular. En situaciones prácticas, el controlador exigirá potencia de los actuadores para cumplir con el requerimiento infinito de incremento en la articulación. Como resultado, el actuador será desactivado para prevenir un daño de consideración.

Ejemplo 6.22

Singularidad del brazo planar de dos eslabones

En la figura 6.2, las singularidades pueden obtenerse mediante la igualación a cero del determinante jacobiano asociado, es decir, $\det(\mathbf{J}) = 0$. La matriz jacobiana de 2×2 , \mathbf{J} , se obtiene según la ecuación (6.51b) como

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \quad (6.69)$$

donde $\det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2$, lo que implica que el brazo es singular cuando $\theta_2 = 0$ o π . Físicamente, cuando $\theta_2 = 0$, el brazo se extiende en forma recta. En esta configuración, el movimiento del efector final sólo es posible a lo largo de una dirección que es perpendicular al brazo. De igual manera, cuando $\theta_2 = \pi$, el brazo se dobla completamente sobre sí mismo, y nuevamente el movimiento de la mano sólo es posible en un sentido cartesiano en lugar de dos. Éstas se llaman singularidades de frontera.

Ejemplo 6.23

Singularidad del brazo antropomórfico

En la figura 6.4 y en el ejemplo 6.19, las singularidades del brazo correspondientes a los movimientos lineales pueden obtenerse a partir del determinante del jacobiano asociado, es decir, usando los últimos tres renglones de la ecuación (6.54c). Esto se denota como \mathbf{J}_v en la ecuación (6.32b) de la siguiente manera:

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} -s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -c_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 c_1 s_{23} \\ c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & -s_1 (a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -a_3 s_1 s_{23} \\ 0 & -(a_2 c_2 + a_3 c_{23}) & a_3 c_{23} \end{bmatrix} \quad (6.69a)$$

El determinante de \mathbf{J}_v se obtiene como

$$\det(\mathbf{J}_v) = -a_2^2 a_3 s \theta_3 c \theta_2 + \frac{1}{2} a_2 a_3^2 [s(\theta_2 + 2\theta_3) - s\theta_2] \quad (6.69b)$$

Según la ecuación (6.69b), queda claro que una de las configuraciones singulares sucede cuando $\theta_3 = 0$ o π , es decir, cuando los eslabones 2 y 3 estén en una línea, esto es, extendidos o doblados, como en el caso del brazo planar.

6.8



Análisis de aceleración

Normalmente, se requieren los resultados del análisis de aceleración en los cálculos dinámicos donde las fuerzas de inercia se equiparan con las fuerzas externas. Las expresiones de aceleración pueden obtenerse mediante la diferenciación de las expresiones de velocidad. Por ejemplo, las aceleraciones del efector final de un robot se obtienen al diferenciar la ecuación (6.33) como

$$\dot{\mathbf{t}}_e = \mathbf{J}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (6.70a)$$

donde $\dot{\mathbf{t}}_e = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_e^T \dot{\mathbf{v}}_e^T] \dots \dot{\boldsymbol{\omega}}_e$, y $\dot{\mathbf{v}}_e$ son las aceleraciones angular y lineal del efector final, respectivamente, y $\ddot{\boldsymbol{\theta}} \equiv [\ddot{\theta}_1 \dots \ddot{\theta}_n]^T$, donde $\ddot{\theta}_i$ representa la aceleración de articulación para la articulación i . La columna i de $\dot{\mathbf{J}}$ se obtiene por

$$\dot{\mathbf{j}}_i \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_i \\ \dot{\mathbf{e}}_i \times \mathbf{a}_{i,e} + \mathbf{e}_i \times \dot{\mathbf{a}}_{i,e} \end{bmatrix} \quad (6.70b)$$

Los vectores $\dot{\mathbf{e}}$ y $\dot{\mathbf{a}}_{i,e}$ son la derivada de tiempo de los vectores \mathbf{e}_i y $\mathbf{a}_{i,e}$, que se obtienen de las ecuaciones (6.50a) y (6.50b), respectivamente.

Ejemplo 6.24

Análisis de aceleración del brazo planar de dos eslabones

Usando la ecuación (6.70a), la derivada respecto al tiempo de la matriz jacobiana \mathbf{J} para el brazo de dos eslabones puede darse como

$$\dot{\mathbf{J}} \equiv \begin{bmatrix} -a_1 c_1 \dot{\theta}_1 - a_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -a_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -a_1 s_1 \dot{\theta}_1 - a_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -a_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{bmatrix} \quad (6.71)$$

y $\ddot{\boldsymbol{\theta}} \equiv [\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2]^T$.

Ejemplo 6.25

Análisis de aceleración del brazo antropomórfico

De manera similar al caso planar del ejemplo 6.24, la derivada respecto al tiempo de la matriz jacobiana \mathbf{J} para el brazo antropomórfico se obtiene por

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -c_1 \dot{\theta}_1 & -c_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 & -s_1 \dot{\theta}_1 & -s_1 \dot{\theta}_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_1 \dot{\theta}_1 (a_{2c} + a_{3c}) + s_1 (a_{2s} \dot{\theta}_2 + a_{3s} \dot{\theta}_{23}) & s_1 \dot{\theta}_1 (a_{2s} + a_{3s}) - c_1 (a_{2c} \dot{\theta}_2 + a_{3c} \dot{\theta}_{23}) & a_{3s} s_1 \dot{\theta}_1 - a_{3c} c_1 \dot{\theta}_{23} \\ -s_1 \dot{\theta}_1 (a_{2c} + a_{3c}) - c_1 (a_{2s} \dot{\theta}_2 + a_{3s} \dot{\theta}_{23}) & -c_1 \dot{\theta}_1 (a_{2s} + a_{3s}) - s_1 (a_{2c} \dot{\theta}_2 + a_{3c} \dot{\theta}_{23}) & -a_{3s} c_1 \dot{\theta}_1 - a_{3c} s_1 \dot{\theta}_{23} \\ 0 & a_{2s} \dot{\theta}_2 + a_{3s} \dot{\theta}_{23} & a_{3s} \dot{\theta}_{23} \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

donde $a_{2s} \equiv a_2 s_2$; $a_{2c} \equiv a_2 c_2$; $a_{3s} \equiv a_3 s_{23}$; $a_{3c} \equiv a_3 c_{23}$ y $\ddot{\boldsymbol{\theta}} \equiv [\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3]^T$

RESUMEN

En este capítulo se hace primero una introducción a la cinemática de cuerpos rígidos. Se presentan las representaciones de posición y orientación. Basado en los conceptos anteriores, se realizan análisis de posición, velocidad y aceleración de un robot serial. Se hace hincapié en los análisis de cinemática directa e inversa y en la matriz jacobiana que aparece en el análisis de velocidad. También se introduce el concepto de las matrices DeNOC para la obtención de la matriz jacobiana. Se dan varios ejemplos para entender los conceptos que se introducen en este capítulo.



EJERCICIOS

- 6.1 Defina la cinemática directa e inversa.
- 6.2 Si los dos eslabones de un manipulador planar de dos eslabones tienen la misma longitud, encuentre la expresión para la matriz de transformación homogénea.
- 6.3 Determine la matriz de transformación homogénea general para el robot de brazo prismático-rotacional que se presenta en la figura 5.26.
- 6.4 Encuentre las matrices de transformación homogénea, individuales y general para la muñeca esférica que se muestra en la figura 5.30.
- 6.5 ¿Cuál es la finalidad de una muñeca? ¿Cuál es su grado de libertad (DOF)?
- 6.6 ¿Puede usarse un brazo de posición como muñeca aunque tenga el mismo DOF?
- 6.7 ¿Qué es el jacobiano de un sistema robótico?
- 6.8 ¿Cómo ayuda el estudio de singularidad en el análisis de un robot?
- 6.9 ¿Puede haber singularidad dentro del espacio de trabajo de un robot?
- 6.10 Derive la matriz jacobiana para el ejercicio 6.2.



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

- 6.11 Busque la matriz de transformación general para el robot SCARA que se presenta en la figura 5.28.
- 6.12 Exprese la matriz jacobiana para el robot SCARA que se muestra en la figura 5.28.
- 6.13 Determine por lo menos una configuración singular para un robot SCARA.
- 6.14 Repita los ejercicios 6.11 a 6.13 para la arquitectura del robot que se presenta en la figura 5.29.
- 6.15 Repita los ejercicios 6.11 a 6.13 para la arquitectura del robot que se presenta en la figura 5.30.



Capítulo

7

Estática



¿Qué es la estática?

La estática es la rama de la física aplicada que se ocupa del análisis de los momentos y las fuerzas que actúan sobre un sistema que está en equilibrio estático.

Cuando un manipulador robótico ejecuta una determinada tarea, por ejemplo, levantar una pieza de trabajo de una máquina, su efector final ejerce un momento y una fuerza sobre el ambiente externo en el punto de contacto. Esta fuerza y este momento se generan mediante los actuadores que se instalan en las diferentes articulaciones. Para un manipulador serial, los momentos y las fuerzas de los actuadores se transmiten al punto de contacto por medio de una cadena de lazo abierto. En la estática, se busca la relación entre los pares de torsión/fuerzas, los momentos cartesianos y las fuerzas aplicadas en el efector final. Lo anterior tiene importancia práctica para determinar la calidad de la transmisión del momento y la fuerza a través de las diferentes articulaciones de un manipulador robótico y sirve como base para clasificar el tamaño de eslabones y cojinetes del manipulador, así como para la selección de los actuadores apropiados. Los resultados también pueden ser usados para satisfacer el sistema de control. La estática del mecanismo espacial puede tratarse por medio de varios métodos, por ejemplo, el método de vectores, el principio de trabajo virtual y otros.

En este capítulo, se desarrollarán varios métodos para representar las fuerzas estáticas que actúan sobre un manipulador robótico y su transformación entre diferentes sistemas de coordenadas. La transformación de momentos y fuerzas entre el espacio del actuador y el del efector final es el centro de este estudio. Con ello se muestra que los momentos y las fuerzas de entrada de actuadores se relacionan con las fuerzas de salida del efector final al trasponer la matriz Jacobiana del robot, como se observó en el capítulo anterior. Además, se introducen los diagramas de cuerpo libre para la derivación de las reacciones generadas en diferentes articu-



Equilibrio estático

En un equilibrio estático, un sistema está en reposo o moviéndose a velocidad constante a través de su centro de masa.

laciones. Desde la fase de diseño, es importante una comprensión profunda de las reacciones de las articulaciones para la clasificación correcta del tamaño de eslabones y actuadores. Primero se establecerán las ecuaciones básicas que rigen el balance estático de un eslabón. Luego se aplicarán estas ecuaciones para el análisis estático de manipuladores seriales. Finalmente, se describirá el concepto de pares de torsión y transformación de articulaciones equivalentes entre las fuerzas del efector final y la torsión de articulaciones equivalentes.

7.1



Balance de fuerzas y momentos

En un manipulador robótico serial, cada eslabón se conecta a uno o dos eslabones por medio de varias articulaciones. La figura 7.1 representa las fuerzas y momentos que actúan sobre un eslabón típico i que se conecta con el eslabón $i - 1$ mediante la articulación i y con el eslabón $i + 1$ mediante la articulación $i + 1$. Las fuerzas que actúan sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ a través de la articulación i pueden ser reducidas a una fuerza resultante $\mathbf{f}_{i-1,i}$ y a un momento resultante $\mathbf{n}_{i-1,i}$ alrededor del origen O_i del i -ésimo sistema de coordenadas adjunta al eslabón $(i - 1)$. De manera parecida, las fuerzas que actúan sobre el eslabón $i + 1$ por el eslabón i en la articulación $(i + 1)$ pueden reducirse a una fuerza resultante $\mathbf{f}_{i,i+1}$ y a un momento $\mathbf{n}_{i,i+1}$ alrededor del origen O_{i+1} del $(i + 1)$ -ésimo sistema de coordenadas adjunto al $(i + 1)$ -ésimo eslabón. A continuación se definen las siguientes notaciones:

- $\mathbf{f}_{i-1,i}$: Vector tridimensional de una fuerza resultante ejercida sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ en O_i .
- $\mathbf{n}_{i-1,i}$: Vector tridimensional de un momento resultante ejercido sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ en O_i .
- $\mathbf{f}_{i,i+1}$: Vector tridimensional de una fuerza resultante ejercida sobre el eslabón $i + 1$ por el eslabón i en O_{i+1} . Observe que $\mathbf{f}_{i+1,i} = -\mathbf{f}_{i,i+1}$.
- $\mathbf{n}_{i,i+1}$: Vector tridimensional de un momento resultante ejercido sobre el eslabón $i + 1$ por el eslabón i en O_{i+1} , de tal modo que $\mathbf{n}_{i+1,i} = \mathbf{n}_{i,i+1}$.
- \mathbf{g} : Vector tridimensional de aceleración debido a la gravedad.
- \mathbf{d}_i : Vector tridimensional que denota la posición del centro de masa del i -ésimo eslabón C_i relativo al origen del i -ésimo sistema, es decir, O_i , como se indica en la figura 7.1.
- \mathbf{r}_i : Vector tridimensional que denota la posición del origen del $(i + 1)$ -ésimo sistema, es decir, O_{i+1} relativo al centro de masa del eslabón i , C_i .
- \mathbf{a}_i : Vector de posición tridimensional de O_{i+1} respecto a O_i , de tal modo que $\mathbf{a}_i = \mathbf{d}_i + \mathbf{r}_i$.

Considere ahora el balance de fuerzas y momentos de la figura 7.1. Hay tres fuerzas que se ejercen sobre el eslabón i : $\mathbf{f}_{i-1,i}$, $\mathbf{f}_{i+1,i} (= -\mathbf{f}_{i,i+1})$ y $m_i \mathbf{g}$. La ecuación de balance de fuerzas se escribe entonces como

$$\mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{f}_{i,i+1} + m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

Ahora considere el balance de momentos alrededor de O_i en el eslabón i , es decir, el punto donde el eslabón $i - 1$ se conecta al eslabón i . Hay dos momentos que actúan sobre el eslabón i : $\mathbf{n}_{i-1,i}$ y $\mathbf{n}_{i+1,i} (= -\mathbf{n}_{i,i+1})$. Adicionalmente, las fuerzas $m_i \mathbf{g}$ y $-\mathbf{f}_{i,i+1}$ producen momentos alrededor de O_i . Al sumar estos momentos se obtiene

$$\mathbf{n}_{i-1,i} - \mathbf{n}_{i,i+1} - \mathbf{a}_i \times \mathbf{f}_{i,i+1} + \mathbf{d}_i \times m_i \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (7.2)$$

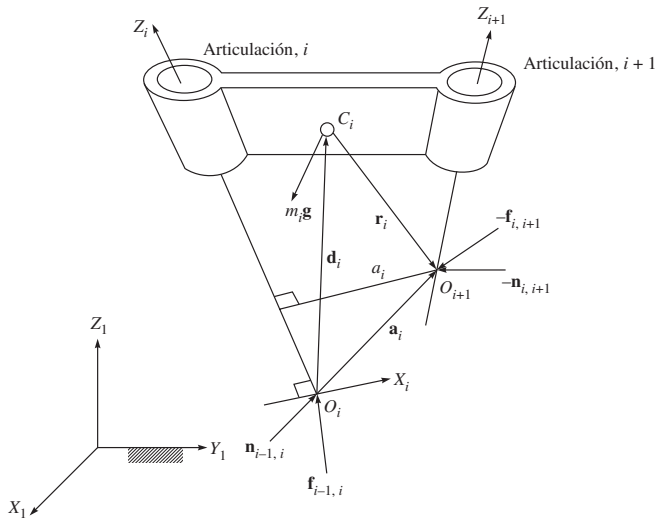


Figura 7.1 Fuerzas y momentos que actúan sobre el eslabón i

donde $\mathbf{f}_{i-1,i}$ y $\mathbf{n}_{i-1,i}$ son las fuerzas y momentos de reacción entre el eslabón $i-1$ y el eslabón i . Para $i=1$, \mathbf{f}_{01} y \mathbf{n}_{01} representan la fuerza y el momento ejercidos sobre el primer eslabón móvil por el eslabón de la base fija. Para $i=n+1$, $\mathbf{f}_{n,n+1}$ y $\mathbf{n}_{n,n+1}$ representan la fuerza y el momento ejercidos sobre el ambiente por el efector final. En este sentido, el ambiente se trata como un eslabón adicional, numerado $n+1$. Las ecuaciones (7.1) y (7.2) se escriben para cada eslabón móvil $i=1, \dots, n$ con el fin de proporcionar ecuaciones de $6n$ en $6(n+1)$ número de fuerzas y momentos de reacción. Por lo tanto, para dar una solución única, deberán especificarse seis de las fuerzas y los momentos de reacción. Cuando un manipulador realiza una tarea determinada, por ejemplo, una inserción o esmerilado, el efector final ejerce cierta fuerza o momento sobre su ambiente. Por otro lado, cuando el manipulador carga un objeto, el peso del objeto se convierte en una carga para el efector final. Por lo tanto, considerando la fuerza y el momento del efector final $\mathbf{f}_{n,n+1}$ y $\mathbf{n}_{n,n+1}$ como una cantidad conocida, pueden resolverse las ecuaciones (7.1) y (7.2) para las fuerzas y los momentos de reacción restantes, es decir,

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & -1 & -\mathbf{a}_1 \times 1 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\
 & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{n}_{01} \\
 \mathbf{f}_{01} \\
 \mathbf{n}_{12} \\
 \mathbf{f}_{12} \\
 \vdots \\
 \mathbf{n}_{n-1,n} \\
 \mathbf{f}_{n-1,n}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -\mathbf{d}_1 \times m_1 \mathbf{g} \\
 -m_1 \mathbf{g} \\
 -\mathbf{d}_2 \times m_2 \mathbf{g} \\
 -m_2 \mathbf{g} \\
 \vdots \\
 -\mathbf{d}_n \times m_n \mathbf{g} + \mathbf{a}_n \times \mathbf{f}_{n,n+1} + \mathbf{n}_{n,n+1} \\
 -m_n \mathbf{g} + \mathbf{f}_{n,n+1}
 \end{bmatrix}
 \quad (7.3)$$

Observe que la ecuación (7.3) está dispuesta para escribir primero la ecuación (7.2), seguida por la ecuación (7.1). Esto se realiza para representar la ecuación (7.3) en forma

compacta, usando la definición de una llave de torsión, que es un vector de seis dimensiones, es decir,

$$\mathbf{w}_{i-1,i} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{i-1,i} \\ \mathbf{f}_{i-1,i} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

donde los vectores tridimensionales $\mathbf{f}_{i-1,i}$ y $\mathbf{n}_{i-1,i}$ son la fuerza de reacción sobre el eslabón i por el eslabón $i-1$ en O_i y el momento sobre el eslabón i por el eslabón $i-1$ alrededor de O_i , respectivamente. Usando la ecuación (7.4), la ecuación (7.3) puede entonces reescribirse como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{A}'_{12} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{A}'_{n-1,n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{01} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n-2,n-1} \\ \mathbf{w}_{n-1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^g \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n-1}^g \\ \mathbf{w}_n^g + \mathbf{w}_n^e \end{bmatrix} \quad (7.5a)$$

donde la matriz de 6×6 , $\mathbf{A}'_{i,i+1}$, se define como

$$\mathbf{A}'_{i,i+1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{a}_{i,i+1} \times \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (7.5b)$$

en la cual $\mathbf{a}_{i,i+1}$ denota el vector tridimensional desde el punto O_i hasta O_{i+1} , es decir, $\mathbf{a}_{i,i+1} \equiv \mathbf{a}_i$. La matriz $\mathbf{A}'_{i,i+1}$ se denomina matriz de propagación de llave de torsión en Chaudhary y Saha (2005), que no es más que la matriz traspuesta de la matriz de propagación rotacional para los eslabones i e $i+1$. La definición de la matriz de propagación rotacional se obtiene con la ecuación (6.57b). Además, $\mathbf{w}_i^g \equiv m_i[(\mathbf{d}_i \times \mathbf{g})^T, \mathbf{g}^T]^T$ y $\mathbf{w}_n^e \equiv [(\mathbf{a}_n \times \mathbf{f}_{n,n+1} + \mathbf{n}_{n,n+1})^T \mathbf{f}_{n,n+1}^T]^T$ son los vectores de llave de torsión externos de seis dimensiones debido a la gravedad y a las entradas conocidas sobre el eslabón n , respectivamente. Asimismo, usando las notaciones

$\mathbf{w}^J \equiv [\mathbf{w}_{01}^T \ \mathbf{w}_{12}^T \ \cdots \ \mathbf{w}_{n-1,n}^T]^T$, y $\mathbf{w}' \equiv [\mathbf{w}_1^{gT} \ \mathbf{w}_2^{gT} \ \cdots \ (\mathbf{w}_n^g + \mathbf{w}_n^e)^T]^T$, la ecuación (7.5) puede resolverse para \mathbf{w}^J como

$$\mathbf{w}^J = \mathbf{N}_u \mathbf{w}' \quad (7.6a)$$

donde

$$\mathbf{N}_u \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{A}'_{12} & \cdots & \mathbf{A}'_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{A}'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (7.6b)$$

Observe que \mathbf{N}_u en la ecuación (7.6b) no es más que la matriz traspuesta de la matriz \mathbf{N}_d proporcionada por la ecuación (6.64).

7.2



Cálculo recursivo

En esta sección, se desarrollará un método recursivo para el análisis estático de un manipulador serial. El método recursivo resuelve las fuerzas y los momentos que reaccionan en la articulación de un eslabón, sin necesidad de resolver las ecuaciones 6n, (7.3) o (7.5), simultáneamente. Para facilitar el análisis basado en la definición de llave de torsión proporcionada en la ecuación (7.4), las ecuaciones (7.1) y (7.2) se escriben en forma recursiva como

$$\mathbf{f}_{i-1,i} = \mathbf{f}_{i,i+1} - m_i \mathbf{g} \quad (7.7a)$$

$$\mathbf{n}_{i-1,i} = \mathbf{n}_{i,i+1} + \mathbf{a}_i \times \mathbf{f}_{i,i+1} - \mathbf{d}_i \times m_i \mathbf{g} \quad (7.7b)$$

Observe que los vectores en las ecuaciones (7.7 a-b) aún no se expresan en algún sistema de coordenadas. Sin embargo, el vector de posición \mathbf{r}_i a menudo se especifica en el sistema $(i+1)$ -ésimo, donde tiene representación constante. Por otro lado, el vector \mathbf{a}_i puede expresarse de manera conveniente en el sistema i -ésimo en términos de los parámetros DH como

$$[\mathbf{a}_i]_i \equiv \begin{bmatrix} a_i c \theta_i \\ a_i s \theta_i \\ b_i \end{bmatrix} \quad (7.8a)$$

Los vectores \mathbf{d}_i pueden entonces obtenerse como

$$[\mathbf{d}_i]_i \equiv [\mathbf{a}_i]_i - [\mathbf{r}_i]_i = \begin{bmatrix} a_i c \theta_i \\ a_i s \theta_i \\ b_i \end{bmatrix} - \mathbf{Q}_i \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ r_{iz} \end{bmatrix}$$

Donde

$$[\mathbf{r}_i]_{i+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ r_{iz} \end{bmatrix} \quad (7.8b)$$

donde r_{ix} , r_{iy} y r_{iz} son los componentes del vector \mathbf{r}_i a lo largo de los ejes X_{i+1} , Y_{i+1} y Z_{i+1} del sistema $(i+1)$ -ésimo y \mathbf{Q}_i es la matriz de rotación que transforma la representación del vector en el sistema $(i+1)$ -ésimo en el sistema i -ésimo. Usando las ecuaciones (7.7a-b), los momentos y fuerzas de reacción de la articulación pueden calcularse en forma recursiva. El proceso empieza con el último eslabón donde el efector final se conecta. Continúa con un eslabón a la vez y termina en el eslabón de la base. Para $i = n$, el momento y fuerza del efector final $\mathbf{n}_{n+1,n}$ ($= -\mathbf{n}_{n,n+1}$) y $\mathbf{f}_{n+1,n}$ ($= -\mathbf{f}_{n,n+1}$) se consideran como conocidos en el sistema adjunto a ellos, es decir, $-[\mathbf{n}_{n,n+1}]_{n+1}$ y $-[\mathbf{f}_{n,n+1}]_{n+1}$ son entradas. Por ende, las ecuaciones (7.7a-b) proporcionan el momento y fuerza de reacción $\mathbf{n}_{n-1,n}$ y $\mathbf{f}_{n-1,n}$ en la n -ésima articulación: Los valores pueden evaluarse apropiadamente en el n -ésimo o en el $(n-1)$ -ésimo sistema de coordenadas. El proceso se repite para $i = n-1, \dots, 1$ hasta que se hayan encontrado todos los momentos y fuerzas de reacción. Ahora se muestra el cálculo. Las ecuaciones (7.7a-b) para el i -ésimo eslabón se escriben primero en el $(i+1)$ -ésimo sistema que se adjunta a él, es decir,

$$[\mathbf{f}_{i-1,i}]_{i+1} = [\mathbf{f}_{i,i+1} - m_i \mathbf{g}]_{i+1} \quad (7.9a)$$

$$[\mathbf{n}_{i-1,i}]_{i+1} = [\mathbf{n}_{i,i+1} + \mathbf{a}_i \times \mathbf{f}_{i,i+1} - \mathbf{d}_i \times m_i \mathbf{g}]_{i+1} \quad (7.9b)$$

Una vez que las fuerzas y momentos de reacción se hayan calculado en el $(i+1)$ -ésimo sistema, se convierten en el i -ésimo sistema por medio de las siguientes transformaciones:

$$[\mathbf{f}_{i-1,i}]_i = \mathbf{Q}_i [\mathbf{f}_{i-1,i}]_{i+1}$$

y

$$[\mathbf{n}_{i-1,i}]_i = \mathbf{Q}_i [\mathbf{n}_{i-1,i}]_{i+1} \quad (7.10)$$

Observe que el término \mathbf{g} en las ecuaciones (7.9a-b) denota la aceleración debida a la gravedad expresada en el $(i+1)$ -ésimo sistema. Puesto que \mathbf{g} usualmente se especifica en el sistema fijo, es decir, el sistema 1, deberá convertirse en el sistema adjunto al eslabón antes

de ser sustituido en las ecuaciones (7.9a-b). Esto puede realizarse mediante la siguiente fórmula recursiva: Para $i = 1, \dots, n$,

$$[\mathbf{g}]_{i+1} = \mathbf{Q}_i^T [\mathbf{g}]_i \quad (7.11)$$

Además, si el momento y fuerza del efector final se especifican en el sistema fijo, también deberán transformarse dentro del sistema del efector final de la misma manera, es decir,

$$[\mathbf{f}_{n,n+1}]_{n+1} = \mathbf{Q}^T [\mathbf{f}_{n,n+1}]_1 \text{ y } [\mathbf{n}_{n,n+1}]_{n+1} = \mathbf{Q}^T [\mathbf{n}_{n,n+1}]_1 \quad (7.12)$$

donde $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{Q}_1 \dots \mathbf{Q}_n - \mathbf{Q}_i$ para $i = 1, \dots, n$, siendo la matriz de rotación entre los i -ésimo y $(i + 1)$ -ésimo sistemas, es decir, la primera matriz de 3×3 de la matriz de transformación homogénea \mathbf{T}_i derivada en la ecuación (5.50b).

7.3



Pares de torsión equivalentes

Una vez que se conocen las fuerzas y momentos que reaccionan en las articulaciones, pueden determinarse las fuerzas o pares de torsión de los actuadores. Para un manipulador serial, cada articulación se acciona mediante un actuador que ejerce una fuerza o un par torsión entre los dos eslabones adyacentes. Estas fuerzas o pares de torsión de actuación pueden encontrarse mediante la proyección de las fuerzas que reaccionan sobre sus correspondientes ejes de articulaciones.

Para una articulación o rotacional, el actuador ejerce un par torsional alrededor del i -ésimo eje de articulación. Suponiendo que el par torsional ficcional en la articulación sea insignificante, la fuerza del actuador τ_i se obtiene por

$$\tau_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{n}_{i-1,i} \quad (7.13)$$

donde \mathbf{e}_i es el vector unitario que apunta a lo largo del i -ésimo eje de articulación, es decir, Z_i de la figura 7.1, alrededor del cual se está realizando el movimiento relativo entre los dos eslabones colindantes. El par torsional del actuador tiene aquel componente de \mathbf{n}_{i-1} que corresponde a la dirección del eje de la articulación. Sus otros dos componentes son reacciones que deberán ser soportadas por el cojinete de la articulación. Al término τ_i se le llama par torsional de la articulación. Para una articulación prismática, la fuerza del actuador se obtiene de manera similar. Es la fuerza que se ejerce a lo largo del i -ésimo eje de la rotacional. Nuevamente, suponiendo que la fuerza de fricción en la articulación sea insignificante, la fuerza del actuador, denotada con la misma letra τ_i , se expresa como

$$\tau_i = \mathbf{e}_i^T \mathbf{f}_{i-1,i} \quad (7.14)$$

donde \mathbf{e}_i es el vector unitario que apunta a lo largo del i -ésimo eje de articulación positivo, a lo largo del cual se trasladan los dos eslabones adyacentes. La ecuación (7.14) implica que la fuerza del actuador solamente lleva el componente de $\mathbf{f}_{i-1,i}$ a lo largo de la dirección del eje de la articulación, mientras que sus otros componentes se apoyan en los cojinetes o rodamientos de la articulación. Usando la notación de llave de torsión de 6 dimensiones $\mathbf{w}_{i-1,i}$, la fuerza de la articulación o par torsional τ_i puede escribirse como

$$\tau_i = \mathbf{p}_i^T \mathbf{w}_{i-1,i} \quad (7.15)$$

donde \mathbf{p}_i es el vector de propagación de 6 dimensiones del movimiento de la articulación para la articulación rotacional o prismática, según fuere el caso, que se da en las ecuaciones (6.57b) o (6.59), respectivamente.

Ejemplo 7.1**Estática de un brazo planar de dos eslabones**

El brazo de manipulador planar de dos eslabones está aplicando una fuerza \mathbf{f} sobre el ambiente, por ejemplo, una pared, con su efector final. Suponga que la fuerza \mathbf{f} es conocida en el sistema del efector final, es decir, en el sistema 3. Por lo tanto, $[\mathbf{f}_{23}]_3 \equiv [f_x, f_y, 0]^T$. Los pares de torsión de la articulación que se requieren se encuentran como función de las configuraciones del brazo y de los componentes de la fuerza aplicada. Observe que la gravedad no juega ningún papel cuando el manipulador se acuesta sobre el plano horizontal. En la figura 7.2 y en las ecuaciones (7.9-7.10),

$$[\mathbf{f}_{23}]_3 \equiv \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

y $[\mathbf{f}_{12}]_3 = [\mathbf{f}_{23}]_3$ para $i = 2$. Por lo tanto,

$$[\mathbf{f}_{12}]_2 = \mathbf{Q}_2 [\mathbf{f}_{12}]_3 = \begin{bmatrix} f_x c\theta_2 - f_y s\theta_2 \\ f_x s\theta_2 + f_y c\theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.16a)$$

donde la matriz de orientación \mathbf{Q}_2 se obtiene por

$$\mathbf{Q}_2 \equiv \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.16b)$$

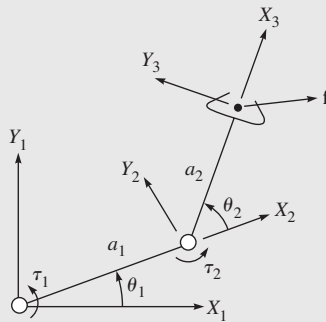


Figura 7.2 Brazo planar de dos eslabones aplicando una fuerza

Entonces, puesto que no se ejerce ningún movimiento externo, es decir, $\mathbf{n}_{23} = \mathbf{0}$, por parte del efector final, el momento $[\mathbf{n}_{12}]_2$ se obtiene como

$$[\mathbf{n}_{12}]_2 \equiv \mathbf{Q}_2 [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{f}_{23}]_3 = [\mathbf{a}_2]_2 \times [\mathbf{f}_{23}]_2 = [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{f}_{12}]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 f_y \end{bmatrix} \quad (7.16c)$$

donde

$$[\mathbf{a}_2]_2 \equiv \begin{bmatrix} a_2 c \theta_2 \\ a_2 s \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.16d)$$

La fuerza $[\mathbf{f}_{01}]_1$ y el momento $[\mathbf{n}_{01}]_1$ se evalúan entonces como

$$[\mathbf{f}_{01}]_1 = \mathbf{Q}_1 [\mathbf{f}_{01}]_2 = \begin{bmatrix} f_x c \theta_{12} - f_y s \theta_{12} \\ f_x s \theta_{12} + f_y c \theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.17a)$$

$$[\mathbf{n}_{01}]_1 \equiv \mathbf{Q}_1 [\mathbf{n}_{12} + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{f}_{12}]_2 = \mathbf{Q}_1 [\mathbf{n}_{12}]_2 + [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{f}_{01}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 f_y + a_1 f_x s \theta_2 + a_1 f_y c \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7.17b)$$

$$[\mathbf{a}_1]_1 \equiv \begin{bmatrix} a_1 c \theta_1 \\ a_1 s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.17c)$$

donde $\mathbf{Q}_1 [\mathbf{n}_{12}]_2$ tendrá la misma expresión que $[\mathbf{n}_{12}]_2$ de la ecuación (7.16c). Finalmente, los pares de torsión de la articulación para generar la fuerza \mathbf{f} en el efector final se obtienen por

$$\tau_1 = a_1 f_x s \theta_2 + (a_2 + a_1 c \theta_2) f_y; \text{ y } \tau_2 = a_2 f_y \quad (7.18)$$

Ejemplo 7.2

Estática de un brazo planar rotacional-prismático

En la figura 7.3 se presenta un brazo planar rotacional-prismático (RP) cuyo efector final está aplicando una fuerza \mathbf{f} . Su problema de estática se resuelve aquí, es decir, el par de torsión y la fuerza de la articulación se evalúan para ejercer la fuerza \mathbf{f} por el efector final.

Primero se evalúan las fuerzas en la articulación 2 a partir de la fuerza determinada del efector final, $\mathbf{f} \equiv [\mathbf{f}_{23}]_3$, es decir,

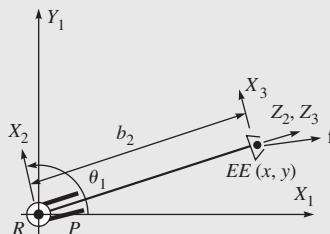


Figura 7.3 Brazo rotacional-prismático de dos eslabones aplicando una fuerza

$$[\mathbf{f}_{23}]_3 \equiv \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \\ f_z \end{bmatrix}$$

y $[\mathbf{f}_{12}]_3 = [\mathbf{f}_{23}]_3$ para $i = 2$. Por lo tanto,

$$[\mathbf{f}_{12}]_2 = \mathbf{Q}_2[\mathbf{f}_{12}]_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \\ f_z \end{bmatrix} \quad (7.19a)$$

donde la matriz de orientación \mathbf{Q}_2 es una matriz identidad, ya que los sistemas 2 y 3 son paralelos. Puesto que no se ejerce ningún momento externo, es decir, \mathbf{n}_{23} , por parte del efector final, el momento $[\mathbf{n}_{12}]_2$ se obtiene por

$$[\mathbf{n}_{12}]_2 = \mathbf{Q}_2[\mathbf{a}_2 \times \mathbf{f}_{23}]_3 = [\mathbf{a}_2]_2 \times [\mathbf{f}_{23}]_2 = [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{f}_{12}]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 f_x \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde

$$[\mathbf{a}_2]_2 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (7.19b)$$

La fuerza $[\mathbf{f}_{01}]_1$ y el momento $[\mathbf{n}_{01}]_1$ se evalúan entonces como

$$[\mathbf{f}_{01}]_1 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{f}_{01}]_2 = \begin{bmatrix} f_x c\theta_1 + f_z s\theta_1 \\ f_x s\theta_1 - f_z c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.20a)$$

$$[\mathbf{n}_{01}]_1 \equiv \mathbf{Q}_1[\mathbf{n}_{12} + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{f}_{12}]_2 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{n}_{12}]_2 + [\mathbf{a}_1 \times \mathbf{f}_{01}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 f_x \end{bmatrix} \quad (7.20b)$$

donde $[\mathbf{a}_1]_1 = \mathbf{0}$ porque el parámetro DH $a_1 = 0$ y la matriz \mathbf{Q}_1 se calculan usando los parámetros DH dados en la tabla 5.3 y la ecuación (5.52); es decir,

$$\mathbf{Q}_1 \equiv \begin{bmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ s\theta_1 & 0 & -c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20c)$$

Finalmente, el par torsional de articulación en la articulación rotacional τ_1 y la fuerza en la articulación prismática τ_2 están dados por

$$\tau_1 = b_2 f_x; \text{ y } \tau_2 = f_z \quad (7.21)$$

Ejemplo 7.3**Estática de un manipulador planar de 3 DOF**

La figura 7.4 muestra un manipulador planar de 3 eslabones con tres grados de libertad (DOF). Todas sus articulaciones son rotacionales o revolutas. Cuatro sistemas de referencia o de coordenadas con todos los ejes Z apuntando hacia fuera del papel se definen para cada eslabón de acuerdo con la convención DH señalada en el capítulo 5. Consideremos que fuerza y momento del efector final se obtienen por

$$[\mathbf{f}_{34}]_4 = [f_x, f_y, 0]^T$$

y

$$[\mathbf{n}_{34}]_4 = [0, 0, n_z]^T$$

respectivamente. También la aceleración debida a la gravedad \mathbf{g} apunta a lo largo de Y negativo y el centro de masa se sitúa en el punto central de cada eslabón. Luego se obtienen los momentos y fuerzas de reacción (o simplemente las reacciones) de la articulación. Observe que los parámetros DH del manipulador se dan en la tabla 5.2, donde las matrices de transformación que se necesitan para el análisis de cinemática se derivan en el ejemplo 6.3. Además, los vectores \mathbf{a}_i , \mathbf{r}_i y \mathbf{d}_i se dan como

$$[\mathbf{a}_i]_i \equiv \begin{bmatrix} a_i c \theta_i \\ a_i s \theta_i \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{r}_i]_{i+1} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$[\mathbf{d}_i]_i = [\mathbf{a}_i]_i - \mathbf{Q}_i [\mathbf{r}_i]_{i+1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_i c \theta_i \\ \frac{1}{2} a_i s \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

donde a_i para $i = 1, 2, 3$ es la longitud del i -ésimo eslabón. La ecuación (7.22) se escribe en el sistema de referencia 1 usando las matrices de rotación \mathbf{Q}_i para $i = 1, 2, 3$; es decir,

$$[\mathbf{a}_1]_1 = a_1 \begin{bmatrix} c \theta_1 \\ s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{d}_1]_1 = \frac{a_1}{2} \begin{bmatrix} c \theta_1 \\ s \theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.23a)$$

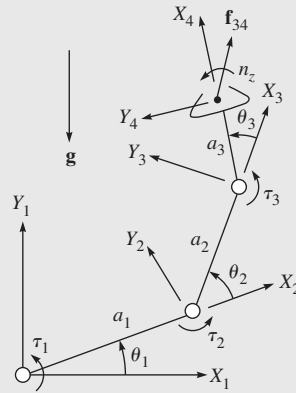


Figura 7.4 Manipulador planar de 3 eslabones y 3 DOF

$$[\mathbf{a}_2]_1 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{a}_2]_2 = a_2 \begin{bmatrix} c\theta_{12} \\ s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{d}_2]_1 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{d}_2]_2 = \frac{a_2}{2} \begin{bmatrix} c\theta_{12} \\ s\theta_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.23b)$$

$$[\mathbf{a}_3]_1 = \mathbf{Q}_{12}[\mathbf{a}_3]_3 = a_3 \begin{bmatrix} c\theta_{13} \\ s\theta_{13} \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{d}_3]_1 = \mathbf{Q}_{12}[\mathbf{d}_3]_3 = \frac{a_3}{2} \begin{bmatrix} c\theta_{13} \\ s\theta_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.23c)$$

donde $\mathbf{Q}_{12} \equiv \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$, $\theta_{12} \equiv \theta_1 + \theta_2$ y $\theta_{13} \equiv \theta_{12} + \theta_3$. Las ecuaciones (7.7a-b) se aplican entonces para calcular las fuerzas de reacción que se ejercen sobre el eslabón 3. Luego se procede a los eslabones 2 y 1 en secuencia. Para $i = 3$, la sustitución de \mathbf{a}_3 , \mathbf{d}_3 , \mathbf{f}_{34} y \mathbf{n}_{34} en las ecuaciones (7.7a-b) proporciona

$$[\mathbf{f}_{23}]_3 = \mathbf{Q}_3[\mathbf{f}_{34}]_4 - m_3\mathbf{Q}_{12}^T[\mathbf{g}]_1 = \begin{bmatrix} f_x c\theta_3 - f_y s\theta_3 + m_3 g s_{12} \\ f_x s\theta_3 + f_y c\theta_3 + m_3 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.24a)$$

$$[\mathbf{n}_{23}]_3 = \mathbf{Q}_3[\mathbf{n}_{34}]_4 + [\mathbf{a}_3]_3 \times \mathbf{Q}_3[\mathbf{f}_{34}]_4 - [\mathbf{d}_3]_3 \times m_3\mathbf{Q}_{12}^T[\mathbf{g}]_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{23z} \end{bmatrix} \quad (7.24b)$$

donde $[\mathbf{g}]_i \equiv [0, -g, 0]^T$; g es la aceleración debida a la gravedad e igual a 9.81 m/s². Además,

$$n_{23z} \equiv n_z + a_3 \left(f_y - \frac{1}{2} m_3 g c\theta_{13} \right) \quad (7.24c)$$

Para $i = 2$, \mathbf{f}_{23} y \mathbf{n}_{23} se utilizan entonces con el fin de obtener lo siguiente:

$$[\mathbf{f}_{12}]_2 = [\mathbf{f}_{23} - m_2\mathbf{g}]_2 = \mathbf{Q}_2[\mathbf{f}_{23}]_3 - m_2\mathbf{Q}_1^T[\mathbf{g}]_1 = \begin{bmatrix} f_x c\theta_{23} - f_y s\theta_{23} + m_{23} g s\theta_1 \\ f_x s\theta_{23} + f_y c\theta_{23} + m_{23} g c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.25a)$$

$$[\mathbf{n}_{12}]_2 = \mathbf{Q}_2[\mathbf{n}_{23}]_3 + [\mathbf{a}_2]_2 \times \mathbf{Q}_2[\mathbf{f}_{23}]_3 - [\mathbf{d}_2]_2 \times m_2\mathbf{Q}_1^T[\mathbf{g}]_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{12z} \end{bmatrix} \quad (7.25b)$$

donde $m_{12} \equiv m_1 + m_2$, y el término n_{12z} se obtiene por

$$n_{12z} \equiv n_z + a_3 \left(f_y - \frac{1}{2} m_3 g c\theta_{13} \right) + a_2 \left[f_x s\theta_3 + f_y c\theta_3 + \left(m_3 + \frac{1}{2} m_2 \right) g c\theta_{12} \right] \quad (7.25c)$$

En forma parecida se obtiene para $i = 1$ lo siguiente:

$$[\mathbf{f}_{01}]_1 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{f}_{12}]_2 - m_1[\mathbf{g}]_1 = \begin{bmatrix} f_x c\theta_{13} - f_y s\theta_{13} \\ f_x s\theta_{13} + f_y c\theta_{13} + m_{13}g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.26a)$$

$$[\mathbf{n}_{01}]_1 = \mathbf{Q}_1[\mathbf{n}_{12}]_2 + [\mathbf{a}_1]_1 \times \mathbf{Q}_1[\mathbf{f}_{12}]_2 - [\mathbf{d}_1]_1 \times m_1[\mathbf{g}]_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{01z} \end{bmatrix} \quad (7.26b)$$

donde $m_{13} \equiv m_1 + m_2 + m_3$, y el término n_{01z} se obtiene por

$$n_{01z} \equiv n_z + a_3 \left(f_y - \frac{1}{2} m_3 g c\theta_{13} \right) + a_2 \left[f_x s\theta_3 + f_y c\theta_3 + \left(m_3 + \frac{1}{2} m_2 \right) g c\theta_{12} \right] \\ + a_1 \left[f_x s\theta_{23} + f_y c\theta_{23} + \left(m_{23} + \frac{1}{2} m_1 \right) g c\theta_1 \right] \quad (7.26c)$$

Finalmente se aplica la ecuación (7.13) para calcular los pares torsionales de las articulaciones, los cuales se obtienen como

$$\tau_1 = [\mathbf{e}_1]_1^T [\mathbf{n}_{01}]_1 = n_{01z}; \quad \tau_2 = [\mathbf{e}_2]_2^T [\mathbf{n}_{12}]_2 = n_{12z}; \\ y \quad \tau_3 = [\mathbf{e}_3]_3^T [\mathbf{n}_{23}]_3 = n_{23z} \quad (7.27)$$

donde $[\mathbf{e}_i]_i \equiv [0, 0, 1]^T$ para $i = 1, 2, 3$ y n_{23z} , n_{12z} , n_{01z} se obtienen en las ecuaciones (7.24c)-(7.26c), respectivamente.

7.4



El papel del jacobiano en la estática

Los pares torsionales y fuerzas de articulaciones obtenidos en la situación estática balancean las fuerzas y momentos que actúan sobre el efector final. La relación entre estos dos conjuntos de fuerzas generalizadas, es decir, momentos y fuerzas sobre el efector final en el espacio cartesiano, y los pares torsionales y fuerzas de las articulaciones en el espacio de la articulación pueden derivarse utilizando el principio del trabajo virtual. Consideremos que

$\delta \mathbf{x}$ y $\delta \theta$ representan despla-

zamientos infinitesimales del efector final que incluyen, respectivamente, componentes lineales y rotacionales, y las articulaciones del manipulador. Estos desplazamientos se llaman virtuales si son consistentes con cualquier restricción que se imponga sobre el sistema. Por ejemplo, si el efector final está en contacto con una pared rígida, entonces los desplazamientos virtuales son tangentes a la pared.



Desplazamiento virtual

Un desplazamiento virtual es un supuesto cambio infinitesimal de coordenadas de un sistema que ocurre mientras el tiempo se mantiene constante. Se llama virtual en lugar de real, puesto que ningún desplazamiento real puede ocurrir fuera del paso del tiempo.



Trabajo virtual

El trabajo virtual en un sistema es el trabajo que resulta de las fuerzas reales que actúan por medio de un desplazamiento virtual.

Ahora bien, si \mathbf{w}_e denota la torcedura del efector final, entonces el trabajo virtual efectuado por él se obtiene por $\mathbf{w}_e^T \delta \mathbf{x}$. De manera parecida, si $\boldsymbol{\tau}$ denota el vector de todos los pares torsionales y fuerzas de la articulación que actúan en las articulaciones para producir la llave de torsión \mathbf{w}_e , entonces el trabajo virtual definido en el espacio de la articulación se obtiene por $\boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta}$. Observe que cuando el manipulador robótico está en equilibrio, el principio del trabajo virtual señala que

$$\mathbf{w}_e^T \delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta} \quad (7.28)$$

donde el desplazamiento virtual $\delta \mathbf{x}$ y $\delta \boldsymbol{\theta}$ puede relacionarse a partir de la definición del jacobiano que se introdujo en el capítulo anterior, que es

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \delta \boldsymbol{\theta} \quad (7.29)$$

La sustitución de la ecuación (7.29) en la ecuación (7.28) proporciona

$$\mathbf{w}_e^T \mathbf{J} \delta \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}^T \delta \boldsymbol{\theta} \quad (7.30)$$

La ecuación arriba mencionada es válida para todos los $\delta \boldsymbol{\theta}$, y, por ende, lo siguiente es válido:

$$\mathbf{w}_e^T \mathbf{J} = \boldsymbol{\tau}^T \quad (7.31)$$

Si se transponen ambos lados de la ecuación (7.31a), se obtiene la relación entre la torcedura del efector final y los pares de torsión o torsionales y fuerzas de articulaciones, es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{w}_e \quad (7.32)$$

Aquí cabe señalar que si la matriz Jacobiana \mathbf{J} de la ecuación (7.31) o de la (7.32) es singular, entonces el efector final no puede ejercer fuerzas estáticas como se desea.

Ejemplo 7.4

El jacobiano en la estática de un brazo planar de dos eslabones

Se derivan dos relaciones para los pares de torsión de articulación del brazo de manipulador planar de dos eslabones en el ejemplo 7.1, es decir, en la ecuación (7.18). Entonces se reordenan como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{f} \quad (7.33a)$$

donde $\boldsymbol{\tau} \equiv [\tau_1, \tau_2]^T$, $\mathbf{f} \equiv [f_x, f_y, 0]^T$

donde la matriz \mathbf{J} de 3×3 se obtiene por

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} a_1 s \theta_2 & 0 \\ a_1 c \theta_2 + a_2 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.33b)$$

Los renglones no cero de la matriz \mathbf{J} de la ecuación (7.33b), sin embargo, no son lo mismo que la matriz Jacobiana para el brazo planar de 2 eslabones que se derivó en la ecuación (6.51b) o (6.69). Esto es así por las siguientes razones: la matriz \mathbf{J} de la ecuación (7.33b) se representa en el sistema de referencia 3 como los valores de la fuerza \mathbf{f} del efector final, mientras que \mathbf{J} de la ecuación (6.69) se representa en el sistema fijo, es decir, en el sistema de referencia 1. De hecho, $[\mathbf{J}]_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 [\mathbf{J}]_3$

es decir,

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{J}]_1 &\equiv \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 s\theta_2 & 0 \\ a_1 c\theta_2 + a_2 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -a_1 s\theta_1 - a_2 s\theta_{12} & -a_2 s\theta_{12} \\ a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} & a_2 c\theta_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.34)
 \end{aligned}$$

donde \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 son las matrices de rotación de 3×3 , mientras que $[\mathbf{J}]_1$ y $[\mathbf{J}]_3$ son las representaciones del mismo jacobiano en los sistemas 1 y 3. Ahora bien, los renglones diferentes a cero de la ecuación (7.34) coinciden con la matriz que se da en la ecuación (6.51b) o (6.69).

Ejemplo 7.5

El jacobiano en la estática del manipulador planar de 3 DOF

Observe que las expresiones para los pares torsionales de articulación, ecuación (7.27), pueden disponerse como sigue:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{w}_e + \mathbf{A}_g \mathbf{m}_g \quad (7.35a)$$

donde los vectores de 3, 6 y 3 dimensiones $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{w}_e y \mathbf{m}_g se definen como

$$\boldsymbol{\tau} \equiv [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T; \mathbf{w}_e \equiv [0, 0, n_z, f_x, f_y, 0]^T; \mathbf{m}_g \equiv [m_1 g, m_2 g, m_3 g]^T \quad (7.35b)$$

mientras que la matriz \mathbf{J} de 6×3 y la matriz \mathbf{A}_g de 3×3 se obtienen por

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ a_2 s\theta_3 + a_1 s\theta_{23} & a_2 s\theta_3 & 0 \\ a_3 + a_2 c\theta_3 + a_1 c\theta_{23} & a_3 + a_2 c\theta_3 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.35c)$$

y

$$\mathbf{A}_g \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{2} a_1 c\theta_1 & a_1 c\theta_1 + \frac{1}{2} a_2 c\theta_{12} & a_1 c\theta_1 + a_2 c\theta_{12} + \frac{1}{2} a_3 c\theta_{13} \\ 0 & \frac{1}{2} a_2 c\theta_{12} & a_2 c\theta_{12} + \frac{1}{2} a_3 c\theta_{13} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} a_3 c\theta_{13} \end{bmatrix} \quad (7.35d)$$

Es importante observar dos puntos en la ecuación (7.35a). Primero, a diferencia de la ecuación (7.31b) o (7.33a), la expresión para los pares de torsión de articulación contiene un término adicional $\mathbf{A}_g \mathbf{m}_g$ aunado a $\mathbf{J}^T \mathbf{w}_e$. Segundo, los renglones que son diferentes de cero de la matriz Jacobiana de la ecuación (7.35c) no son iguales a los que se

obtienen en la ecuación (6.53). En realidad, la ecuación (7.31b) se obtiene sin tomar en consideración los pesos de los eslabones. Por lo tanto, no aparece ningún término asociado con dichos pesos. Sin embargo, éstos podrán convertirse en fuerzas y momentos equivalentes del efector final, y podrá reescribirse la ecuación (7.31b), de donde se obtendría un término adicional como en la ecuación (7.35a). En segundo lugar, como se señaló en el ejemplo 7.4, la expresión para la matriz Jacobiana, ecuación (7.35c), se representa en el sistema 4, puesto que la llave de torsión \mathbf{w}_e se conoce en el sistema 4, mientras que la expresión \mathbf{J} de la ecuación (6.53) es la representación en el sistema 1. En efecto,

$$[\mathbf{J}]_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_3 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} [\mathbf{J}]_4 \quad (7.36)$$

donde \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 y \mathbf{Q}_3 son las matrices de rotación de 3×3 , y \mathbf{O} representa la matriz cero de 3×3 . Además, $[\mathbf{J}]_1$ y $[\mathbf{J}]_4$ son las representaciones del mismo jacobiano en los sistemas 1 y 4. Entonces puede demostrarse que los renglones diferentes de cero de $[\mathbf{J}]_1$ son exactamente las mismas que en la ecuación (6.53).

Ejemplo 7.6

Pares de torsión estáticos en el brazo articulado antropomórfico

En la parte del brazo de la figura 6.4, puede verse un brazo articulado antropomórfico para el cual se obtiene la matriz Jacobiana en la ecuación (6.54c). Si el momento \mathbf{n}_e y la fuerza \mathbf{f}_e actúan sobre el efector final que se conoce en el propio sistema del efector final, entonces los pares de torsión que se requieren en las tres articulaciones del brazo pueden calcularse usando la ecuación (7.28), en donde no son considerados los pesos de eslabones, es decir,

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{Q}} \mathbf{w}_e$$

donde $\boldsymbol{\tau} \equiv [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T$; $\mathbf{w}_e \equiv [\mathbf{w}_{34}]_4 \equiv [n_x, n_y, n_z, f_x, f_y, f_z]^T$ (7.37a)

y la matriz de 6×6 , $\hat{\mathbf{Q}} \equiv \text{diag}[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}]$, donde $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_3$ transforma la representación de un vector desde el sistema del efector final, es decir, el sistema 4, al sistema fijo, es decir, el sistema 1. Esto puede extraerse de la ecuación (6.11) como

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.37b)$$

Además, la matriz Jacobiana de 6×3 se da en la ecuación (6.54c) que se representa en el sistema 1. El resultado de la ecuación (7.33a) para los pares de torsión de articulaciones puede obtenerse mediante el uso de un programa MATLAB que se presenta a continuación.

```
%Statics torques in the Articulated Arm
syms a1 a2 a3 th1 th2 th3 nx ny nz fx fy fz;
```

```
%For Articulated 3-DOF Arm, initital values are
th1=0; th2=0; th3=0; sth1=0;cth1=1;sth2=0;cth2=1;sth3=0;cth3=1;
sth23=0;cth23=1;
qm = [cth1*cth23, -cth1*sth23, -sth1; sth1*cth23, -sth1*sth23,
cth1; -sth23, -cth23, 0];
ne_1 = qm*[nx;ny;nz];
fe_1 = qm*[fx;fy;fz];
jacm = [0,-sth1,-sth1;0,cth1,cth1;1,0,0;
-sth1*(a2*cth2+a3*cth23),-cth1*(a2*sth2+a3*sth23),-a3*cth1*sth23;
cth1*(a2*cth2+a3*cth23), -sth1*(a2*sth2+a3*sth23),-a1*sth1*sth23;
0,-(a2*cth2+a3*cth23),-a3*cth23];
%Joint torques
tau=jacm.*[ne_1;fe_1]
```

Para la configuración inicial, es decir, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, la salida del programa MATLAB puede chequearse como sigue:

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \begin{bmatrix} -n_y + (a_2 + a_3)f_z \\ -n_z + (a_2 + a_3)f_y \\ n_z + a_3f_y \end{bmatrix} \quad (7.37c)$$

lo que fácilmente puede verificarse según la figura 5.29.

7.5



Elipsoide de fuerza

Parecido a la transformación de velocidades, la transformación de fuerzas para robots con un sólo tipo de articulación y para un tipo de tarea puede ser caracterizada por una comparación de la fuerza del efector final producida por un par unitario torsional de articulación. La sustitución de la ecuación (7.32) en la expresión $\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} = 1$ proporciona

$$\mathbf{w}_e^T \mathbf{J} \mathbf{J}^T \mathbf{w}_e = 1 \quad (7.38)$$

En una configuración de robot determinada, la ecuación (7.38) representa el elipsoide de seis dimensiones para un robot de 6 DOF. Puesto que el producto $\mathbf{J} \mathbf{J}^T$ es una matriz simétrica semidefinida positiva, sus vectores propios son ortogonales. Los ejes principales del elipsoide coinciden con los vectores propios de $\mathbf{J} \mathbf{J}^T$, y sus longitudes son iguales a las recíprocas de las raíces cuadradas de los valores propios. Puesto que la matriz Jacobiana depende de la configuración, el elipsoide de fuerza también depende de la configuración. Conforme el efector final se mueve de una ubicación a otra, la forma y orientación del elipsoide de fuerza también cambiarán por consecuencia. Entre más se acerca el elipsoide a una esfera, mejor serán las características de transmisión. Se dice que esta transformación es isotrópica cuando los ejes principales son de iguales longitudes. En un punto isotrópico, una esfera unitaria de n dimensiones en el espacio de un par de torsión de la articulación se traza sobre una esfera de 6 dimensiones en el espacio de fuerza del efector final. Por otro lado, en un punto singular, una



Isotrópico

Se trata de una palabra que se usa en álgebra lineal para identificar el número uno como condición en una matriz.

esfera unitaria de n dimensiones en el espacio torsional de la articulación se traza sobre un cilindro de 6 dimensiones en el espacio de fuerza del efector final. De este modo, la ventaja mecánica del manipulador se torna infinitamente grande en alguna dirección.

RESUMEN

En este capítulo se derivan los pares de torsión que se requieren para ejercer una fuerza y un momento por el efector final mientras el robot está en equilibrio estático. Se demuestra cómo el jacobiano de velocidad entra en consideración en el análisis estático. Finalmente, se da una interpretación física de la matriz Jacobiana en el dominio de la fuerza.



EJERCICIOS

- 7.1 ¿Qué es un equilibrio estático en la robótica?
- 7.2 ¿Cómo se relacionan las matrices de propagación de torsión y de llave de torsión?
- 7.3 Define el desplazamiento y el trabajo virtuales.
- 7.4 ¿Cómo entra en consideración la matriz del jacobiano de velocidad en el análisis estático?
- 7.5 ¿Qué le pasaría a las fuerzas del efector final si se aplicaran pares de torsión de articulación mientras el jacobiano asociado fuese singular?
- 7.6 Extraiga la matriz jacobiana para el brazo planar rotacional-prismático (RP) del ejemplo 7.2.
- 7.7 Busque la expresión de la matriz Jacobiana arriba mencionada en el sistema fijo.
- 7.8 ¿Por qué es importante el concepto de elipsoide de fuerza en el estudio de la estática?
- 7.9 ¿Qué pasa si uno de los ejes principales del elipsoide de fuerza desaparece?
- 7.10 Derive las expresiones del par de torsión y fuerza para el brazo planar prismático-rotacional (PR) que se presenta en la figura 5.26 si se aplica la fuerza \mathbf{f}_e del efector final y no se consideran los pesos de eslabones.



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 7.11 Verifique los resultados del ejercicio 7.7 usando un programa MATLAB.
- 7.12 Verifique los resultados del ejercicio 7.10.
- 7.13 Busque las expresiones de par torsional para el robot SCARA que se presenta en la figura 5.28.
- 7.14 Averigüe los pares torsionales para el brazo antropomórfico del ejemplo 7.6, mientras $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y $\theta_3 = \pi/2$.
- 7.15 ¿Cuáles son los valores del par torsional para la muñeca esférica que se muestra en la figura 5.30 si se aplica solamente un momento \mathbf{n}_e en su efector final?



Capítulo

8

Dinámica

En este capítulo se estudiarán las ecuaciones de movimiento para un robot, es decir, la manera en la que se produce el movimiento del robot debido a los pares de torsión y a las fuerzas que se aplican a las articulaciones mediante los actuadores. Se desarrollará un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de un robot, lo que también se llama el modelo dinámico del robot. Este desarrollo es importante en varios aspectos:

- i) Un modelo dinámico puede usarse para desarrollar las estrategias apropiadas de control. Un controlador sofisticado requiere del uso de un modelo dinámico realístico para lograr el desempeño óptimo del robot en operaciones de alta velocidad. Algunos métodos de control dependen directamente de un modelo dinámico con el fin de calcular los pares de torsión y las fuerzas requeridas en los actuadores para seguir la trayectoria deseada.
- ii) El modelo dinámico puede usarse para la simulación por computadora de un sistema robótico. Cuando se construye un sistema robótico, es posible pronosticar cómo se va a comportar, mediante el estudio del comportamiento del modelo en varias condiciones de operación.
- iii) El análisis dinámico de un robot proporciona todas las fuerzas y momentos de reacción que se necesitan para el diseño y la determinación de los tamaños de eslabones, cojinetes y actuadores.




Dinámica

La dinámica es el estudio de las fuerzas y momentos que causan el movimiento en un sistema.

Conociendo los parámetros físicos de cualquier robot, uno normalmente desea resolver problemas relacionados con su dinámica: la dinámica inversa y la dinámica directa. El problema de la dinámica inversa es encontrar los pares de torsión y/o las fuerzas de actuadores que son necesarios para generar la trayectoria deseada del robot. Esta formulación de la di-

námica es útil para el problema del control del robot. El segundo problema, el de la dinámica directa, es encontrar la respuesta de un brazo de robot respecto a algunos pares de torsión o fuerzas en las articulaciones. Es decir, dados los pares de torsión o fuerzas de las articulaciones, tiene que computarse el movimiento resultante del robot como función del tiempo. Esto no es tan crítico como el problema de la dinámica inversa, ya que se usa principalmente para la simulación en computadora de un robot, lo que solamente muestra cómo funcionará éste cuando se está construyendo. Por otro lado, un modelo eficiente de dinámica inversa se vuelve sumamente importante para el control de robots en tiempo real.

Las ecuaciones de dinámica del movimiento pueden formularse por medio de varios métodos. Uno consiste en aplicar las ecuaciones de movimiento de Lagrange. La ventaja de usar este planteamiento es que elimina las fuerzas de restricción de las ecuaciones de dinámica de movimiento si las coordenadas generalizadas se eligen en forma independiente. Esta eliminación



Planteamiento vectorial vs. planteamiento de energía

Las ecuaciones de Newton-Euler se conocen como planteamiento vectorial, mientras que las de Euler-Lagrange se sustentan en un planteamiento basado en la energía.

hace que sea adecuado para el control y para la simulación de movimiento. Sin embargo, dichas fuerzas de restricción eliminadas pueden recuperarse usando multiplicadores de Lagrange si se han de usar para los propósitos de diseño. Otro planteamiento es la aplicación de las leyes de Newton y Euler para movimientos lineales y rotacionales, respectivamente. Escribir las ecuaciones de movimiento de Newton y Euler para cada eslabón del robot da como resultado un sistema de ecuaciones que contiene las fuerzas aplicadas y las

fuerzas de restricciones. Estas ecuaciones pueden entonces resolverse simultáneamente para todas las fuerzas, incluidas las que son resultado de las restricciones que no contribuyen al movimiento de los eslabones, pero que se requieren para el diseño de los mismos. Si alguien sólo se interesa en la simulación del movimiento, las fuerzas de restricción pueden eliminarse usando las relaciones geométricas y cinemáticas que describen la naturaleza de las restricciones. También existen metodologías alternativas para resolver la dinámica de robots, por ejemplo, el principio de D'Alembert, las ecuaciones de movimiento de Kane y las que se basan en los complementos ortogonales de las matrices de restricción de velocidad. Uno de estos métodos basados en los complementos ortogonales, las matrices de complemento ortogonal natural desacoplado (DeNOC) (Saha, 1999), se presentará en el capítulo 9.

8.1



Propiedades de inercia

En el estudio de la dinámica, propiedades de inercia tales como centro de masas, momento de inercia, tensor de inercia, etc., asociados con la masa o la inercia de los eslabones individuales que aparecen en las ecuaciones dinámicas de movimiento de un robot, afectarán el comportamiento de este último. Para estudiar la dinámica de un robot, es importante conocer estas diferentes propiedades de inercia.

8.1.1 Centro de masa

La masa es la cantidad de materia que posee un cuerpo de una forma y tamaño determinados. En la figura 8.1, F es un sistema de coordenadas cartesianas, dV es un diferencial de volu-

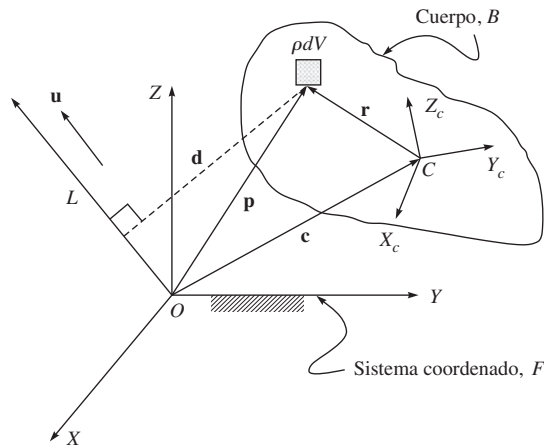


Figura 8.1 Momentos de masa

men del material B , ρ es la densidad material y \mathbf{p} es el vector de posición del diferencial de masa ρdV desde el origen del sistema F , es decir, O . El centro de masa del cuerpo B se define entonces como el punto C , de tal modo que su vector de posición denotado por \mathbf{c} es

$$\mathbf{c} \equiv \frac{1}{m} \int_V \mathbf{p} \rho dV \quad (8.1a)$$

donde $m \equiv \int_V \rho dV$ es la masa total del cuerpo B . Ade-

más, si como se presenta en la figura 8.1, $\mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{r}$ se sustituye en la ecuación (8.1a), se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{c} \equiv \frac{1}{m} \int_V \mathbf{c} \rho dV + \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho dV \quad (8.1b)$$

Puesto que el vector \mathbf{c} es independiente del volumen V del cuerpo B , puede extraerse del signo integral.

Además, $\int_V \rho dV = m$. Por lo tanto, puede reescribirse la ecuación (8.1b) como

$$\mathbf{c} \equiv \mathbf{c} + \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho dV \quad (8.1c)$$

lo que inmediatamente da:

$$\int_V \mathbf{r} \rho dV = 0 \quad (8.1d)$$



Masa vs. momento de inercia

El momento de inercia de un objeto es una propiedad de su masa y de su forma geométrica. La masa influye en forma directa en un movimiento lineal, mientras que afecta el movimiento rotacional indirectamente a través del momento de inercia.

Esta propiedad, asociada con el centro de masas de un cuerpo rígido, se utilizará más adelante, en la subsección 8.3.2, para la derivación del momento angular.

8.1.2 Momento de inercia y tensor de inercia

En la figura 8.1, suponga que \mathbf{u} es el vector unitario paralelo a la línea L , pasando a través de un punto de referencia, por ejemplo, el origen O del sistema F . Además, si d es la distancia del diferencial de masa ρdV del cuerpo B desde la línea L , entonces el momento de inercia del cuerpo B respecto a la línea L se determina por un escalar positivo, es decir,

$$I_{uu} = \int_V d^2 \rho dV = \int_V \mathbf{d}^T \mathbf{d} \rho dV \quad (8.2)$$

donde el vector \mathbf{d} es ortogonal al vector unitario \mathbf{u} , como se indica en la figura 8.1, y d es su magnitud, que es igual a

$$d = |\mathbf{p} \times \mathbf{u}| \quad (8.2)$$

La sustitución de la ecuación (8.3) en la ecuación (8.2) proporciona

$$I_{uu} = \int_V |\mathbf{p} \times \mathbf{u}|^2 \rho dV = \int_V (\mathbf{p} \times \mathbf{u})^T (\mathbf{p} \times \mathbf{u}) \rho dV = \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{u} \quad (8.4)$$

donde

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{u})^T (\mathbf{p} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{p}^T \mathbf{p})(\mathbf{u}^T \mathbf{u}) - (\mathbf{p}^T \mathbf{u})^2 = \mathbf{u}^T [(\mathbf{p}^T \mathbf{p}) \mathbf{1} - \mathbf{p} \mathbf{p}^T] \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz de identidad de 3×3 . Por tanto, la matriz \mathbf{I} de 3×3 de la ecuación (8.4) se determina por

$$\mathbf{I} = \int_V [(\mathbf{p}^T \mathbf{p}) \mathbf{1} - \mathbf{p} \mathbf{p}^T] \rho dV \quad (8.5)$$

El término \mathbf{I} de la ecuación se denomina *tensor de inercia* o *matriz de inercia* del cuerpo B alrededor del punto O . El tensor de inercia \mathbf{I} es simétrico y un positivo-definitivo que también puede escribirse como

$$\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

En la ecuación (8.6), la expresión para los elementos de \mathbf{I} se determinan por

$$I_{xx} \equiv \int_V (y^2 + z^2) \rho dV, I_{yy} \equiv \int_V (z^2 + x^2) \rho dV, I_{zz} \equiv \int_V (x^2 + y^2) \rho dV \quad (8.7a)$$

$$I_{xy} = I_{yx} \equiv - \int_V xy \rho dV, I_{yz} = I_{zy} \equiv - \int_V yz \rho dV, I_{xz} = I_{zx} \equiv - \int_V xz \rho dV \quad (8.7b)$$

donde x , y y z representan las coordenadas del diferencial de masa ρdV respecto al origen del sistema F , es decir, O . Además, los subíndices xx , yy y zz denotan los ejes de coordenadas X , Y y Z del sistema F , cuyo origen se ubica en O respecto a lo cual se calculan los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} e I_{zz} y el producto de las inercias I_{xy} , I_{yz} , I_{xz} . Los valores numéricos de estos elementos dependen de la selección de un punto de referencia y del sistema de coorde-

nadas en este punto respecto al cual están calculadas. Mientras que los términos de inercia para un cuerpo rígido de geometría sencilla se computan mediante la integración volumétrica dada por las ecuaciones (8.7 a-b), los mismos tienen que determinarse en forma experimental para los objetos de formas irregulares.

Finalmente, observe que en la ecuación (8.2), la distancia d o el vector \mathbf{d} es independiente del volumen V del cuerpo B , como se ha visto para el vector \mathbf{c} según la ecuación (8.1b). Por lo tanto, el término d puede extraerse del signo integral. Como resultado, la ecuación (8.2) se reescribe como

$$I_{uu} = d^2 \int_V \rho dV = md^2 \quad (8.8)$$

donde el escalar d tiene una expresión, en términos de los vectores \mathbf{p} y \mathbf{u} , como $d \equiv |\mathbf{p} \times \mathbf{u}|$, que es una cantidad real no negativa. Al escalar d se refiere como el *radio de giro* del cuerpo B respecto a la línea L .



El tensor y sus órdenes

En la física, los tensores caracterizan las propiedades de un sistema físico. Por ejemplo, un tensor del orden cero es un escalar que representa la masa de un objeto. Un tensor del orden uno es un vector que podría representar la posición de un punto, mientras que un tensor de segundo orden se representa por una matriz de 3×3 que denota, por ejemplo, la llamada matriz (o tensor) de inercia de un objeto.

8.1.3 Teorema de los ejes paralelos

Suponga que $C(x_c, y_c, z_c)$ es el sistema de coordenadas cartesianas adjunto al centro de masa C de un cuerpo rígido B con sus ejes de coordenadas paralelos a los de F , como se muestra en la figura 8.1. Entonces puede demostrarse que

$$I_{xx} = I_{xx}^c + m(y_c^2 + z_c^2), I_{yy} = I_{yy}^c + m(z_c^2 + x_c^2), I_{zz} = I_{zz}^c + m(x_c^2 + y_c^2), \quad (8.9a)$$

$$I_{xy} = I_{xy}^c - mx_c y_c, I_{yz} = I_{yz}^c - my_c z_c, I_{zx} = I_{zx}^c - mz_c x_c \quad (8.9b)$$

donde x_c, y_c y z_c son las coordenadas del centro de masa en el sistema F , e $I_{xx}^c, I_{yy}^c, I_{zz}^c$ e $I_{xy}^c, I_{yz}^c, I_{zx}^c$ son los momentos de inercias y los productos de inercias respecto al centro de masa C , respectivamente. Las ecuaciones (8.9 a-b) se llaman teorema de los ejes paralelos.

8.1.4 Teorema de los ejes perpendiculares

Para un objeto plano, por ejemplo, el disco delgado que se presenta en la figura 8.2, el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular al plano I_{zz} es la suma de los momentos de inercia de dos ejes perpendiculares a través del mismo punto en el plano del objeto I_{xx} e I_{yy} , es decir,

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (8.10)$$

La utilidad de este teorema va más allá del cálculo de los momentos de objetos estrictamente planos. Se trata de una herramienta valiosa para la acumulación de los momentos de inercia de objetos tridimensionales, tales

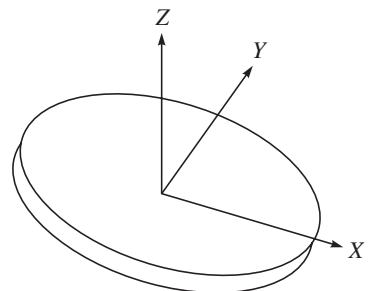


Figura 8.2 Un disco delgado

como cilindros, mediante su división en discos planos, y en la suma de los momentos de inercia de los discos compuestos, como se hace en el ejemplo 8.3.

8.1.5 Momentos principales de inercia

Se demuestra que la matriz de inercia depende de la selección de un punto de referencia y de la orientación del sistema de referencia. Resulta que para una determinada orientación de un sistema de referencia, los productos de inercia desaparecerán. Estos ejes especiales de coordenadas se llaman *ejes principales* y los momentos de inercia correspondientes se llaman *momentos principales de inercia*. Vamos a suponer que \mathbf{I} es la matriz de inercia de un cuerpo rígido B alrededor de un punto O , expresado en el sistema de referencia F . También supongamos que L es el eje principal que pasa a través del origen O y que apunta en la dirección de \mathbf{u} . Por definición, \mathbf{u} es paralelo al vector del segundo momento de B alrededor de L . Esto quiere decir

$$\mathbf{I}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad (8.11)$$

La ecuación (8.11) contiene tres ecuaciones homogéneas lineales con tres incógnitas, es decir, u_x , u_y y u_z . La condición para la existencia de soluciones no triviales es

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - \lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8.12)$$

Por lo tanto, los valores y vectores propios de la matriz de inercia \mathbf{I} corresponden a los momentos principales de inercia y a las direcciones de los ejes principales, respectivamente. Por lo general, en correspondencia con cada punto de referencia, existe por lo menos un conjunto de tres ejes principales de inercia mutuamente perpendiculares. Algunos hechos adicionales sobre la matriz de inercia son los siguientes:

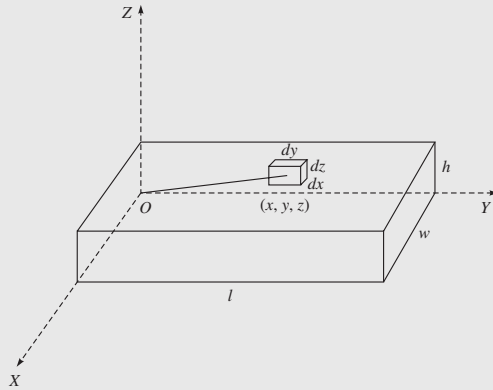
- i) Si dos ejes del sistema de referencia forman un plano de simetría para la distribución de la masa del cuerpo, los productos de inercia que tienen un índice como la coordenada, que es normal al plano de simetría, serán cero.
- ii) Los momentos de inercia siempre tienen que ser positivos. Los productos de inercia pueden tener cualquier signo.
- iii) La suma de los tres momentos de inercia son invariantes bajo cambios de orientación en el sistema de referencia.
- iv) La suma de cualquiera de dos momentos de inercia es mayor que el tercero, es decir, $I_{xx} + I_{yy} > I_{zz}$.

Ejemplo 8.1

El tensor de inercia de una caja

El tensor de inercia para el cuerpo rectangular de densidad uniforme ρ respecto al sistema de coordenadas rectangulares en una esquina, como se muestra en la figura 8.3, se obtiene como sigue. Primero debe computarse I_{xx} . Usando el elemento de volumen en (x, y, z) ,

$$dV = dx \, dy \, dz$$

**Figura 8.3** Un cuerpo de densidad uniforme

se obtiene

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int_0^h \int_0^l \int_0^w (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \int_0^h \int_0^l (y^2 + z^2) w \rho dy dz = \int_0^h \left(\frac{l^3}{3} + z^2 l \right) w \rho dz \\
 &= \left(\frac{hl^3 w}{3} + \frac{h^3 lw}{3} \right) \rho = \frac{hlw\rho}{3} (l^2 + h^2) = \frac{m}{3} (l^2 + h^2)
 \end{aligned} \quad (8.13)$$

donde $m \equiv hlw\rho$ es la masa total del cuerpo. De manera similar, puede obtenerse I_{yy} e I_{zz} por inspección, es decir,

$$I_{yy} = \frac{m}{3} (w^2 + h^2); \quad y \quad I_{zz} = \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \quad (8.14)$$

después I_{xy} se computa como

$$I_{xy} = - \int_0^h \int_0^l \int_0^w xy \rho dx dy dz = - \int_0^h \int_0^l \frac{w^2}{2} y \rho dy dz = - \int_0^h \frac{w^2 l^2}{4} \rho dz = - \frac{m}{4} wl \quad (8.15)$$

Permutando los términos, se obtiene

$$I_{xz} = - \frac{m}{4} hw; \quad y \quad I_{yz} = - \frac{m}{4} hl \quad (8.16)$$

Por lo tanto, el tensor de inercia para este objeto es

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} (l^2 + h^2) & -\frac{m}{4} wl & -\frac{m}{4} hw \\ -\frac{m}{4} wl & \frac{m}{3} (w^2 + h^2) & -\frac{m}{4} hl \\ -\frac{m}{4} hw & -\frac{m}{4} hl & \frac{m}{3} (l^2 + w^2) \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

Observe que el tensor 3×3 , representado por la matriz \mathbf{I} de la ecuación (8.17), es simétrico.

Ejemplo 8.2**El tensor de inercia de una caja alrededor de su centro de masa**

El tensor de inercia para el mismo cuerpo sólido que se describe en el ejemplo 8.1 se obtiene con un sistema de coordenadas cuyo origen está en el centro de masa C del cuerpo. Observe aquí que puede aplicarse el teorema de los ejes paralelos ecuación (8.9), donde $x_c = w/2$, $y_c = l/2$ y $z_c = h/2$. Entonces,

$$I_{zz}^c = \frac{m}{12}(w^2 + l^2), \text{ y } I_{xy}^c = 0 \quad (8.18a)$$

Los otros elementos se encuentran por simetría. El tensor de inercia resultante escrito en el sistema ubicado en el centro de masa C se determina por

$$\mathbf{I}^C = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} h^2 + l^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 + h^2 & 0 \\ 0 & 0 & l^2 + w^2 \end{bmatrix} \quad (8.18b)$$

Puesto que el resultado es una diagonal, el sistema en C debe representar los ejes principales de este cuerpo. Para una barra delgada, w y h son mucho más pequeños que l . Por lo tanto, su tensor de inercia puede calcularse de manera aproximada por

$$\mathbf{I}^C = \frac{ml^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.19a)$$

Ejemplo 8.3**El tensor de inercia de un cilindro**

Un cilindro de diámetro d y longitud l , como se presenta en la figura 8.4a), es una forma muy común que se utiliza como eslabón de robots. De manera similar a la ecuación (8.7a), el componente I_{xx} del cilindro se computa como

$$I_{xx} = \int_V r^2 \rho dV = \int_0^{d/2} r^2 \rho l 2\pi r dr = \frac{d^4}{32} \rho l \pi = \frac{md^2}{8} \quad (8.20)$$

donde r es la distancia radial desde el eje del cilindro, es decir, el eje X , donde se encuentra el volumen elemental del cilindro. Además, $m = \rho l \pi d^2/4$ es la masa total

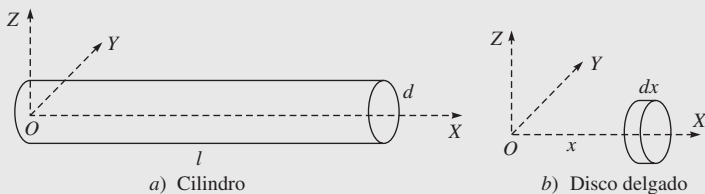


Figura 8.4 Un objeto cilíndrico

del cilindro. La expresión para el momento de inercia de un cilindro alrededor de los ejes Y o Z , es decir, con un diámetro en su extremo, puede obtenerse cuando se usan tanto el teorema de los ejes paralelos como el de los ejes perpendiculares. Este planteamiento incluye encontrar una expresión para un disco delgado a una distancia x desde el eje Y o z , como se muestra en la figura 8.3b), y la suma de todos estos discos. Para un disco infinitésimamente delgado con un espesor dx , el momento de inercia alrededor del eje central, es decir, el eje X , se determina por medio de la ecuación (8.20), como

$$dI_{xx} = \frac{1}{8} d^2 dm \quad (8.21a)$$

además según el teorema de los ejes perpendiculares,

$$dI_{xx} = dI_{yy} + dI_{zz} \quad (8.21b)$$

Puesto que el momento de inercia alrededor de los ejes Y y Z debe ser igual por simetría, se concluye que

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} dI_{xx} = \frac{1}{16} d^2 dm \quad (8.21c)$$

Obtener el momento de inercia del cilindro completo alrededor de un diámetro en su extremo involucra sumar a través de un número infinito de discos delgados a diferentes distancias de este eje, es decir, Y o Z . Esto implica una integral de $x = 0$ a $x = l$. Para cualquier disco dado a la distancia x , por ejemplo, desde el eje Y , cuando se usa el teorema de los ejes paralelos se obtiene el momento de inercia alrededor del eje Y , es decir,

$$dI_{yy} = \frac{1}{16} d^2 dm + x^2 dm \quad (8.21d)$$

Ahora bien, expresando el elemento de masa dm en términos de x , puede integrarse a lo largo de la longitud del cilindro, es decir,

$$I_{yy} = \int_0^l dI_{yy} = \frac{1}{16} md^2 + \frac{1}{3} ml^2 \quad (8.21e)$$

La plausibilidad de lo arriba expuesto puede verse si se observa que la ecuación (8.21e) es la suma de las expresiones para un disco delgado alrededor de un diámetro más la expresión para una barra delgada alrededor de su extremo. En el caso restrictivo, cuando $d = 0$, se obtiene la expresión de la barra delgada, y cuando $l = 0$, se obtiene la expresión para el disco. Por lo tanto, el tensor de inercia \mathbf{I} de 3×3 para el cilindro se obtiene mediante

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{md^2}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{md^2}{16} + \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{md^2}{16} + \frac{ml^2}{3} \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

donde puede comprobarse que el producto de los términos de inercia I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} es cero, ya que el cilindro se coloca en forma simétrica alrededor de los ejes Y y Z .

8.2



Formulación de Euler-Lagrange

El modelo dinámico de un robot puede derivarse de manera sistemática por medio del concepto de coordenadas generalizadas y de una función escalar llamada lagrangiano, que se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial del sistema mecánico en cuestión, es decir,

$$L = T - U \quad (8.23)$$

donde L denota la función lagrangiana, y T y U son la energía total cinética y potencial del sistema. Observe que la energía cinética depende tanto de la configuración, es decir, posición y orientación, como de la velocidad de los eslabones de un sistema robótico, mientras que la energía potencial depende únicamente de la configuración de los eslabones. Las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se obtienen entonces por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \phi_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (8.24)$$

donde n es el número de coordenadas generalizadas independientes que se usan para definir la configuración del sistema, y los q_i y los ϕ_i son las coordenadas generalizadas y fuerzas generalizadas debidas a las fuerzas aplicadas correspondientes a las coordenadas generalizadas, respectivamente.

8.2.1 Coordenadas generalizadas

Las coordenadas que especifican por completo la configuración —es decir, la posición y orientación— de todos los cuerpos de un sistema mecánico se llaman coordenadas generalizadas. Se dice que la configuración de un sistema mecánico es completamente conocida si se conoce la posición y orientación de todos los cuerpos que hay en el sistema. Puesto que un cuerpo rígido tiene seis grados de libertad (DOF), un sistema mecánico con m cuerpos móviles requiere coordenadas $6m$ para especificar por completo su configuración en el espacio cartesiano tridimensional. Estas coordenadas se llaman coordenadas generalizadas de un sistema mecánico como, por ejemplo, el brazo de un robot. Sin embargo, estos cuerpos no pueden moverse libremente por las restricciones que imponen las articulaciones, es decir, están sujetos a restricciones impuestas por las articulaciones. Como resultado, las coordenadas $6m$ ya no son independientes. Si existen c restricciones, entonces

$$n = 6m - c$$

coordenadas pueden especificarse de manera independiente. Éstas se llaman coordenadas generalizadas independientes, y el sistema tiene un DOF de n . Por lo tanto, el número de coordenadas generalizadas independientes es igual al número de DOF del robot.

Observe que las coordenadas generalizadas pueden definirse de varias maneras. Por ejemplo, considere el robot planar de dos eslabones que se presenta en la figura 8.5. Puesto que un cuerpo rígido en un plano tiene

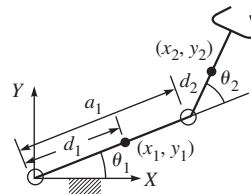


Figura 8.5 Brazo de robot de dos eslabones

3 DOF, dos cuerpos requieren seis coordenadas, es decir, (x_1, y_1, θ_1) y (x_2, y_2, θ_2) , las cuales no son independientes, puesto que hay dos articulaciones de revoluta que restringen el movimiento de los dos cuerpos. Observe que las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) definen las posiciones del centro de masa de los eslabones, mientras que θ_1 y θ_2 denotan la orientación de los eslabones, es decir, los sistemas coordenados fijos del cuerpo. Además, d_1 y d_2 son las ubicaciones del centro de masa desde el origen de los sistemas, y para el primer conjunto de seis coordenadas existen cuatro restricciones, es decir,

$$x_1 = d_1 \cos \theta_1; \quad y_1 = d_1 \sin \theta_1 \quad (8.25a)$$

$$x_2 = a_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos \theta_{12}; \quad y_2 = a_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin \theta_{12} \quad (8.25b)$$

donde $\theta_{12} \equiv \theta_1 + \theta_2$. Por ende, el sistema tiene $6 - 4 = 2$ DOF. Entonces, el conjunto independiente de coordenadas generalizadas puede ser θ_1 y θ_2 . Desde luego, uno puede seleccionar otras dos coordenadas generalizadas independientes. Sin embargo, para el ejemplo presentado, θ_1 y θ_2 son el conjunto más conveniente desde el punto de vista de los análisis de dinámica y cinemática de robots.

8.2.2 Energía cinética

Considere un robot que consiste en n eslabones rígidos, como el que se presenta en la figura 8.6a). Entonces, la energía cinética de un eslabón normal i , figura 8.6b), denotada como T_i , se obtiene mediante

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{c}}_i^T \dot{\mathbf{c}}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (8.26)$$

donde $\dot{\mathbf{c}}_i$: Vector de velocidad (lineal) tridimensional del centro de masas C_i del i -ésimo eslabón;

$\boldsymbol{\omega}_i$: Vector de velocidad angular tridimensional del i -ésimo eslabón;

m_i : Masa del i -ésimo eslabón. Una cantidad escalar;

\mathbf{I}_i : El tensor de inercia o matriz de 3×3 del i -ésimo eslabón alrededor de C_i , como se define en la subsección 8.1.2.

En la ecuación (8.22), el tensor de inercia \mathbf{I}_i para el i -ésimo cuerpo es invariante de tiempo, es decir, constante. Sin embargo, depende de la configuración del brazo del robot y se expresa en un sistema de referencia diferente, por ejemplo, el sistema fijo, como

$$[\mathbf{I}_i]_F = \mathbf{Q}_i [\mathbf{I}_i]_{i+1} \mathbf{Q}_i^T \quad (8.27)$$

donde $[\mathbf{I}_i]_{i+1}$ es la matriz de inercia del i -ésimo eslabón representada en el sistema del eslabón móvil $i + 1$ que se sujeta al i -ésimo cuerpo, y \mathbf{Q}_i es la matriz de rotación de 3×3 del eslabón i o el sistema $i + 1$ respecto al sistema fijo 1 o F , como se derivó en el capítulo 5. La energía cinética total T se da ahora por la suma de las contribuciones de cada eslabón rígido debido a los movimientos relativos de cada articulación, es decir,

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (m_i \dot{\mathbf{c}}_i^T \dot{\mathbf{c}}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) \quad (8.28)$$

En este punto, es necesario expresar la energía cinética como una función de las coordenadas generalizadas del sistema. Para un robot, las variables de las articulaciones, es decir, los ángulos de las articulaciones de revoluta y el desplazamiento para las articulaciones prismáticas, especifican por completo la configuración del robot. Por ende, los ángulos y

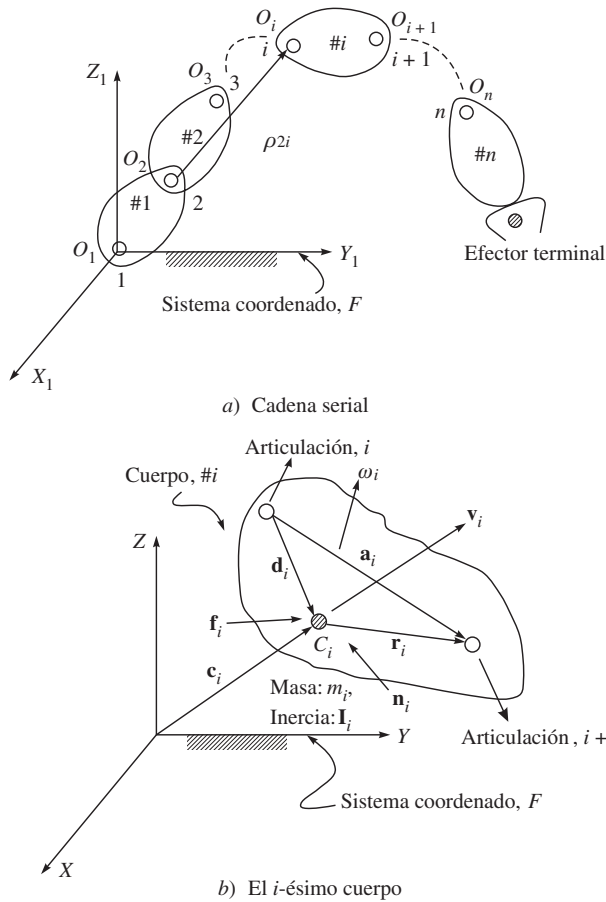


Figura 8.6 Un robot de cadena serial

desplazamientos de las articulaciones se consideran las coordenadas generalizadas. Para el i -ésimo eslabón, la velocidad angular y la velocidad lineal se calculan a partir del primer eslabón de la cadena serial, figura 8.6a), como

$$\omega_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{e}_1 \quad (8.29a)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_1 = \omega_1 \times \mathbf{d}_1 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{d}_1 \dot{\theta}_1 \quad (8.29b)$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \dot{\theta}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \dot{\theta}_1 + \mathbf{e}_2 \dot{\theta}_2 \quad (8.29c)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_2 = \dot{\mathbf{c}}_1 + \omega_1 \times \mathbf{r}_1 + \omega_2 \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{d}_2) \dot{\theta}_1 + \mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_2 \dot{\theta}_2 \quad (8.29d)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \dot{\theta}_1 + \mathbf{e}_2 \dot{\theta}_2 + \dots + \mathbf{e}_i \dot{\theta}_i \quad (8.29e)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \dot{\mathbf{c}}_{i-1} + \omega_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1} + \omega_i \times \mathbf{d}_i = \mathbf{e}_1 \times \rho_{1i} \dot{\theta}_1 + \dots + \mathbf{e}_i \times \rho_{ii} \dot{\theta}_i \quad (8.29f)$$

Observe que al escribir las ecuaciones (8.29a-f), se supone que todas las articulaciones son de revoluta. Por consiguiente, el vector \mathbf{e}_i es el vector unitario paralelo al eje de la articulación revoluta, mientras que \mathbf{a}_i , \mathbf{d}_i y \mathbf{r}_i se presentan en la figura 8.6b). Además, $\boldsymbol{\rho}_{ij}$ es el vector que conecta el origen de la i -ésima articulación O_i con el j -ésimo centro de masa C_j . Para $i = j$, $\boldsymbol{\rho}_{ii} \equiv \mathbf{d}_i$. Utilizando las ecuaciones (8.29e-f), las velocidades del i -ésimo eslabón pueden entonces expresarse en términos de todos los índices de articulaciones n , es decir,

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{\omega,i} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ donde } \mathbf{J}_{\omega,i} \equiv [\mathbf{j}_{\omega,1} \mathbf{j}_{\omega,2} \dots \mathbf{j}_{\omega,i} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}] \quad (8.30a)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \mathbf{J}_{c,i} \dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ donde } \mathbf{J}_{c,i} \equiv [\mathbf{j}_{c,1} \mathbf{j}_{c,2} \dots \mathbf{j}_{c,i} \mathbf{0} \dots \mathbf{0}] \quad (8.30b)$$

donde $\dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]^T$ es el vector n -dimensional de índice de articulaciones. En las ecuaciones (8.30a-b), $\mathbf{J}_{\omega,i}$ y $\mathbf{J}_{c,i}$ son las matrices de $3 \times n$. Proporcionalmente, $\mathbf{J}_{\omega,i}$ y $\mathbf{J}_{c,i}$ son los vectores tridimensionales que, según las ecuaciones (8.2e-f), pueden escribirse como

$$\mathbf{j}_{\omega,i} \equiv \mathbf{e}_i; \text{ y } \mathbf{j}_{c,i} \equiv \mathbf{e}_i \times \boldsymbol{\rho}_{ij} \quad (8.31a)$$

Observe que para una articulación prismática la ecuación (8.31a) se modifica como

$$\mathbf{j}_{\omega,i} \equiv \mathbf{0}; \text{ y } \mathbf{j}_{c,i} \equiv \mathbf{e}_i \quad (8.31b)$$

donde $\mathbf{0}$ representa el vector tridimensional de ceros y el vector \mathbf{e}_i es el vector unitario a lo largo de la traslación de la articulación prismática. Si se sustituyen las ecuaciones (8.30a-b) en la ecuación (8.26) y luego se suma a través de todos los eslabones, la expresión para la energía cinética del sistema se obtiene como

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(m_i \dot{\mathbf{c}}_i^T \dot{\mathbf{c}}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \bar{\mathbf{I}}_i \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (8.32a)$$

donde la matriz $\bar{\mathbf{I}}_i$ de $n \times n$ se determina por

$$\bar{\mathbf{I}}_i \equiv m_i \mathbf{J}_{c,i}^T \mathbf{J}_{c,i} + \mathbf{J}_{\omega,i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{\omega,i} \quad (8.32b)$$

Observe que en la ecuación (8.32 b) las expresiones $\mathbf{J}_{c,i}^T \mathbf{J}_{c,i}$ y $\mathbf{J}_{\omega,i}^T \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{\omega,i}$ también están en las matrices de $n \times n$. Además, si una matriz \mathbf{I} de $n \times n$ se define como sigue:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{I}}_i \quad (8.33)$$

Entonces la energía cinética total puede describirse según la ecuación (8.32a) como

$$T = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (8.34)$$

donde la matriz \mathbf{I} se llama matriz de inercia generalizada (GIM) del robot en cuestión. Cabe señalar aquí que la GIM del robot \mathbf{I} de la ecuación (8.34) involucra las matrices $\bar{\mathbf{I}}_i$, que a su vez es una función de las matrices $\mathbf{J}_{\omega,i}$ y $\mathbf{J}_{c,i}$, como es evidente de la ecuación (8.32b). Por lo tanto, el manipulador GIM es dependiente de la configuración, es decir, únicamente de la función de $\boldsymbol{\theta}$. También, de modo parecido a como se define en las ecuaciones (8.5) y (8.6) la inercia de un cuerpo rígido \mathbf{I}_p , el manipulador GIM \mathbf{I} es también simétrico y positivo-definido. Esto es obvio por la forma cuadrática de la ecuación (8.34) que indica que la energía cinética del sistema siempre es positiva, a menos que esté en reposo.

8.2.3 Energía potencial

Como en el caso de la energía cinética, la energía potencial total almacenada en el robot se obtiene por la suma de las contribuciones de cada eslabón. Sobre la base de eslabones rígidos, la energía potencial guardada en el eslabón i se define como la cantidad de trabajo que se necesita para levantar el centro de masas del eslabón i desde un plano de referencia horizontal hasta su posición presente bajo la influencia de la gravedad. En el caso del sistema coordinado de inercia, el trabajo necesario para desplazar el eslabón i hasta la posición C_i se determina por $-m_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es el vector debido a la aceleración de gravedad. Por ende, la energía potencial total almacenada en un brazo de robot se obtiene mediante

$$U = - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{g} \quad (8.35)$$

En la ecuación (8.35), el vector \mathbf{c}_i es una función de las variables de articulación, es decir, las θ del robot. Por lo tanto, la energía potencial total es una función únicamente de las variables de articulación θ , y no de las velocidades de articulación $\dot{\theta}$. Además, \mathbf{c}_i es una función no lineal de θ , y, por lo tanto, U no puede expresarse de manera adecuada en términos de θ .

8.2.4 Ecuaciones de movimiento

Tras haber computado las energías cinética y potencial totales del robot en estudio, es decir, las ecuaciones (8.32) y (8.35), respectivamente, el lagrangiano de la ecuación (8.23) puede escribirse como

$$L = T - U = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^T \bar{\mathbf{I}}_i \dot{\theta} + m_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{g} \right] \quad (8.36)$$

Ahora la función de Lagrange debe diferenciarse respecto a θ_i , $\dot{\theta}_i$ y t para formular las ecuaciones dinámicas de movimiento. Con el fin de facilitar la derivación, se expande el término de energía cinética como suma de los escalares. Si suponemos que i_{ij} es el elemento (i, j) del GIM \mathbf{I} del robot, entonces la ecuación (8.36) puede escribirse como

$$L = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} i_{ij} \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j + m_i \mathbf{c}_i^T \mathbf{g} \right] \quad (8.37)$$

Puesto que la energía potencial no depende de $\dot{\theta}$, si se toma la derivada parcial de L dada por la ecuación (8.37) respecto a $\dot{\theta}_i$, se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = \sum_{j=1}^n i_{ij} \dot{\theta}_j \quad (8.38)$$

para $i = 1, \dots, n$. Entonces la ecuación (8.38) se diferencia respecto al tiempo t como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = \sum_{j=1}^n \left[i_{ij} \ddot{\theta}_j + \left(\frac{di_{ij}}{dt} \right) \dot{\theta}_j \right] = \sum_{j=1}^n \left[i_{ij} \ddot{\theta}_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \right] \quad (8.39)$$

Tomando la derivada parcial de la ecuación (8.37) respecto a θ_i , se obtiene

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n i_{ij} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \right) + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \frac{\partial \mathbf{c}_j}{\partial \theta_i} \quad (8.40)$$

Puesto que la derivada parcial de \mathbf{c}_i respecto a θ_i , $\partial \mathbf{c}_j / \partial \theta_i$ en ecuación (8.40), es igual al vector de la i -ésima columna de la submatriz jacobiana \mathbf{J}_{c_j} denotada por $\mathbf{j}_{c,j}^{(i)}$, la ecuación (8.40) puede escribirse como

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \mathbf{j}_{c,j}^{(i)} \quad (8.41)$$

Mediante la combinación de las ecuaciones (8.38) y (8.41), se obtienen las ecuaciones dinámicas de movimiento como

$$\sum_{j=1}^n i_{ij} \ddot{\theta}_j + h_i + \gamma_i = \tau_i \quad (8.42)$$

para $i = 1, \dots, n$, donde

$$h_i \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k$$

y

$$\gamma_i \equiv - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \mathbf{j}_{c,j}^{(i)} \quad (8.43)$$

La ecuación (8.34) puede armarse para todas las coordenadas generalizadas n como

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\tau} \quad (8.44a)$$

donde la matriz de inercia generalizada \mathbf{I} de $n \times n$ se define en la ecuación (8.33) y los vectores n -dimensionales \mathbf{h} , $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\tau}$ se definen abajo:

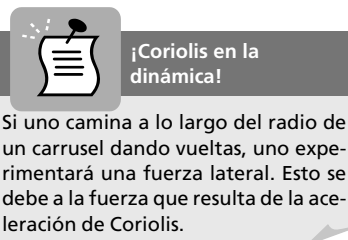
$\mathbf{h} \equiv [h_1, \dots, h_n]^T$: el vector n -dimensional de las aceleraciones centrífugas y de Coriolis. El vector \mathbf{h} también puede expresarse como $\mathbf{h} = \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}$, donde los elementos de la matriz \mathbf{C} de $n \times n$ se obtienen mediante

$$c_{ij} \equiv \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k \quad (8.44b)$$

También

$\boldsymbol{\gamma} \equiv [\gamma_1, \dots, \gamma_n]^T$: el vector n -dimensional de aceleraciones gravitacionales;

$\boldsymbol{\tau} \equiv [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$: el vector n -dimensional de fuerzas generalizadas.



Ejemplo 8.4**Expresión alternativa para los elementos de la matriz C en la ecuación (8.44b)**

A partir de la expresión de h_i dada antes de la ecuación (8.34), puede demostrarse lo siguiente mediante el intercambio del orden en la suma y tomando ventaja de la simetría:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial i_{ik}}{\partial \theta_j} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \quad (8.45)$$

Por lo tanto,

$$h_i \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial i_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k \quad (8.46)$$

Como resultado, el elemento c_{ij} se extrae de la ecuación (8.46) como

$$c_{ij} \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial i_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k \quad (8.47)$$

Cabe señalar aquí que por medio del uso de las ecuaciones (8.44b) y (8.47) para los mismos valores de i y j , se encontrarían expresiones diferentes. Sin embargo, la expresión de h_i basada en cualquiera de las ecuaciones deberá ser la misma.

Ejemplo 8.5**Matriz antisimétrica $\dot{\mathbf{I}}-2\mathbf{C}$**

En primer lugar, se obtiene la derivada respecto al tiempo en un elemento de la matriz de inercia \mathbf{I} , es decir, di_{ij}/dt como

$$\frac{di_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{di_{ij}}{d\theta_k} \dot{\theta}_k \quad (8.48)$$

Por lo tanto, el elemento (i, j) de la matriz $\dot{\mathbf{I}}-2\mathbf{C}$ puede obtenerse mediante las ecuaciones (8.47) y (8.48) como

$$\begin{aligned} \frac{di_{ij}}{dt} - 2c_{ij} &= \sum_{k=1}^n \frac{di_{ij}}{d\theta_k} \dot{\theta}_k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial i_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial i_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial i_{jk}}{\partial \theta_i} \right) \dot{\theta}_k \end{aligned} \quad (8.49)$$

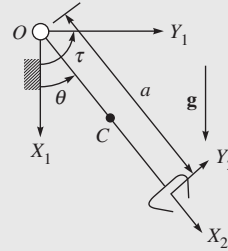
Puesto que la matriz de inercia \mathbf{I} es simétrica, es decir, $i_{ij} = i_{ji}$, puede demostrarse por medio de intercambio de los índices que

$$\frac{di_{ji}}{dt} - 2c_{ji} = - \left(\frac{di_{ij}}{dt} - 2c_{ij} \right) \quad (8.50)$$

lo que implica que la matriz $\dot{\mathbf{I}}-2\mathbf{C}$ es antisimétrica.

Ejemplo 8.6**Dinámica de un brazo de un eslabón**

La ecuación dinámica de movimiento del brazo de un eslabón y $\text{DOF} = 1$ que se presenta en la figura 8.7 se deriva mediante la formulación de Euler-Lagrange (EL). Se adjuntan dos sistemas de coordenadas siguiendo la convención de los parámetros DH que se analizó en la sección 5.4. Observe en la figura 8.7 que no se usa ningún subíndice en los parámetros del eslabón porque solamente existe uno. Según la formulación EL, la coordenada generalizada es θ , mientras que $a/2$ es la distancia del centro de masa del eslabón desde su origen de articulación O . Además, supongamos que la masa del eslabón es m , y su tensor de inercia alrededor de los centros de masa, es denotado por \mathbf{I} . Con el sistema de coordenadas seleccionado, es decir, el sistema fijo $X_1 - Y_1$, los jacobianos $\mathbf{J}_{\omega,i}$ y $\mathbf{J}_{c,i}$ para $i = 1$, la ecuación (8.30a-b) proporcionará

**Figura 8.7** Brazo de un eslabón

$$\mathbf{J}_{\omega,1} \equiv [0 \quad 0 \quad 1]^T; \quad \mathbf{J}_{c,1} \equiv \left[-\frac{a}{2}s\theta \quad \frac{a}{2}c\theta \quad 0 \right]^T \quad (8.51a)$$

donde $s\theta$ y $c\theta$ representan $\sin \theta$ y $\cos \theta$, respectivamente. Según la ecuación (8.34), el término de inercia escalar I se da por

$$I \equiv \frac{m}{4}a^2 + I_{zz} = \frac{m}{3}a^2 \quad (8.51b)$$

Observe aquí que, a pesar de que la matriz de inercia \mathbf{I} del eslabón tenga todos los elementos no cero debido a la estructura de $\mathbf{J}_{\omega,1}$, sólo el elemento (3, 3) de \mathbf{I} , a saber I_{zz} , contribuye al término de inercia generalizada. Usando la ecuación (8.43), se obtienen los elementos de los vectores \mathbf{h} y $\boldsymbol{\gamma}$ es decir, h y γ , respectivamente, de la siguiente manera:

$$h = 0; \quad \gamma \equiv -m\mathbf{g}^T \mathbf{J}_{c,1}^{(1)} = mg \frac{a}{2} s\theta \quad (8.52)$$

donde $\mathbf{g} \equiv [g \ 0 \ 0]^T - g$ es la aceleración debida a la gravedad. Usando las ecuaciones (8.51a-b), la ecuación de movimiento en la forma de la ecuación (8.44a) es:

$$\frac{1}{3}ma^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgas\theta = \tau \quad (8.53)$$

Cabe señalar aquí que para un sistema sencillo como el brazo de un eslabón, es recomendable obtener la ecuación de movimiento, es decir, la ecuación (8.53), directamente de las ecuaciones (8.24) y (8.26). Esto se muestra a continuación:

$$T \equiv \frac{1}{2}m\left(\frac{a}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{ma^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2$$

$$U = mg\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}c\theta\right)$$

y

$$L = T - U \equiv \frac{ma^2}{6}\dot{\theta}^2 - mg\frac{a}{2}(1 - c\theta) \quad (8.54a)$$

Para la coordenada generalizada θ , la ecuación (8.24) proporciona entonces

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta} ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} m g a \sin \theta ; \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} m a^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m g a \sin \theta = \tau \quad (8.51b)$$

lo que muestra la misma expresión que la que se obtuvo en la ecuación (8.53).

Ejemplo 8.7

Dinámica de un brazo de robot de dos eslabones

Se derivan las ecuaciones dinámicas de movimiento del robot de dos eslabones y $\text{DOF} = 2$, basadas en las ecuaciones de Euler-Lagrange. El vector de las coordenadas generalizadas es

$$\boldsymbol{\theta} \equiv [\theta_1, \theta_2]^T$$

mientras que $a_1/2$ y $a_2/2$ son las distancias del centro de la masa de los dos eslabones desde sus respectivos orígenes de articulación, es decir, O_1 y O_2 . Además, supongamos que las masas de los dos eslabones son m_1 y m_2 , y que sus tensores de inercia alrededor de los centros de masa son \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 . Con el sistema de coordenadas seleccionado, es decir, el sistema fijo F , los jacobianos $\mathbf{J}_{\omega,i}$ y $\mathbf{J}_{c,i}$ para $i = 1, 2$, la ecuación (8.30a-b) proporcionará

$$\mathbf{J}_{\omega,1} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_{\omega,2} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.55a)$$

y

$$\mathbf{J}_{c,1} \equiv \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{2} s_1 & 0 \\ \frac{a_1}{2} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{J}_{c,2} \equiv \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - \frac{a_2}{2} s_{12} & -\frac{a_2}{2} s_{12} \\ a_1 c_1 + \frac{a_2}{2} c_{12} & \frac{a_2}{2} c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.55b)$$

Según la ecuación (8.33), la matriz de inercia generalizada \mathbf{I} de 2×2 se determina por

$$\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{bmatrix} \quad (8.56a)$$

cuyos elementos son los siguientes:

$$i_{11} = \frac{m_1}{4} a_1^2 + I_{1,zz} + m_2 \left(a_1^2 + \frac{a_2^2}{4} + a_1 a_2 c_2 \right) + I_{2,zz} \quad (8.56b)$$

$$i_{12} = i_{21} \equiv m_2 \left(\frac{a_2^2}{4} + \frac{a_1 a_2 c_2}{2} \right) + I_{2,zz} \quad (8.56c)$$

$$i_{22} = m_2 \frac{a_2^2}{4} + I_{2,zz} \quad (8.56d)$$

donde $s_i \equiv \sin \theta_i$ y $c_i \equiv \cos \theta_i$ para $i = 1, 2$. Observe aquí que, a pesar de que las matrices de inercia \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 de los eslabones 1 y 2, respectivamente, tengan todos los elementos no cero debido a las estructuras de $\mathbf{J}_{\omega,1}$ y $\mathbf{J}_{\omega,2}$, sólo el elemento (3, 3) de \mathbf{I}_1 e \mathbf{I}_2 , a saber, $I_{1,zz}$ e $I_{2,zz}$, contribuyen a las expresiones de la matriz de inercia generalizada, es decir, las ecuaciones (8.56a-d). Usando la ecuación (8.43), se obtienen los elementos de los vectores \mathbf{h} y $\boldsymbol{\gamma}$, es decir, h_i y γ_i , respectivamente, para $i = 1, 2$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} h_1 &\equiv \frac{1}{2} \frac{\partial i_{11}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{\partial i_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \left(\frac{\partial i_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial i_{22}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_2^2 \\ &= -m_2 a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 - m_2 \frac{a_1 a_2}{2} s_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned} \quad (8.57a)$$

$$\begin{aligned} h_2 &\equiv \left(\frac{\partial i_{21}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial i_{11}}{\partial \theta_2} \right) \dot{\theta}_1^2 + \frac{\partial i_{22}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial i_{22}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{m_2}{2} a_1 a_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 \end{aligned} \quad (8.57b)$$

y

$$\gamma_1 \equiv -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{j}_{c,1}^{(1)} - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{j}_{c,2}^{(1)} = m_1 g \frac{a_1}{2} c_1 + m_2 g \left(a_1 c_1 + \frac{a_2}{2} c_{12} \right) \quad (8.58a)$$

$$\gamma_2 \equiv -m_1 \mathbf{g}^T \mathbf{j}_{c,1}^{(2)} - m_2 \mathbf{g}^T \mathbf{j}_{c,2}^{(2)} = m_2 g \frac{a_2}{2} c_{12} \quad (8.58b)$$

donde $\mathbf{g} \equiv [0 \ -g \ 0]^T - g$ es la aceleración debida a la gravedad.

8.3



La formulación Newton-Euler

En esta sección se define en primera instancia la cantidad de movimiento lineal y angular de un cuerpo rígido. Esto se usará para la derivación de las ecuaciones de Newton-Euler (NE) del movimiento de un sistema robótico determinado. Basada en las ecuaciones NE, se presenta un método recursivo para el análisis dinámico, que es útil para el control del robot.

8.3.1 Cantidad de movimiento lineal

La cantidad de movimiento lineal del elemento de masa ρdV respecto al punto O , como se presenta en la figura 8.1, se denota por $d\mathbf{m}$ —observe que la \mathbf{m} en negrillas es diferente de la m en cursivas que representa la masa— y se define mediante

$$d\mathbf{m} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rho dV \quad (8.59)$$

Por lo tanto, la cantidad de movimiento lineal total del cuerpo B alrededor de O se determina por

$$\mathbf{m} = \int_V \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{p} \rho dV \quad (8.60)$$

Usando la definición del centro de masa de la ecuación (8.1a), la ecuación (8.60) puede reescribirse como

$$\mathbf{m} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{c}) = m\dot{\mathbf{c}} \quad (8.61)$$



¿Puede cambiar la masa de un objeto?

Desde luego que sí. Imagine un avión o un auto cuya masa total se reduce conforme se está consumiendo el combustible debido a su operación.

Por la derivación de la ecuación (8.61), la derivada de tiempo de la masa m es cero, pues para un cuerpo rígido la masa no cambia con el paso del tiempo. Además, $\dot{\mathbf{c}} \equiv d\mathbf{c}/dt$ denota la velocidad del centro de la masa respecto al sistema de referencia F . La ecuación (8.61) implica que la cantidad de movimiento lineal total de un cuerpo rígido es igual a la cantidad de movimiento lineal de una masa puntual, con la masa m ubicada en el centro de masa C .

8.3.2 Cantidad de movimiento angular

En la figura 8.1, la cantidad de movimiento angular $d\tilde{\mathbf{m}}$ de un elemento de masa ρdV alrededor de un punto de referencia O se define como el momento de su cantidad de movimiento lineal, ecuación (8.61), alrededor de O , es decir,

$$d\tilde{\mathbf{m}}^O = \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rho dV \quad (8.62)$$

Por lo tanto, la cantidad de movimiento angular total de B alrededor de O se determina por

$$\tilde{\mathbf{m}}^O = \int_V \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \rho dV \quad (8.63a)$$

Cuando se sustituye $\mathbf{p} = \mathbf{c} + \mathbf{r}$, como se muestra en la figura 8.1, en la ecuación (8.63a), se obtiene

$$\tilde{\mathbf{m}}^O = \int_V \mathbf{c} \times \left(\frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV \right) + \int_V \mathbf{c} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \rho dV \right) + \int_V \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV \right) + \int_V \mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \rho dV \right) \quad (8.63b)$$

Observando que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.63c)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo B , la ecuación (8.63b) puede reordenarse como

$$\tilde{\mathbf{m}}^O = \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \int_V \rho dV + \mathbf{c} \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_V \mathbf{r} \rho dV \right) + \left(\int_V \mathbf{r} \rho dV \right) \times \dot{\mathbf{c}} + \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho dV \quad (8.63d)$$

en la que $\int_V \rho dV = m$ y, según la ecuación (8.1d), $\int_V \mathbf{r} \rho dV = 0$. Por lo tanto, el segundo y tercer términos de la ecuación (8.63d) desaparecen, lo que proporciona la cantidad de movimiento angular total alrededor de O , es decir, $\tilde{\mathbf{m}}^O$ como

$$\tilde{\mathbf{m}}^O = \mathbf{c} \times (m\dot{\mathbf{c}}) + \tilde{\mathbf{m}} \quad (8.64)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{m}} \equiv \int_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \rho dV \quad (8.65)$$

El término $\tilde{\mathbf{m}}$ de la ecuación (8.65) denota la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido alrededor del centro de masa C . Además, el vector $\dot{\mathbf{c}}$ de la ecuación (8.64) es la velocidad del centro de masa C respecto al sistema de referencia F . Adicionalmente, la ecuación (8.64) es la cantidad de movimiento angular total de B alrededor del origen O , que es igual a la cantidad de movimiento angular de una masa puntual con la masa m concentrada en el centro de la masa, más la cantidad de movimiento angular de rotación alrededor de su centro de masa. Entonces, mediante la definición del producto vectorial triple, es decir, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a}^T \mathbf{b}) \mathbf{c}$, donde \mathbf{a} , \mathbf{b} , y \mathbf{c} son los vectores cartesianos tridimensionales, la expresión $\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ de la ecuación (8.65) puede expresarse como

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r}^T \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}^T \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r} = [(\mathbf{r}^T \mathbf{r}) \mathbf{1} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T] \boldsymbol{\omega} \quad (8.66)$$

Cuando se comparan las ecuaciones (8.5) y (8.65), se observa que

$$\tilde{\mathbf{m}} \equiv \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}, \text{ donde } \mathbf{I} \equiv \int_V [(\mathbf{r}^T \mathbf{r}) \mathbf{1} - \mathbf{r} \mathbf{r}^T] \rho dV \quad (8.67)$$

donde \mathbf{I} es el tensor de inercia del cuerpo B alrededor de su centro de masa C . Aquí cabe señalar que la cantidad de movimiento angular determinada en la ecuación (8.67) puede expresarse en cualquier sistema de referencia. Si se expresa la ecuación (8.67) en el sistema de referencia F , se obtiene

$$[\tilde{\mathbf{m}}]_F = [\mathbf{I}]_F [\boldsymbol{\omega}]_F \quad (8.68)$$

en la que $[\cdot]_F$ denota la cantidad del vector o matriz expresada en el sistema F . Si se expresa la ecuación (8.68) en un sistema de cuerpo fijo, centro de masa C

$$[\tilde{\mathbf{m}}]_C = [\mathbf{I}]_C [\boldsymbol{\omega}]_C \quad (8.69)$$

$[\boldsymbol{\omega}]_C$ es la velocidad angular del cuerpo B en relación con el sistema fijo F , pero expresado en el sistema del cuerpo C , es decir, $[\boldsymbol{\omega}]_C = \mathbf{Q}^T [\boldsymbol{\omega}]_F$. La matriz \mathbf{Q} de 3×3 es la matriz de rotación que describe la orientación del sistema coordenado C en relación con el sistema F . Puesto que $\tilde{\mathbf{m}}$ es un vector, su transformación sigue a la de un vector, a saber,

$$[\tilde{\mathbf{m}}]_F = \mathbf{Q} [\tilde{\mathbf{m}}]_C \quad (8.70)$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (8.68) y (8.69) en la ecuación (8.70), se obtiene

$$[\mathbf{I}]_F [\boldsymbol{\omega}]_F = \mathbf{Q} [\mathbf{I}]_C [\boldsymbol{\omega}]_C \quad (8.71)$$

El uso de $[\boldsymbol{\omega}]_C = \mathbf{Q}^T [\boldsymbol{\omega}]_F$ en la ecuación (8.71) proporciona

$$[\mathbf{I}]_F = \mathbf{Q} [\mathbf{I}]_C \mathbf{Q}^T \quad (8.72)$$

La ecuación (8.72) transforma una matriz de inercia expresada en un sistema de referencia en otra. Ambas matrices de inercia se toman alrededor del centro de masa C . Los elementos de $[\mathbf{I}]_C$ son constantes porque generalmente están expresados en el sistema del cuerpo fijo C . Sin embargo, los elementos de $[\mathbf{I}]_F$ no lo son, ya que están expresados en el sistema fijo F , y la orientación del sistema C en relación con F es dependiente del tiempo. La dependencia de $[\mathbf{I}]_F$ resulta de la matriz de rotación \mathbf{Q} .

8.3.3 Ecuaciones de movimiento

Se asume que existe un sistema fijo de inercia respecto a la cual se derivarán las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler (NE). Como se muestra en la figura 8.8, suponga que F es el sistema fijo. Además, el vector \mathbf{m} es la cantidad de movimiento lineal del cuerpo rígido B

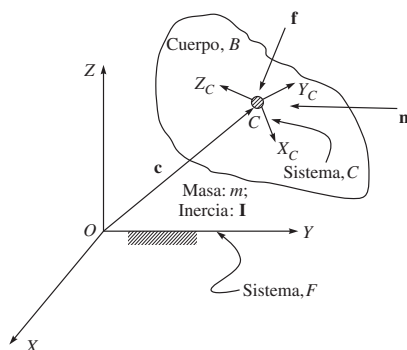


Figura 8.8 Fuerza y momento resultantes actuando sobre un cuerpo rígido

expresado en el sistema F , y la cantidad de movimiento angular correspondiente se representa por el vector $\tilde{\mathbf{m}}$. Suponga también que los vectores \mathbf{f}^O y \mathbf{n}^O son las resultantes de fuerzas y momentos ejercidos sobre el cuerpo rígido B en y alrededor del origen O , respectivamente. Entonces pueden definirse las ecuaciones lineales de Newton como la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal \mathbf{m} , es decir,

$$\mathbf{f}^O = \frac{d\mathbf{m}}{dt} \quad (8.73)$$

mientras que las ecuaciones rotacionales de movimiento de Euler se dan como la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular respecto al tiempo $\tilde{\mathbf{m}}^O$, es decir,

$$\mathbf{n}^O = \frac{d\tilde{\mathbf{m}}^O}{dt} \quad (8.74)$$

Si se toma un punto arbitrario como referencia, la aplicación de las ecuaciones básicas de movimiento (8.73)-(8.74) podrá resultar inconveniente. A continuación se mostrará que, cuando se usa el centro de masa C como punto de referencia, el movimiento del cuerpo rígido puede dividirse de forma natural en dos partes: el movimiento lineal del centro de masa C más un movimiento rotacional del cuerpo rígido alrededor del centro de masa C .

En la figura 8.8, el centro de masa de un cuerpo rígido B es C , denotado por el vector \mathbf{c} . En primer lugar se aplican las leyes de Newton. La sustitución de la ecuación (8.61) en la ecuación (8.73) da como resultado

$$\mathbf{f}^O = \frac{d(m\dot{\mathbf{c}})}{dt} \quad (8.75)$$

Para un cuerpo de masa constante, la ecuación (8.75) se reduce entonces a

$$\mathbf{f}^O = m \frac{d\dot{\mathbf{c}}}{dt} = m\ddot{\mathbf{c}} \quad (8.76)$$

La ecuación (8.76) se llama ecuación de movimiento de Newton para el centro de masa. Luego se considera el movimiento rotacional del cuerpo rígido B . La diferenciación de la ecuación (8.53) respecto al tiempo da como resultado

$$\frac{d\tilde{\mathbf{m}}^O}{dt} = \mathbf{c} \times m \frac{d\dot{\mathbf{c}}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathbf{m}}}{dt} \quad (8.77)$$

Suponga que \mathbf{h} y \mathbf{n} son las resultantes de fuerzas y momentos ejercidos en el centro de masa C , tal como se muestra en la figura 8.8. Entonces lo siguiente es válido:

$$\mathbf{f}^O = \mathbf{f} \quad (8.78a)$$

$$\mathbf{n}^O = \mathbf{n} + \mathbf{c} \times \mathbf{f} \quad (8.78b)$$

Mediante la sustitución de las ecuaciones (8.74) y (8.78b) en la ecuación (8.77) se obtiene

$$\mathbf{n} + \mathbf{c} \times \mathbf{f} = \frac{d\tilde{\mathbf{m}}}{dt} + \mathbf{c} \times m \frac{d\dot{\mathbf{c}}}{dt} \quad (8.79)$$

Mediante la sustitución de las ecuaciones (8.76) y (8.78a) en la ecuación (8.79), y comparando ambos lados, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{n} = \frac{d\tilde{\mathbf{m}}}{dt} \quad (8.80)$$

En otras palabras, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular de B alrededor del centro de masa C es igual al momento resultante ejercido en el mismo punto. La derivada de $\tilde{\mathbf{m}}$ puede desarrollarse de forma más conveniente en el sistema del centro de masa de cuerpo fijo C , como se muestra en la figura 8.8, porque los elementos del tensor de inercia de B son constantes en el sistema C . La sustitución de la ecuación (8.67) en la ecuación (8.80) y la expresión de la ecuación resultante en el sistema C nos da

$$[\mathbf{n}]_C = \frac{d([\mathbf{I}]_C [\boldsymbol{\omega}]_C)}{dt} \quad (8.81)$$

Observe que la diferenciación de $\tilde{\mathbf{m}}$ en la ecuación (8.80) u (8.81) se toma respecto al sistema coordinado de inercia F , a pesar de que las cantidades estén representadas en el sistema C . Si se aplica la regla de diferenciación, la ecuación (8.81) da como resultado lo siguiente:

$$[\mathbf{n}]_C = [\mathbf{I}]_C [\dot{\boldsymbol{\omega}}]_C + [\boldsymbol{\omega}]_C \times ([\mathbf{I}]_C [\boldsymbol{\omega}]_C) \quad (8.82)$$

La ecuación (8.82) se llama ecuación de movimiento rotacional de Euler para el sistema de coordenadas del centro de masa.

Las ecuaciones de movimiento de Euler también pueden escribirse en el sistema fijo F . Para hacer esto, ambos lados de la ecuación (8.82) se multiplican por la matriz de rotación \mathbf{Q} y se hace uso de las relaciones

$$[\boldsymbol{\omega}]_C = \mathbf{Q}^T [\boldsymbol{\omega}]_F, \text{ y } [\mathbf{n}]_C = \mathbf{Q}^T [\mathbf{n}]_F$$

es decir,

$$[\mathbf{n}]_F = \mathbf{Q} [\mathbf{I}]_C \mathbf{Q}^T [\dot{\boldsymbol{\omega}}]_F + [\boldsymbol{\omega}]_F \times (\mathbf{Q} [\mathbf{I}]_C \mathbf{Q}^T [\boldsymbol{\omega}]_F) \quad (8.83a)$$

o simplemente

$$[\mathbf{n}]_F = [\mathbf{I}]_F [\dot{\boldsymbol{\omega}}]_F + [\boldsymbol{\omega}]_F \times ([\mathbf{I}]_F [\boldsymbol{\omega}]_F)$$

donde

$$[\mathbf{I}]_F \equiv \mathbf{Q} [\mathbf{I}]_C \mathbf{Q}^T \quad (8.83b)$$

La ecuación (8.83b) se llama ecuación de movimiento rotacional de Euler para un sistema de cuerpo no-fijo por ejemplo, el sistema fijo F . Aunque las ecuaciones (8.82) y (8.83b) tienen forma similar, son fundamentalmente diferentes. Los elementos del tensor de inercia en la ecuación (8.82) son constantes, mientras que los de la ecuación (8.83b) están subordinados al tiempo. Por lo tanto, se prefiere la ecuación (8.82) sobre la ecuación (8.83b).

8.4



Algoritmo recursivo de Newton-Euler

Aquí se presenta un algoritmo recursivo de Newton-Euler (NE) para el análisis dinámico de un robot serial que incorpora todos los momentos y fuerzas que actúan sobre el eslabón individual del manipulador robótico. Por lo tanto, las ecuaciones que resultan incluirán todos los momentos y fuerzas de restricción debidos a una articulación entre los dos eslabones adyacentes. Estos momentos y fuerzas de restricción son útiles para determinar los tamaños de eslabones y cojinetes durante la fase de diseño. El método consiste en un cálculo progresivo de las velocidades y aceleraciones de cada eslabón, seguido por el cálculo regresivo de los momentos y fuerzas en cada articulación.

Los momentos y fuerzas que actúan sobre un eslabón normal i de un manipulador serial se presentan en la figura 8.6. Con fines de análisis, se emplean las siguientes notaciones:

$\mathbf{f}_{i-1,i}$: Vector tridimensional de la fuerza resultante ejercida sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ en O_i .

$\mathbf{n}_{i-1,i}$: Vector tridimensional del momento resultante ejercido sobre el eslabón i por el eslabón $i - 1$ en O_i .

$\mathbf{f}_{i+1,i}$: Vector tridimensional de la fuerza resultante ejercida sobre el eslabón i por el eslabón $i + 1$ en O_{i+1} . Observe que

$$\mathbf{f}_{i+1,i} = -\mathbf{f}_{i,i+1}.$$

$\mathbf{n}_{i+1,i}$: Vector tridimensional del momento resultante ejercido sobre el eslabón i por el eslabón $i + 1$ en O_{i+1} , de tal manera que

$$\mathbf{n}_{i+1,i} = -\mathbf{n}_{i,i+1}.$$

\mathbf{g} : El vector tridimensional de aceleración debida a la gravedad.

\mathbf{n}_i : El momento resultante ejercido alrededor del centro de masa del eslabón i .

\mathbf{f}_i : La fuerza resultante ejercida alrededor del centro de masa del eslabón i .

\mathbf{I}_i : La matriz de inercia del eslabón i alrededor de su centro de masa C_i .

\mathbf{o}_i : Vector de posición del origen del i -ésimo eslabón, como se muestra en la figura 8.9.

\mathbf{c}_i : Vector de posición del centro de masa del i -ésimo eslabón.

\mathbf{r}_i : Vector de posición del origen del eslabón $i + 1$ desde el centro de masa del eslabón i , C_i .

\mathbf{a}_i : Vector de posición del origen del eslabón $i + 1$ desde el centro de masa del eslabón i , O_i .

$\dot{\mathbf{o}}_i, \ddot{\mathbf{o}}_i$: Velocidad y aceleración lineales del origen O_i .

$\dot{\mathbf{c}}_i, \ddot{\mathbf{c}}_i$: Velocidad y aceleración lineales del centro de masa del eslabón i .

$\boldsymbol{\omega}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$: Velocidad y aceleración angulares del eslabón i .

\mathbf{e}_i : El vector unitario apuntando a lo largo del eje Z_i .

A continuación se presentarán los cálculos progresivo y regresivo.

8.4.1 Cálculo progresivo

En primer lugar, se evalúan la velocidad y aceleración angulares, así como la velocidad y aceleración lineal de cada eslabón en términos del eslabón que le antecedió. Estas veloci-

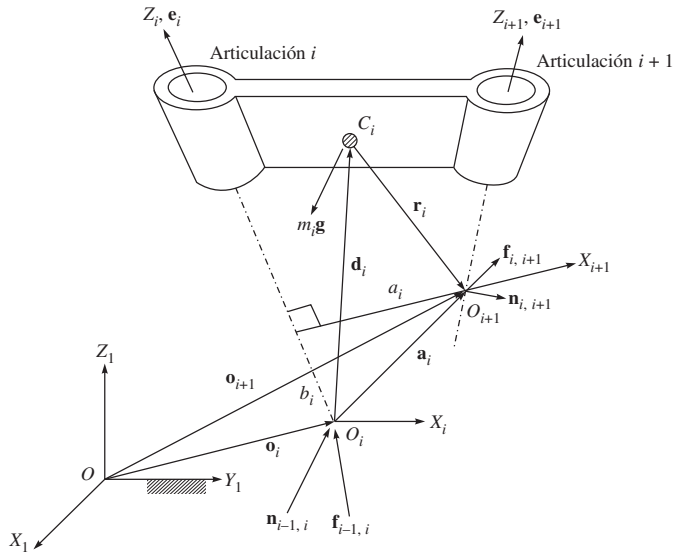


Figura 8.9 Momentos y fuerzas ejercidos sobre el eslabón i

dades pueden calcularse entonces de manera recursiva, empezando con el primer eslabón móvil y terminando con el eslabón del efector final. Las condiciones iniciales para el eslabón de base son $\dot{\mathbf{c}}_0 = \ddot{\mathbf{c}}_0 = \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_0 = \mathbf{0}$.

i) Propagación de la velocidad angular Debido a la construcción serial del manipulador robótico, la velocidad angular del eslabón i en relación con el eslabón $i-1$ es igual a $\dot{\theta}_i \mathbf{e}_i$ para una articulación de revoluta y $\mathbf{0}$ para una articulación prismática, donde \mathbf{e}_i denota el vector unitario apuntando a lo largo del i -ésimo eje de la articulación. Por ende, la velocidad angular del eslabón i puede escribirse como

$$\boldsymbol{\omega}_i = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \mathbf{e}_i & \text{para una articulación de revoluta} \\ \boldsymbol{\omega}_{i-1} & \text{para una articulación prismática} \end{cases} \quad (8.84a)$$

Si se expresa la ecuación (8.84a) en el i -ésimo sistema de eslabones, se obtiene

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1}^T [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{i-1} + \dot{\theta}_i [\mathbf{e}_i]_i & \text{para una articulación de revoluta} \\ \mathbf{Q}_{i-1}^T [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{i-1} & \text{para una articulación prismática} \end{cases} \quad (8.84b)$$

donde la transposición de la matriz de rotación de 3×3 que representa la orientación del sistema $i+1$ adjunto al eslabón i respecto a la de i adjunto al eslabón $i-1$ se determina por

$$\mathbf{Q}_{i-1}^T \equiv \begin{bmatrix} c\theta_{i-1} & s\theta_{i-1} & 0 \\ -c\alpha_{i-1} s\theta_{i-1} & c\alpha_{i-1} c\theta_{i-1} & s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1} c\theta_{i-1} & -s\alpha_{i-1} c\theta_{i-1} & c\alpha_{i-1} \end{bmatrix} \quad (8.85)$$

donde θ_i , α_i son los ángulos de articulación y torsión de los parámetros DH que se definieron en el capítulo 5, mientras que el vector unitario

$$[\mathbf{e}_i]_i \equiv [0, 0, 1]^T$$

apunta a lo largo del i -ésimo eje de articulación y se expresa en su sistema de coordenadas.

ii) Propagación de la aceleración angular La aceleración angular del eslabón i se obtiene mediante la diferenciación de la ecuación (8.84a) respecto al tiempo, es decir,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} + \ddot{\theta}_i \mathbf{e}_i + \dot{\theta}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i & : \text{ para una articulación de revoluta} \\ \ddot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} & : \text{ para una articulación prismática} \end{cases} \quad (8.86a)$$

Si se expresa la ecuación (8.86a) en el i -ésimo sistema de eslabones, se obtiene

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1}^T [\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}]_{i-1} + \ddot{\theta}_i [\mathbf{e}_i]_i + \dot{\theta}_i [\boldsymbol{\omega}_i]_i \times [\mathbf{e}_i]_i & : \text{ para una articulación de revoluta} \\ \mathbf{Q}_{i-1}^T [\ddot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}]_{i-1} & : \text{ para una articulación prismática} \end{cases} \quad (8.86b)$$

La ecuación (8.86b) proporciona una fórmula recursiva para computar la aceleración angular del eslabón i en términos del eslabón $i-1$.

iii) Propagación de la velocidad lineal En la figura 8.9, puede observarse lo siguiente: 1) si la i -ésima articulación es de revoluta, el eslabón i no se traslada a lo largo del i -ésimo eje de articulación; y 2) si la i -ésima articulación es prismática, hay una velocidad de traslación de b_i a lo largo del i -ésimo eje de articulación. Por ende, puede escribirse la velocidad del centro de masa C_i en términos de la velocidad de C_{i-1}

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \begin{cases} \dot{\mathbf{c}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_i & : \text{ para una articulación de revoluta} \\ \dot{\mathbf{c}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{d}_i) + \dot{b}_i \mathbf{e}_i & : \text{ para una articulación prismática} \end{cases} \quad (8.87a)$$

La ecuación (8.87a) también puede escribirse en el i -ésimo sistema coordinado como

$$[\dot{\mathbf{c}}_i]_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1}^T ([\dot{\mathbf{c}}_{i-1}]_{i-1} + [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{i-1} \times [\mathbf{r}_{i-1}]_{i-1}) + [\boldsymbol{\omega}_i]_i \times [\mathbf{d}_i]_i & : \text{ Revoluta} \\ \mathbf{Q}_{i-1}^T ([\dot{\mathbf{c}}_{i-1}]_{i-1} + [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{i-1} \times [\mathbf{r}_{i-1}]_{i-1}) + [\boldsymbol{\omega}_i]_i \times [\mathbf{d}_i]_i + \dot{b}_i [\mathbf{e}_i]_i & : \text{ Prismática} \end{cases} \quad (8.87b)$$

donde

$$[\boldsymbol{\omega}_i]_i = \mathbf{Q}_{i-1}^T [\boldsymbol{\omega}_{i-1}]_{i-1}$$

para la articulación prismática se obtiene en la ecuación (8.87b). Además,

$$[\mathbf{d}_i]_i = [\mathbf{a}_i]_i - [\mathbf{r}_i]_i$$

en la que

$$[\mathbf{a}_i]_i \equiv \begin{bmatrix} a_i c \theta_i \\ a_i s \theta_i \\ b_i \end{bmatrix}; \text{ y } [\mathbf{r}_i]_{i+1} \equiv \begin{bmatrix} r_{ix} \\ r_{iy} \\ r_{iz} \end{bmatrix} \quad (8.88)$$

y donde r_{ix} , r_{iy} y r_{iz} son los componentes constantes del vector \mathbf{r}_i en el sistema $(i + 1)$ que se adjunta al eslabón i . La ecuación (8.87b) es la fórmula recursiva para calcular la velocidad lineal del eslabón i en términos del eslabón $(i - 1)$.

iv) Propagación de la aceleración lineal La aceleración lineal del centro de masa del eslabón i puede obtenerse mediante la diferenciación de la ecuación (8.87a) respecto al tiempo como

$$\ddot{\mathbf{c}}_i = \begin{cases} \ddot{\mathbf{c}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_i) & : \text{ Revoluta} \\ \ddot{\mathbf{c}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times (\mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{d}_i) + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times [\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\mathbf{r}_{i-1} + \mathbf{d}_i)] + \ddot{b}_i \mathbf{e}_i + 2\dot{b}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i & : \text{ Prismática} \end{cases} \quad (8.89a)$$

donde se usan para la derivación de la ecuación (8.89a) $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}$ para las articulaciones prismáticas, así como las ecuaciones (8.84a) y (8.86a), respectivamente. Al expresar la ecuación (8.89a) en el i -ésimo sistema coordenado se obtiene entonces como

$$[\ddot{\mathbf{c}}_i]_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_{i-1}^T [\ddot{\mathbf{c}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1})]_{i-1} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_i)] & : \text{ Revoluta} \\ \mathbf{Q}_{i-1}^T [\ddot{\mathbf{c}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1})]_{i-1} + [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{d}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_i) + \ddot{b}_i \mathbf{e}_i + 2\dot{b}_i \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{e}_i]_i & : \text{ Prismática} \end{cases} \quad (8.89b)$$

donde todas las cantidades vectoriales dentro de [...] están representadas en el sistema j para $j = i - 1$ e i . La ecuación (8.89b) es la fórmula recursiva para calcularla aceleración lineal del eslabón i en términos de la del eslabón $i - 1$.

v) Aceleración de la gravedad Finalmente, la aceleración de la gravedad del $(i - 1)$ -ésimo sistema a i -ésimo sistema puede transformarse así:

$$[\mathbf{g}]_i = \mathbf{Q}_{i-1}^T [\mathbf{g}]_{i-1} \quad (8.90)$$

8.4.2 Cálculo regresivo

Una vez que se hayan encontrado las velocidades y aceleraciones de los eslabones, pueden computarse los pares de torsión y fuerzas de articulaciones, eslabón por eslabón, empezando con el del efector final y terminando con el de la base. En primer lugar se aplican las ecuaciones (8.76) y (8.82) para computar la fuerza de inercia y el momento ejercidos en y alrededor del centro de masa del eslabón i . Ellas son

$$[\mathbf{f}_i]_i = m_i [\ddot{\mathbf{c}}_i]_i \quad (8.91a)$$

$$[\mathbf{n}_i]_i = [\mathbf{I}_i]_i [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_i + [\boldsymbol{\omega}_i]_i \times [\mathbf{I}_i]_i [\dot{\boldsymbol{\omega}}_i]_i \quad (8.91b)$$



El significado de recursivo

Las velocidades, fuerzas, etc., de eslabones se computan para un eslabón después de que se conozcan las mismas para sus eslabones anteriores o posteriores.

Luego se escriben las ecuaciones de balance de fuerza y momento alrededor del centro de masa del eslabón i . Como se ve en la figura 8.9,

$$[\mathbf{f}]_i = [\mathbf{f}_{i-1,i}]_i - [\mathbf{f}_{i,i+1}]_i + m_i[\mathbf{g}]_i \quad (8.92a)$$

$$[\mathbf{n}]_i = [\mathbf{n}_{i-1,i}]_i - [\mathbf{n}_{i,i+1}]_i - [\mathbf{d}]_i \times [\mathbf{f}_{i-1,i}]_i - [\mathbf{r}]_i \times [\mathbf{f}_{i,i+1}]_i \quad (8.92b)$$

Al reordenar las ecuaciones (8.92a-b) en forma recursiva, se obtiene

$$[\mathbf{f}_{i-1,i}]_i = [\mathbf{f}]_i + [\mathbf{f}_{i,i+1}]_i - m_i[\mathbf{g}]_i \quad (8.92c)$$

$$[\mathbf{n}_{i-1,i}]_i = [\mathbf{n}]_i + [\mathbf{n}_{i,i+1}]_i + [\mathbf{d}]_i \times [\mathbf{f}_{i-1,i}]_i + [\mathbf{r}]_i \times [\mathbf{f}_{i,i+1}]_i \quad (8.92d)$$

Las ecuaciones (8.92c-d) pueden usar para resolver $[\mathbf{f}_{i-1,i}]_i$ y $[\mathbf{n}_{i-1,i}]_i$ en forma recursiva, empezando con el eslabón del efector final. Para el efector final, el momento y la fuerza $[\mathbf{n}_{n,n+1}]_{n+1}$ y $[\mathbf{f}_{n,n+1}]_{n+1}$, respectivamente, representan el momento externo y la fuerza externa aplicadas por el efector final sobre el ambiente, como se explicó en el capítulo 7. Se asume que estos valores son conocidos.

8.4.3 Expresiones de pares de torsión o fuerza en articulaciones

Los pares de torsión y fuerzas τ_i de actuadores se obtienen mediante la proyección de las fuerzas de restricciones a sus correspondientes ejes de articulaciones, es decir,

$$\tau_i = \begin{cases} [\mathbf{e}_i]_i^T [\mathbf{n}_{i-1,i}]_i & : \text{ para una articulación de revoluta} \\ [\mathbf{e}_i]_i^T [\mathbf{f}_{i-1,i}]_i & : \text{ para una articulación prismática} \end{cases} \quad (8.93)$$

La ecuación (8.93) declara que τ_i no es otra cosa que el último elemento del vector $[\mathbf{n}_{i-1,i}]_i$ o $[\mathbf{f}_{i-1,i}]_i$.

Ejemplo 8.8

Ecuaciones NE para el brazo de un eslabón y $DOF = 1$

Considere el manipulador planar de $DOF = 1$ que se muestra en las figuras 8.7 y 8.10. La matriz de rotación es

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.94)$$

El vector \mathbf{a}_1 en su propio sistema de coordenadas se representa así:

$$[\mathbf{a}]_1 = [ac\theta_1 \quad as\theta_1 \quad 0]^T \quad (8.95)$$

Además, suponiendo que el eslabón es homogéneo, los vectores $[\mathbf{d}]_1$ y $[\mathbf{r}]_2$ se dan como

$$[\mathbf{d}]_1 \equiv \left[\frac{1}{2}ac\theta \quad \frac{1}{2}as\theta \quad 0 \right]^T$$

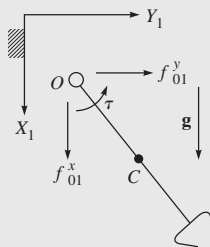


Figura 8.10 Diagrama de cuerpo libre de un eslabón

y

$$[\mathbf{r}]_2 = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (8.96)$$

Suponga que el eslabón es una viga cuadrada con un área de sección transversal relativamente pequeña. Entonces la matriz de inercia del eslabón alrededor de su centro de masa C representada en un sistema adjunto a sí mismo, es decir, el sistema 2, se da por

$$[\mathbf{I}]_2 = \frac{ma^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.97)$$

Si se aplica el algoritmo recursivo de Newton-Euler para calcular las velocidades y aceleraciones del eslabón en forma recursiva, se obtiene lo siguiente:

a) Cálculo progresivo En primer término, se computan las velocidades y aceleraciones del eslabón, tomando en cuenta que se ha adjuntado a la base fija cuyas velocidades angulares y lineales son cero; es decir,

$$[\boldsymbol{\omega}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}; \text{ y } [\dot{\boldsymbol{\omega}}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (8.98a)$$

$$[\dot{\mathbf{c}}]_1 = \dot{\theta} \frac{a}{2} \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ y } [\ddot{\mathbf{c}}]_1 = \ddot{\theta} \frac{a}{2} \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{\theta}^2 \frac{a}{2} \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.98b)$$

Se supone que la aceleración por gravedad apunta en la dirección X_1 del primer sistema, es decir,

$$[\mathbf{g}]_1 \equiv [g \quad 0 \quad 0]^T$$

b) Cálculo regresivo Para el cálculo regresivo se obtienen primero que nada las fuerzas ejercidas sobre el eslabón. Suponiendo que no existan fuerzas aplicadas externamente, es decir,

$$[\mathbf{f}_{12}]_2 = [\mathbf{n}_{12}]_2 = \mathbf{0}$$

los cálculos progresivos en las ecuaciones (8.91a-b) y (8.92c-d) para $i = 2$ dan lo siguiente:

$$[\mathbf{f}_1]_1 = m \frac{a}{2} \left(\ddot{\theta} \begin{bmatrix} -s\theta \\ c\theta \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \right); [\mathbf{n}]_1 = m \frac{a^2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (8.99)$$

$$[\mathbf{f}_{01}]_1 = \begin{bmatrix} -m \frac{a}{2} (\ddot{\theta} s\theta + \dot{\theta}^2 c\theta) - mg \\ m \frac{a}{2} (\ddot{\theta} c\theta - \dot{\theta}^2 s\theta) \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{n}_{01}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{ma^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{ma^2}{4}\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgas\theta \end{bmatrix} \quad (8.100)$$

c) **Cálculo del par de torsión en articulaciones** Finalmente, aplicando la ecuación (8.93) para computar el par de torsión requerido, la única ecuación dinámica se obtiene como

$$\tau = \frac{1}{3}ma^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgas\theta \quad (8.101)$$

que nuevamente es la misma que en la ecuación (8.53) u (8.54b).

Ejemplo 8.9

Ecuaciones NE para un manipulador de dos eslabones

Considere el manipulador de DOF = 2 que se presenta en la figura 8.5. Las matrices de rotación son

$$\mathbf{Q}_1 \equiv \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ y } \mathbf{Q}_2 \equiv \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.102)$$

Los vectores \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 en su propio sistema coordenado son como sigue:

$$[\mathbf{a}_1]_1 \equiv [a_1c\theta_1 \quad a_1s\theta_1 \quad 0]^T; \text{ y } [\mathbf{a}_2]_2 \equiv [a_2c\theta_2 \quad a_2s\theta_2 \quad 0]^T \quad (8.103)$$

Además, suponiendo que los eslabones son homogéneos, los vectores $[\mathbf{d}]_i$ y $[\mathbf{r}]_{i+1}$ para $i = 1, 2$ se dan como

$$[\mathbf{d}]_i \equiv \left[\frac{1}{2}a_ic\theta_i \quad \frac{1}{2}a_is\theta_i \quad 0 \right]^T; \text{ y } [\mathbf{r}]_{i+1} = \left[\frac{a_i}{2} \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (8.104)$$

Suponga que los dos eslabones son vigas cuadradas con un área de sección transversal relativamente pequeña. Entonces la matriz de inercia del eslabón i alrededor de su centro de masa representada en un sistema coordenado adjunto se da por

$$\mathbf{I}_{i+1} = \frac{m_ia_i^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ para } i = 1, 2 \quad (8.105)$$

Aplicando el algoritmo recursivo de Newton-Euler para calcular las velocidades y aceleraciones de eslabones, y luego las fuerzas y momentos, y también recursivamente se obtiene lo siguiente:

a) **Cálculo progresivo** En primer término se computan las velocidades y aceleraciones del eslabón 1. Puesto que el eslabón 1 se adjunta a la base fija cuyas velocidades angulares y lineales son cero, sus velocidades se determinan por

$$[\omega_1]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}; \text{ y } [\dot{\omega}_1]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (8.106a)$$

$$[\dot{c}_1]_1 = \dot{\theta}_1 \frac{a_1}{2} \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ y } [\ddot{c}_1]_1 = \ddot{\theta}_1 \frac{a_1}{2} \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{\theta}_1^2 \frac{a_1}{2} \begin{bmatrix} c\theta_1 \\ s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.106b)$$

Se supone que la aceleración por gravedad apunta en la dirección Y_1 del primer sistema, es decir,

$$[g]_1 \equiv [0 \quad -g \quad 0]^T$$

Entonces se computan las velocidades y aceleraciones del eslabón 2. Si se sustituyen las velocidades y aceleraciones del eslabón 1 en las ecuaciones (8.84b), (8.86b), (8.87b) y (8.89b), se obtiene

$$[\omega_2]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}; \text{ y } [\dot{\omega}_2]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (8.107a)$$

$$[\dot{c}_2]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{a_2}{2} s\theta_2 \dot{\theta}_{12} \\ a_1 \dot{\theta}_1 + \frac{a_2}{2} c\theta_2 \dot{\theta}_{12} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{ y } [\ddot{c}_2]_2 = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1^2 - \frac{a_2}{2} (s\theta_2 \ddot{\theta}_{12} + c\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) \\ a_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{a_2}{2} (c\theta_2 \ddot{\theta}_{12} - s\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.107b)$$

donde $\dot{\theta}_{12} \equiv \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$, $\ddot{\theta}_{12} \equiv \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2$. La aceleración por gravedad expresada en el segundo sistema del eslabón es

$$[g]_2 = Q_1^T [g]_1 = [-g_1 s\theta_1 \quad -g_1 c\theta_1 \quad 0]^T$$

b) Cálculo regresivo Para el cálculo regresivo se obtienen primero que nada las fuerzas ejercidas sobre el eslabón 2 y luego las del eslabón 1, suponiendo que no existan fuerzas aplicadas externamente, es decir,

$$[f_{32}]_2 = [n_{32}]_2 = 0$$

Luego, sustituyendo

$$[f_{23}]_3 = [n_{23}]_3 = 0$$

junto con las velocidades y aceleraciones del eslabón 2 obtenidas a partir de los cálculos progresivos, en las ecuaciones (8.91a-b) y (8.92c-d) para $i = 2$, se encuentra

$$[\mathbf{f}_2]_2 = m_2 \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1^2 - \frac{a_2}{2} (s\theta_2 \ddot{\theta}_{12} + c\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) \\ a_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{a_2}{2} (c\theta_2 \ddot{\theta}_{12} - s\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) \\ 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{n}_2]_2 = m_2 \frac{a_2^2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_{12} \end{bmatrix} \quad (8.108)$$

$$[\mathbf{f}_{12}]_2 = m_2 \begin{bmatrix} -a_1 \dot{\theta}_1^2 - \frac{a_2}{2} (s\theta_2 \ddot{\theta}_{12} + c\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) + gs\theta_1 \\ a_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{a_2}{2} (c\theta_2 \ddot{\theta}_{12} - s\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) + gc\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_{12}^x \\ f_{12}^y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.109a)$$

$$[\mathbf{n}_{12}]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{a_2}{2} s\theta_2 f_{12}^x + \frac{a_2}{2} c\theta_2 f_{12}^y + m_2 \frac{a_2^2}{12} \ddot{\theta}_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_{12}^z \end{bmatrix} \quad (8.109b)$$

Si se sustituyen las fuerzas antes mencionadas y los momentos obtenidos para el eslabón 2 junto con las velocidades y aceleraciones del eslabón 1 en las ecuaciones (8.91a-b) y (8.92c-d) para $i = 1$, se obtiene lo siguiente:

$$[\mathbf{f}_1]_1 = m_1 \frac{a_1}{2} \left(\ddot{\theta}_1 \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \dot{\theta}_1^2 \begin{bmatrix} c\theta_1 \\ s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right); [\mathbf{n}_1]_1 = m_1 \frac{a_1^2}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad (8.110)$$

$$[\mathbf{f}_{01}]_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 f_{12}^x - s\theta_1 f_{12}^y - m_1 \frac{a_1}{2} (s\theta_1 \ddot{\theta}_1 + c\theta_1 \dot{\theta}_1^2) \\ s\theta_1 f_{12}^x + c\theta_1 f_{12}^y + m_1 \frac{a_1}{2} (c\theta_1 \ddot{\theta}_1 - s\theta_1 \dot{\theta}_1^2) + m_1 g \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.111a)$$

$$[\mathbf{n}_{01}]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_1 a_1^2}{3} \ddot{\theta}_1 + n_{12}^z + a_1 f_{12}^y + m_1 g \frac{a_1}{2} c\theta_1 \end{bmatrix} \quad (8.111b)$$

c) Cálculo del par de torsión de las articulaciones Finalmente, aplicando la ecuación (8.93) para computar el par de torsión requerido, se obtienen dos ecuaciones dinámicas como

$$\tau_1 = \frac{m_1 a_1^2}{3} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 s\theta_2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 a_2^2}{3} \ddot{\theta}_{12} + m_2 g \left(\frac{a_2}{2} c\theta_{12} + a_1 c\theta_1 \right) + m_1 g \frac{a_1}{2} c\theta_1 + m_2 \frac{a_1 a_2}{2} c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 a_1 \left[a_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{a_2}{2} (c\theta_2 \ddot{\theta}_{12} - s\theta_2 \dot{\theta}_{12}^2) \right] \quad (8.112a)$$

$$\tau_2 = \frac{m_2 a_2^2}{3} \ddot{\theta}_{12} + \frac{m_2 a_1 a_2}{2} [c\theta_2 \ddot{\theta}_1 + s\theta_2 \dot{\theta}_1^2] + \frac{m_2 a_2}{2} gc\theta_{12} \quad (8.112b)$$

Como era de esperarse, la ecuación dinámica para la segunda articulación es más sencilla que la obtenida para la primera. En este ejemplo se demuestran claramente los diferentes efectos dinámicos, incluido el efecto de Coriolis y el acoplamiento de velocidad centrífuga, así como los efectos gravitacionales. A partir de las ecuaciones (8.112a-b), puede verse que el modelo dinámico es bastante complejo, incluso para un manipulador simple de $\text{DOF} = 2$. Cuando se utiliza el método recursivo de Newton-Euler, también se encuentran todas las fuerzas de reacción de las articulaciones. Las ecuaciones (8.112a-b) pueden verificarse con las que se obtuvieron usando el método de Lagrange en el ejemplo 8.7.

8.5 Algoritmos dinámicos



En la dinámica de robots se resuelven por lo general dos tipos de problemas. Uno se llama dinámica inversa, donde se dan los parámetros geométricos inerciales del robot, así como los movimientos de las articulaciones, es decir, sus posiciones, velocidades y aceleraciones, y se calculan los correspondientes pares de torsión y las fuerzas de articulaciones. El segundo se llama dinámica progresiva o directa, donde se obtienen las aceleraciones de las articulaciones, dados los parámetros geométricos e inerciales. Mientras que la dinámica inversa se usa para el control de robots, la dinámica directa es esencial para la simulación. Al tomar en cuenta las ecuaciones de movimiento, ecuación (8.44a), se observa que la dinámica inversa requiere la evaluación de su lado izquierdo, mientras que la dinámica directa resuelve las aceleraciones de las articulaciones.

8.5.1 Dinámica inversa

Para el control de un manipulador robótico, particularmente de aquellos basados en la dinámica de robots, los pares de torsión y fuerzas de los actuadores se calculan mediante la dinámica inversa. Para tal fin, puede usarse la ecuación (8.44a), donde las matrices y vectores asociados se evalúan en la subsección 8.2.4, o el algoritmo recursivo de Newton-Euler (RNE) que se presenta en la sección 8.4. Para sistemas robóticos complejos, por ejemplo, manipuladores industriales de $\text{DOF} = 6$, se prefiere por lo general el RNE, como se ilustra en el ejemplo 8.9.

Ejemplo 8.10

Dinámica inversa para el brazo de un eslabón usando MATLAB

Para el manipulador de un eslabón que se presenta en la figura 8.7, considere $a = 1$, $m = 1$ y que se varíe el ángulo de articulación θ como

$$\theta = \theta(0) + \frac{\theta(T) - \theta(0)}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad (8.113a)$$

donde $\theta_i(0) = 0$; $\theta_i(T) = \pi$ y $T = 10$ seg. Usando la ecuación (8.113a), las expresiones del índice de articulación y de las aceleraciones se determinan por

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(T) - \theta(0)}{T} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right],$$

$$y \quad \ddot{\theta} = \frac{\theta(T) - \theta(0)}{T} \left[\frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (8.113b)$$

Observe que la trayectoria de la ecuación (8.113a) se eligió de tal manera que las velocidades y aceleraciones de articulación al principio y al final son ceros, es decir, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(T) = 0$ y $\ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(T) = 0$. Mediante el programa de MATLAB que se presenta a continuación, las gráficas de articulación y el correspondiente par de torsión se evalúan según la ecuación (8.53) y se dan en las figuras 8.11 y 8.12. En la figura 8.11, “th”, “thd” y “thdd” representan las variables θ , $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, respectivamente.

```
% Inverse Dynamics for One-Link Arm
% Input for trajectory and link parameters
T = 10; thT = pi; th0 = 0; m = 1; a = 1; g = 9.81;
con = 2*pi/T; delth = thT - th0;
iner = m*a*a/3; grav = m*g*a/2;
for i = 1:51,
    ti (i) = (i-1)*T/50;
    ang = con*ti(i);
% Joint trajectory
th (i) = th0 + (delth/T)*(ti (i) - sin(ang)/con);
thd (i) = delth*(1 - cos(ang))/T;
thdd (i) = delth*con*sin(ang)/T;
% Joint torque
tau (i) = iner*thdd (i) + grav*sin(th(i));
end
plot (ti,th,'-',ti,thd,':',ti,thdd,'-.')
figure
plot (ti, tau)
```

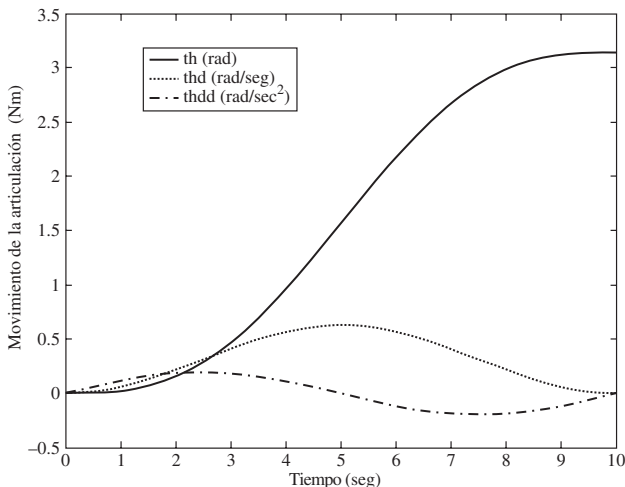


Figura 8.11 Trayectoria de la articulación

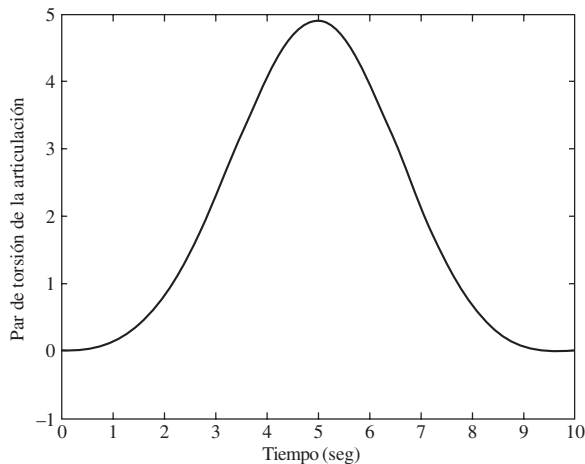


Figura 8.12 Par de torsión del brazo de un eslabón

Ejemplo 8.11

Dinámica inversa para un manipulador de dos eslabones usando MATLAB

Para el manipulador de dos eslabones que se presenta en la figura 8.5, considere $a_1 = a_2 = 1$ y suponga que las variaciones del ángulo de la articulación para ambas θ_1 y θ_2 son las mismas que en la ecuación (8.113), excepto porque sus posiciones finales son distintas, es decir, $\theta_1(T) = \pi$ y $\theta_2 = \pi/2$. Usando el programa de MATLAB que se presenta a continuación, el ángulo de la articulación y las gráficas de torsión se muestran en las figuras 8.13 y 8.14, respectivamente.

```
% Inverse Dynamics for Two-Link Manipulator
% Input for trajectory and link parameters
T = 10; th1T = pi; th10 = 0; th2T = pi/2; th20 = 0;
m1 = 1; a1 = 1; m2 = 1; a1 = 1; a2 = 1; g = 9.81;
con = 2*pi/T; delth1 = th1T - th10; delth2 = th2T - th20; iner21 = m2*a1*a2;

for i = 1:51,
    ti (i) = (i-1)*T/50;    ang = con*ti(i);

% Joint trajectory
th1 (i) = th10 + (delth1/T)*(ti (i) - sin(ang)/con);
th1d (i) = delth1*(1 - cos(ang))/T; th1dd (i) = delth1*con*sin(ang)/T;

th2 (i) = th20 + (delth2/T)*(ti (i) - sin(ang)/con);
th2d (i) = delth2*(1 - cos(ang))/T; th2dd (i) = delth2*con*sin(ang)/T;
thdd = [th1dd(i);th2dd(i)];

%Inertia matrix
sth2 = sin(th2(i)); cth2 = cos(th2(i));
i22 = m2*a2*a2/3;i21 = i22 + iner21*cth2/2;i12 = i21;
i11 = i22 + m1*a1*a1/3 + m2*a1*a1 + iner21*cth2;
```

```

im = [i11, i12; i21, i22]

%h-vector
h1 = - (m2*a1*a2*th1d(i) + iner21/2*th2d(i))*th2d(i)*sth2;
h2 = iner21/2*sth2*th1d(i)*th1d(i); hv=[h1;h2]

%gamma-vector
cth1 = cos(th1(i)); cth12 = cos(th1(i) + th2(i));
gam1 = m1*g*a1/2*cth1 + m2*g*(a1*cth1 + a2/2*cth12);
gam2 = m1*g*a2/2*cth12; gv = [gam1;gam2]

% Joint torque
tau=im*thdd + hv + gv; tor1(i) = tau(1); tor2(i)=tau(2);
end
plot(ti,th1,'-',ti,th2,':')
figure
plot (ti, tor1,'-',ti,tor2,':')

```

8.5.2 Dinámica directa y simulación

La simulación de un robot es útil para entender su comportamiento, aun cuando no exista en realidad. Esto involucra lo que se conoce como dinámica progresiva o directa, en contraste con la dinámica inversa que se explica en la subsección 8.5.1, seguido por la solución de las ecuaciones de movimiento. La dinámica directa se define como la que, dados los parámetros cinemáticos e inerciales y los pares de torsión y fuerzas de las articulaciones en función del tiempo, se puede entonces encontrar la trayectoria del manipulador robótico. En otras pala-

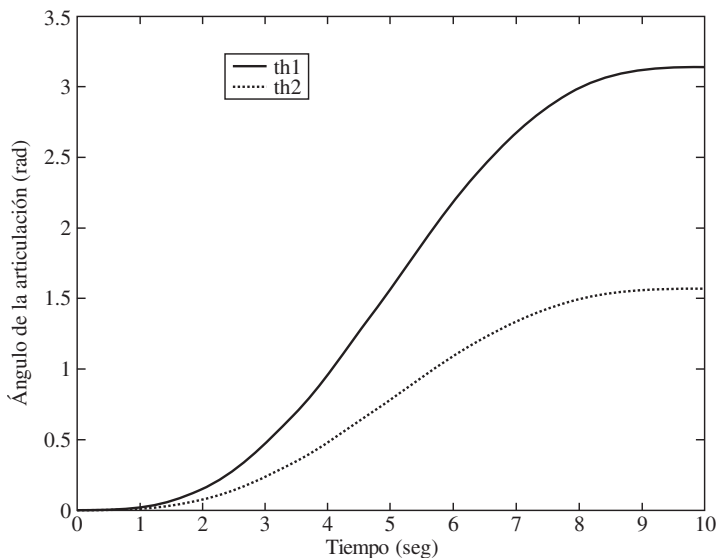


Figura 8.13 Ángulos de articulación del manipulador de dos eslabones

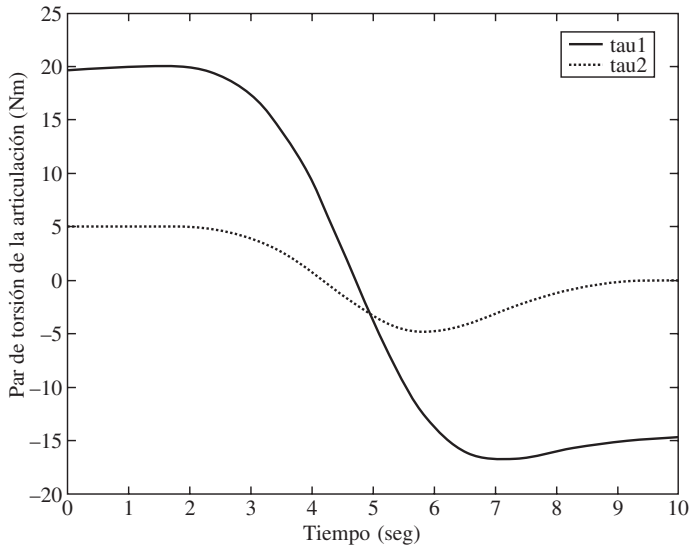


Figura 8.14 Pares de torsión de articulación del manipulador de dos eslabones

bras, se sabe que el vector τ , como en la ecuación (8.44a), encontrará al vector θ . El problema de la dinámica directa requiere la solución de las aceleraciones de articulación $\ddot{\theta}$ según las ecuaciones de movimiento, la cual es algebraica de naturaleza, es decir,

$$\ddot{\theta} = \mathbf{I}^{-1}(\tau - \mathbf{h} - \gamma) \quad (8.114)$$

Puesto que la matriz de inercia \mathbf{I} es un positivo-definitivo simétrico, siempre es invertible. Además, la ecuación (8.114) representa un conjunto de ecuaciones diferenciales que son altamente no lineales y no pueden ser resueltas (integradas) analíticamente, excepto en los casos más simples. Por ende, obtener θ para τ dado y las condiciones iniciales requiere la integración numérica. El software MATLAB tiene una rutina integrada como ODE45 para ejecutar la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que están arregladas en forma de espacio- estado. Por ejemplo, el espacio-estado de la ecuación (8.44a) se obtiene mediante la definición del siguiente vector $2n$ -dimensional del estado $\mathbf{y}(t)$ como

$$\mathbf{y}(t) \equiv [\mathbf{y}_1^T(t), \mathbf{y}_2^T(t)]^T$$

donde

$$\mathbf{y}_1(t) = \theta; \mathbf{y}_2(t) = \dot{\theta} \quad (8.115a)$$

La forma espacio-estado para las ecuaciones de movimiento en la ecuación (8.44a) se expresa entonces como

$$\dot{\mathbf{y}}(t) \equiv \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2(t) \\ \mathbf{I}^{-1}(\tau - \mathbf{h} - \gamma) \end{bmatrix} \quad (8.115b)$$

Ejemplo 8.12**Simulación de un brazo de un eslabón**

Para el brazo de un eslabón se expresa la aceleración de la articulación $\ddot{\theta}$ según la ecuación (8.53) o la (8.54b) como

$$\ddot{\theta} = \frac{3}{ma^2} \left(\tau - \frac{1}{2} m g a \sin \theta \right) \quad (8.116)$$

Por lo tanto, la forma espacio-estado se determina por

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{3}{ma^2} \left(\tau - \frac{1}{2} m g a \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (8.117)$$

donde el vector espacio-estado bidimensional se determina por $\mathbf{y} \equiv [y_1 \ y_2]^T = [\theta \ \dot{\theta}]^T$. Entonces mediante ODE45 de MATLAB se realiza la integración numérica para la entrada del par de torsión no articulado es decir, $\tau = 0$, y los valores iniciales del vector de estado, es decir, $\mathbf{y}(0) \equiv [\pi/2 \ 0]^T$, junto con el valor de $g = 9.81$. El programa MATLAB para generar los resultados de simulación se muestra a continuación, mientras que los resultados se presentan en la figura 8.15. A partir de la figura 8.15, queda claro que el brazo se comporta como un péndulo sólido, lo que realmente es el caso cuando no se aplica ningún par de torsión en la articulación y el eslabón se mueve únicamente por gravedad.

```
% Program for state-space form
% (Save in a file named 'ch8fdyn1.m')
% For one-link arm
function ydot = ch8fdyn1(t,y);
m = 1; a = 1; g = 9.81; tau = 0;
iner = m*a*a/3; grav = m*g*a/2;
ydot = [y(2); (tau - grav*sin(y(1)))/iner];
% Commands to integrate numerically
% (From MATLAB Window)
% For one link arm
tspan = [0 10]; y0 = [pi/2; 0];
[t,y] = ode45('ch8fdyn1', tspan, y0);
```

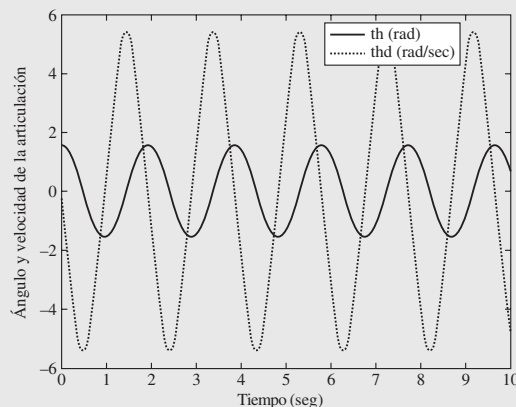


Figura 8.15 Simulación de un brazo de un eslabón, únicamente bajo gravedad

Ejemplo 8.13***Simulación de un manipulador de dos eslabones***

Para un manipulador de dos eslabones, el vector de aceleración bidimensional de articulación $\ddot{\theta}$ puede resolverse algebraicamente en la forma de la ecuación (8.114), donde la matriz de inercia y el vector asociados se dan en las ecuaciones (8.56)-(8.58). La forma espacio-estado se obtiene entonces como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}_1 &= \mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 &= \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h} - \boldsymbol{\gamma})\end{aligned}\quad (8.118)$$

donde el vector espacio-estado de cuatro dimensiones se determina por $\mathbf{y} \equiv [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2]^T$, en la que los vectores bidimensionales \mathbf{y}_1 y \mathbf{y}_2 son $\mathbf{y}_1 \equiv [\theta_1 \ \theta_2]^T$ y $\mathbf{y}_2 \equiv [\dot{\theta}_1 \ \dot{\theta}_2]^T$. Parecido al brazo de un eslabón, las entradas para el manipulador de dos eslabones también se toman como ceros, es decir, $\tau_1 = \tau_2 = 0$, y los valores iniciales del vector de estado es $\mathbf{y}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, junto con el valor de g como $g = 9.81$. La integración numérica se realiza mediante ODE45 de MATLAB, lo que se muestra a continuación. Los resultados de simulación se presentan en la figura 8.20.

```
% Program for state-space form
% (Save in a file named 'ch8fdyn2 m')
%Simulation of two-link manipulator
function ydot =ch8fdyn2(t,y);
m1 = 1; m2 = 1; a1 = 2; a2 = 1; g = 9.81; iner21 = m2*a1*a2;
tau1 = 0; tau2 = 0;
th1=y(1); th2 =y(2); th1d=y(3); th2d=y(4);

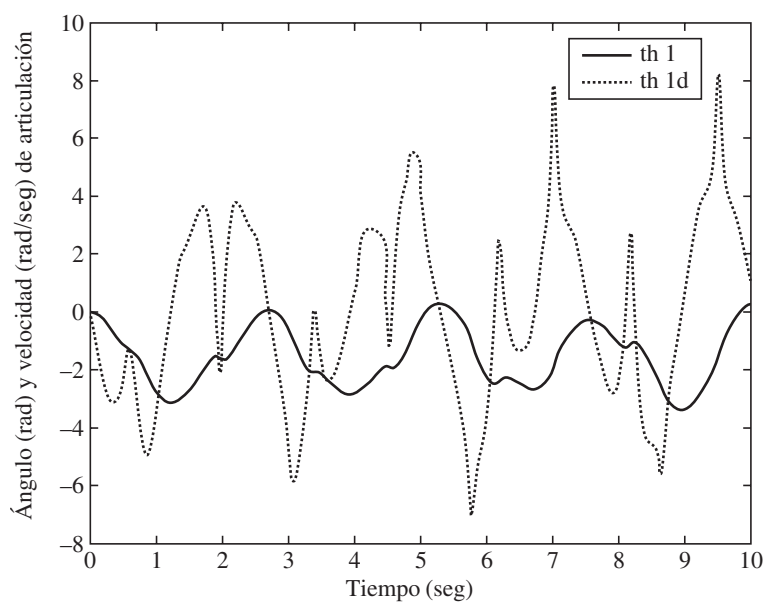
%Inertia matrix
sth2 = sin(th2); cth2 = cos(th2);
i22 = m2*a2*a2/3;
i21 = i22 + iner21*cth2/2; i12 = i21;
i11 = i22 + m1*a1*a1/3 + m2*a1*a1 + iner21*cth2;
im = [i11, i12; i21, i22];

%h-vector
h1 = - (m2*a1*a2*th1d + iner21/2*th2d)*th2d*sth2;
h2 = iner21/2*sth2*th1d*th1d;
hv=[h1;h2];

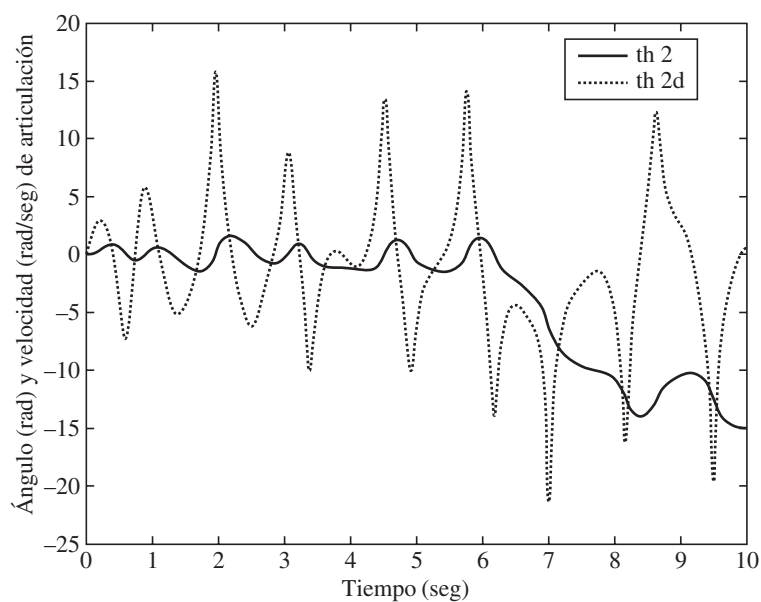
%gamma-vector
cth1 = cos(th1); cth12 = cos(th1 + th2);
gam1 = m1*g*a1/2*cth1 + m2*g*(a1*cth1 + a2/2*cth12);
gam2 = m1*g*a2/2*cth12;
gv = [gam1;gam2];

% RHS
tau=[tau1;tau2];
phi=tau-hv-gv; thdd=im\phi;
ydot=[y(3);y(4);thdd(1);thdd(2)];

% Commands to integrate numerically
% (From MATLAB Window)
%For two-link manipulator
tspan=[0 10]; y0=[0;0;0;0];
[t,y]=ode45('ch8fdyn2',tspan,y0);
```



a) Articulación 1



b) Articulación 2

Figura 8.16 Resultados de simulación para el manipulador de dos eslabones, únicamente bajo gravedad

RESUMEN

En este capítulo se presenta la dinámica de cuerpo rígido de un sistema robótico, usando tanto la formulación de Euler-Lagrange como la de Newton-Euler. Se da un ejemplo del brazo de un eslabón y un grado de libertad (DOF), y otro del manipulador de dos eslabones y $\text{DOF} = 2$, para ilustrar ambas formulaciones. También se presentan los resultados de dinámica inversa y directa que se usan en el control y la simulación de un robot.



EJERCICIOS

- 8.1 ¿De qué manera los teoremas de ejes paralelos y perpendiculares son útiles para la determinación del momento de inercia de masa de formas complejas?
- 8.2 Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange (EL) de movimiento para el manipulador de articulaciones revoluto-prismáticas (RP) que se muestra en la figura 5.25.
- 8.3 Repita el ejercicio 8.2, usando el algoritmo recursivo de Newton-Euler (NE).
- 8.4 Repita los ejercicios 8.2 y 8.3 para el manipulador prismático-revoluto (PR) que se presenta en la figura 5.26.
- 8.5 ¿Cuáles son las aparentes ventajas y desventajas de las formulaciones de Euler-Lagrange y Newton-Euler?
- 8.6 Utilizando el algoritmo recursivo NE, busque los pares de torsión de las articulaciones del manipulador planar de tres eslabones que se muestra en la figura 5.24.
- 8.7 Para el brazo de un eslabón que se presenta en la figura 8.7, suponga que el eslabón no tiene masa y que el efector final tiene una masa m . Derive su ecuación de movimiento. ¿Cómo se compara con la que se da en la ecuación (8.53)?
- 8.8 Defina la dinámica inversa y directa de un manipulador robótico.
- 8.9 ¿Qué es una forma espacio-estado? ¿Cuál es su origen?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

Basándose en búsquedas en la web, busque las respuestas a las siguientes preguntas:

- 8.10 Mencione tres ejemplos de software comerciales que sean capaces de ejecutar la dinámica de un manipulador robótico.
- 8.11 ¿Qué otras formulaciones dinámicas posibles hay para la dinámica de robots?
- 8.12 ¿Hay software disponibles para una arquitectura específica de un robot?



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 8.13 Escriba un programa para generar el par de torsión y la fuerza del manipulador RP, basándose en la ecuación de movimiento derivada en el ejercicio 8.2, mientras que se definen las trayectorias mediante la ecuación (8.113a). Tome $\theta(0) = 0$, $\theta(T) = \pi/2$, $b(0) = 0$; $\dot{b}(0) = 0$, $\dot{b}(T) = 0.1$ m ... θ y b son las variables de articulación para la articulación revoluta y prismática, respectivamente. Considere $T = 10$ seg.
- 8.14 Repita el ejercicio 8.13 para el robot PR que se menciona en el ejercicio 8.4.
- 8.15 Busque los pares de torsión de las articulaciones para el manipulador del ejercicio 8.6.
- 8.16 Busque los resultados de simulación para el manipulador de tres eslabones mientras que no se le aplique ningún par de torsión y nada más la gravedad esté actuando en él; las condiciones iniciales para las coordenadas generalizadas son:

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_3(0) = 0 \text{ rad}; \dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{\theta}_3(0) = 0 \text{ rad/seg}$$

Tome los parámetros geométricos e inerciales como:

$$a_1 = a_2 = 1 \text{ m}; a_3 = 0.5 \text{ m}; m_1 = m_2 = 1 \text{ kg}; m_3 = 0.5 \text{ kg}$$



Capítulo

9

Dinámica recursiva de robots*

Este capítulo introduce una de las metodologías basadas en los complementos ortogonales para la generación automática de algoritmos dinámicos, a saber, las dinámicas inversa y directa. Como se mencionó en el capítulo 8, la dinámica inversa es esencial para el control de manipuladores robóticos, mientras que la dinámica directa es necesaria para la simulación por computadora y el control de retroalimentación en tiempo real. Además, para resolver los problemas de dinámica inversa o directa de un sistema robótico complejo, se necesita un conjunto de ecuaciones dinámicas de movimiento del robot en estudio, las cuales se definen en el capítulo 8 usando las formulaciones de Euler-Lagrange (EL) y Newton-Euler (NE). Las ecuaciones de movimiento resultantes pueden ser ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE) o ecuaciones algebraicas diferenciales (DAE) (Shabana, 1994). El mismo conjunto puede obtenerse mediante planteamientos alternativos, por ejemplo, complementos ortogonales de las restricciones de velocidad (Huston y Passerello, 1974), las ecuaciones de Kane (Kane y Levinson, 1983) y otros. De entre ellos, muchos investigadores adoptaron el planteamiento de complementos ortogonales para la generación automática de las ecuaciones de movimiento para sistemas mecánicos complejos, tales como los robots que se estudian en este libro. Uno de estos complementos es el complemento ortogonal natural (NOC) que originalmente propusieron Ángeles y Lee (1988) para robots seriales, pero que generalizaron



¿Por qué recursivo?

Se sabe que los algoritmos recursivos proporcionan algoritmos de computación eficientes y numéricamente estables.

* Este capítulo requiere la comprensión exhaustiva de los capítulos 7 y 8. Por lo tanto, sólo debe impartirse a estudiantes de posgrado, es decir, alumnos del nivel M. Tech./M.S./Ph.D.

Saha y Ángeles (1991) para tomar en cuenta también las restricciones no holonómicas de robots móviles sobre ruedas. Posteriormente, Saha (1997, 1999, 2003) desacopló el NOC, lo que se denominó NOC Desacoplado (DeNOC) y mostró tener las siguientes ventajas:

- Permite obtener algoritmos de dinámica inversa y directa del orden recursivo (n), siendo n el número de eslabones del robot. El algoritmo de la dinámica directa recursiva no fue posible obtenerlo con la forma original del NOC.
- Cada elemento escalar de las matrices y vectores que se asocian con las ecuaciones de movimiento del manipulador robótico puede escribirse en forma analítica, lo que permite proporcionar la interpretación física, por ejemplo, la inercia del cuerpo articulado, etc., y le ayuda al programador en la depuración de los algoritmos de computación.
- Puesto que la metodología se construye sobre la mecánica básica y las teorías del álgebra lineal, este concepto pueden entenderlo incluso estudiantes de licenciatura.

El modelado que se basa en DeNOC se aplicó exitosamente a: 1) manipuladores seriales con base fija, como se usa en robots industriales (Saha, 1997; 1999; 2003); 2) robots seriales con base libre, una configuración para robots de espacio de flotación libre (Saha, 1996); 3) robots de tipo Plataforma Stewart paralelos de lazo cerrado (Saha y Schiehlen, 2001; Khan *et al.*, 2005) y máquinas herramientas hexápodos (Koteswara Rao *et al.*, 2006); 4) sistemas mecánicos generales de lazos cerrados múltiples (Chaudhary y Saha, 2006) y 5) sistemas seriales de eslabones flexibles (Mohan y Saha, 2007a). Como se enfatiza en los ensayos que se mencionan arriba y se demuestra en Mohan y Saha, (2007b), la formulación que se basa en DeNOC proporciona algoritmos eficientes y numéricamente estables.

9.1



Modelado dinámico

En esta sección se derivan ecuaciones dinámicas de movimiento de un robot serial de n eslabones y n grados de libertad, como se muestra en la figura 9.1a), usando las matrices del Complemento Ortogonal Natural Desacoplado (DeNOC). Primero que nada, se escriben en forma compacta las ecuaciones de movimiento

desacopladas de Newton-Euler (NE) para los n eslabones, que se introdujeron en la sección 8.3. Luego se expresan en forma matemática las restricciones entre los eslabones de las articulaciones, por ejemplo, revoluta o rotacional, prismática, etc., lo que trae a colación a la matriz DeNOC. El DeNOC relaciona las velocidades cartesianas de todos los eslabones con la rapidez o velocidad de las articulaciones. Finalmente,

la premultiplicación de la matriz DeNOC por las ecuaciones NE desacopladas proporciona un conjunto de ecuaciones independientes de movimiento, que no son otra cosa que las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange (EL) que se presentaron en la sección 8.2. Por ende, las ecuaciones EL se derivan por medio de matrices DeNOC sin tener que recurrir a las derivadas parciales complejas que proporcionó la ecuación (8.24).



Modelado

En el contexto de este libro, modelado significa una manera de entender el comportamiento de un robot, incluso sin tenerlo a la mano.

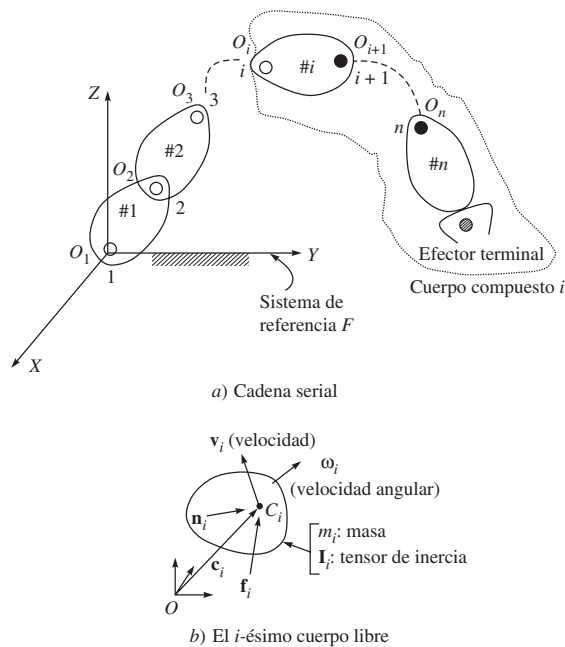


Figura 9.1 Un manipulador serial

9.1.1 Ecuaciones Newton-Euler sin acoplamiento

Para el manipulador serial de lazo abierto de n eslabones y n grados de libertad (DOF) de la figura 9.1 a), si m_i es la masa del i -ésimo eslabón e \mathbf{I}_i denota el tensor de inercia de 3×3 del i -ésimo eslabón alrededor de su centro de masa C_i como se indica en la figura 9.1b), entonces las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler para el i -ésimo eslabón pueden ser derivadas a partir de su diagrama de cuerpo libre, y pueden escribirse en orden inverso como

$$\text{Ecuación de Euler :} \quad \mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{n}_i \quad (9.1a)$$

$$\text{Ecuación de Newton :} \quad m_i \ddot{\mathbf{c}}_i = \mathbf{f}_i \quad (9.1b)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_i$ y $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ son los vectores tridimensionales de velocidad y aceleración angulares del i -ésimo eslabón, respectivamente, mientras que $\ddot{\mathbf{c}}_i$ es el vector tridimensional del centro de masa alrededor de C_i . Además, \mathbf{n}_i y \mathbf{f}_i son los vectores tridimensionales del momento resultante alrededor de C_i y la fuerza resultante en C_i , respectivamente. Cabe señalar en este punto que no se hace referencia alguna al sistema de coordenadas para expresar los vectores y matrices, ya que pueden representarse en cualquier sistema definido por el analista. Normalmente se expresan en el sistema adjunto al i -ésimo eslabón, es decir, el sistema $(i + 1)$. Sin embargo, se evitarán durante las derivaciones de las ecuaciones de movimiento de las secciones y subsecciones siguientes. Cuando se combinan las ecuaciones (9.1 a-b), las seis ecuaciones de movimiento de NE escalares y sin acoplamiento se escriben en forma compacta como

$$\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{t}}_i + \mathbf{W}_i \mathbf{M}_i \mathbf{E}_i \mathbf{t}_i = \mathbf{w}_i \quad (9.2a)$$

donde la matriz de masa \mathbf{M}_i de 6×6 y la matriz de velocidad angular \mathbf{W}_i de 6×6 para el i -ésimo eslabón se determinan por

$$\mathbf{M}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & m_i \mathbf{1} \end{bmatrix}; \text{ y } \mathbf{W}_i \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (9.2b)$$

en la que $\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{1}$ es el tensor de producto vectorial de 3×3 que se asocia con el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_i$, que se define como $(\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{1})\mathbf{x} \equiv \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{x}$ para cualquier vector cartesiano \mathbf{x} . Además, $\mathbf{1}$ y $\mathbf{0}$ son las matrices de identidad y cero de 3×3 , respectivamente. Es más, los vectores de 6 dimensiones, torsión \mathbf{t}_i y llave de torsión \mathbf{w}_i son como sigue:

$$\mathbf{t}_i \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \dot{\mathbf{c}}_i \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{w}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{n}_i \\ \mathbf{f}_i \end{bmatrix} \quad (9.2c)$$

donde, en contraste con la definición de torsión que se señaló en la sección 6.6, se toma en consideración la velocidad lineal del centro de masa del i -ésimo eslabón C_i . En la ecuación (9.2a), el vector $\dot{\mathbf{t}}_i$ es la derivada respecto al tiempo del vector de torsión \mathbf{t}_i , tal como se define en la ecuación (9.2c). La ecuación (9.2a) se escribe ahora para todos los n eslabones, es decir, $i = 1, \dots, n$, como

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{t}} + \mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{t} = \mathbf{w} \quad (9.3a)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{W} son la matriz de masa generalizada $6n \times 6n$ y la matriz generalizada de las velocidades angulares, respectivamente, las cuales se determinan por

$$\mathbf{M} \equiv \text{diag. } [\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n], \text{ y } \mathbf{W} \equiv \text{diag. } [\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_n] \quad (9.3b)$$

Asimismo, los vectores de $6n$ dimensiones de torsión y de llave de torsión generalizados se determinan por

$$\mathbf{t} \equiv [\mathbf{t}_1^T, \dots, \mathbf{t}_n^T]^T; \text{ y } \mathbf{w} \equiv [\mathbf{w}_1^T, \dots, \mathbf{w}_n^T]^T \quad (9.3c)$$

Las ecuaciones (9.3a-c) representan las ecuaciones de movimiento NE escalares y sin acoplamiento de $6n$ para los n eslabones en el manipulador robótico que aquí se estudia.

9.1.2 Restricciones cinemáticas

Los eslabones del manipulador robótico de la figura 9.1a) se acoplan por pares o articulaciones cinemáticas que son rotacionales o prismáticos. A partir del movimiento de cuerpo rígido de los dos cuerpos, a saber, $\#i$ y $\#j$, como se ve en la figura 9.2, pueden derivarse las velocidades angulares y lineales del i -ésimo eslabón, es decir, la torsión del i -ésimo cuerpo que se define en la ecuación (9.2c) según las velocidades del j -ésimo eslabón, y el movimiento de articulación de la i -ésima articulación. Éstos se derivan de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_j + \mathbf{e}_i \dot{\theta}_i \quad (9.4a)$$

$$\dot{\mathbf{c}}_i = \dot{\mathbf{c}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_j + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{d}_i \quad (9.4b)$$

Las seis ecuaciones de restricción de velocidad escalar también pueden escribirse en forma compacta como

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{B}_{ij} \mathbf{t}_j + \mathbf{p}_i \dot{\theta}_i \quad (9.4c)$$

donde θ_i es el desplazamiento de articulación, angular para una articulación rotacional y lineal para una articulación prismática. Además, la matriz \mathbf{B}_{ij} de 6×6 y el vector \mathbf{p}_i de 6

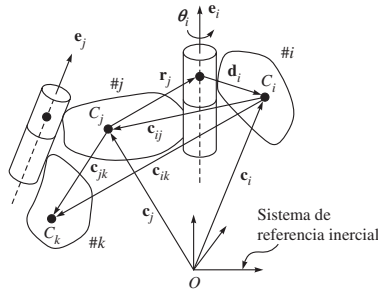


Figura 9.2 Tres cuerpos acoplados

dimensiones son funciones de las posiciones de los centros de masas de los dos cuerpos sucesivos C_i y C_j de la figura 9.2 y el eje de la articulación que los une, a saber, \mathbf{e}_i . Lo anterior se define como

$$\mathbf{B}_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{c}_{ij} \times \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i \times \mathbf{d}_i \end{bmatrix} \quad (9.4d)$$

donde $\mathbf{c}_{ij} \times \mathbf{1}$ es el tensor de producto vectorial que se asocia con el vector \mathbf{c}_{ij} como se muestra en la figura 9.2, que es definido de manera similar a $\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{1}$ de la ecuación (9.2b), es decir,

$$(\mathbf{c}_{ij} \times \mathbf{1})\mathbf{x} = \mathbf{c}_{ij} \times \mathbf{x}$$

para cualquier vector cartesiano tridimensional arbitrario \mathbf{x} . El vector \mathbf{c}_{ij} se determina por $\mathbf{c}_{ij} = -\mathbf{d}_i - \mathbf{r}_j$. Es interesante observar en este punto que la matriz \mathbf{B}_{ij} y el vector \mathbf{p}_i tienen las siguientes interpretaciones:

- Para dos cuerpos móviles rígidamente conectados $\#i$ y $\#j$, \mathbf{B}_{ij} propaga la torsión de $\#j$ a $\#i$. Por ende, la matriz \mathbf{B}_{ij} se denomina aquí matriz de propagación de torsión, la cual tiene las siguientes propiedades:

$$\mathbf{B}_{ij}\mathbf{B}_{jk} = \mathbf{B}_{ik} ; \mathbf{B}_{ii} = \mathbf{1}; \text{ y } \mathbf{B}_{ij}^{-1} = \mathbf{B}_{ji} \quad (9.5a)$$

- El vector \mathbf{p}_i , por otro lado, toma en cuenta el movimiento de la i -ésima articulación. Por lo tanto, \mathbf{p}_i se denomina vector de propagación de velocidad de articulación, el cual depende del tipo de articulación. Por ejemplo, la expresión de \mathbf{p}_i en la ecuación (9.4d) es para una articulación rotacional como la que se presenta en la figura 9.2, mientras que para una articulación prismática, el vector \mathbf{p}_i se determina por

$$\mathbf{p}_i \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{e}_i \end{bmatrix} : \text{ Para juntas prismáticas} \quad (9.5b)$$

donde \mathbf{e}_i es el vector unitario paralelo al eje del movimiento lineal. En forma correspondiente, $\dot{\theta}_i$ de la ecuación (9.4c) significará la rapidez de articulación lineal. No se tratarán otras articulaciones aquí porque cualquier otro tipo, por ejemplo, una esférica o una roscada, puede emplearse como combinación de tres pares rotacionales o de pares de rotacionales y prismáticos, respectivamente. Para $i = 1, \dots, n$, la ecuación (9.4c) se escribe en forma compacta para todas las n articulaciones como

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\theta}}, \text{ donde } \mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_l \mathbf{N}_d \quad (9.6a)$$

donde \mathbf{t} , que contiene las torsiones de todos los eslabones, es la torsión generalizada de $6n$ dimensiones que se define en la ecuación (9.3c). En la ecuación (9.6a) se expresa como una transformación lineal del vector n -dimensional de velocidad de articulación $\dot{\boldsymbol{\theta}}$. La matriz \mathbf{N}_l de $6n \times 6n$, la matriz \mathbf{N}_d de $6n \times n$ y el vector n -dimensional $\dot{\boldsymbol{\theta}}$, se definen como sigue:

$$\mathbf{N}_l \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{n1} & \mathbf{B}_{n2} & \cdots & \mathbf{1} \end{bmatrix}; \mathbf{N}_d \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}; \text{ y } \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} \quad (9.6b)$$

La matriz \mathbf{N} de $6n \times n$ de la ecuación (9.6a) no es más que la matriz de Complemento Ortogonal Natural (NOC) de las restricciones de velocidad (Ángeles y Lee, 1988), y sus formas desacopladas \mathbf{N}_l y \mathbf{N}_d se denominan matrices de NOC desacopladas (DeNOC) (Saha, 1997; 1999). Las expresiones de las matrices DeNOC permiten desarrollar los algoritmos dinámicos recursivos, inversos y directos que se necesitan en el control y la simulación de manipuladores robóticos.

9.1.3 Ecuaciones acopladas de movimiento

Las ecuaciones NE desacopladas de movimiento obtenidas por la ecuación (9.3a) se reescriben como

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{t}} + \mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{t} = \mathbf{w}^E + \mathbf{w}^C \quad (9.7)$$

donde \mathbf{w} de la ecuación (9.3a) se sustituye por $\mathbf{w} \equiv \mathbf{w}^E + \mathbf{w}^C$, donde \mathbf{w}^E y \mathbf{w}^C son las llaves de torsión externas y de restricción, respectivamente. La llave de torsión externa \mathbf{w}^E la aportan los momentos y fuerzas que resultan de los actuadores de articulaciones, efectos ambientales, etc., mientras que la llave de torsión de restricción \mathbf{w}^C se debe a la presencia de las articulaciones que contienen los momentos y fuerzas de reacción en las interfaces de articulaciones. Puesto que la llave de torsión de restricción \mathbf{w}^C no hace ningún trabajo útil para el movimiento de los eslabones del robot, la energía consumida que se debe a \mathbf{w}^C , es decir, $\Pi^C \equiv \mathbf{t}^T \mathbf{w}^C$, desaparece. El único propósito de \mathbf{w}^C es mantener la configuración relativa de los eslabones sin separarse. Si se usa la expresión para la torsión generalizada \mathbf{t} de la ecuación (9.6a), la energía disipada debido a \mathbf{w}^C , Π^C se determina por

$$\Pi^C \equiv \mathbf{t}^T \mathbf{w}^C \equiv \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{N}^T \mathbf{w}^C \equiv \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_l^T \mathbf{w}^C = 0 \quad (9.8a)$$

Para el robot serial de n eslabones y n grados de libertad, el vector de velocidad de articulación n -dimensional $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ es independiente. Por lo tanto, para cumplir con la ecuación (9.8a), debe ser válida la siguiente condición:

$$\mathbf{N}^T \mathbf{w}^C \equiv \mathbf{N}_d^T \mathbf{N}_l^T \mathbf{w}^C = 0 \quad (9.8b)$$

Ahora, cuando se multiplica la transpuesta del NOC \mathbf{N}^T a las ecuaciones de movimiento NE desacopladas, es decir, la ecuación (9.7), se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones dinámicas independientes:

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h} = \boldsymbol{\tau}, \text{ donde } \mathbf{h} \equiv \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (9.9a)$$

donde se usa el resultado de la ecuación (9.8b) y la derivada de tiempo de la torsión generalizada \mathbf{t} según la ecuación (9.6a), denominada, $\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{N}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{N}}\boldsymbol{\theta}$. Observe que la ecuación (9.9a),

en comparación con las ecuaciones de movimiento deducidas en el capítulo 8, es decir, la ecuación (8.44a), no contiene el término γ debido a la gravedad. De hecho, τ de la ecuación (9.9a) contiene el efecto de γ . De alguna manera, τ de la ecuación (9.9a) = τ de la ecuación (8.44a). Más aún,

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_d^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{N}_d$$

la matriz de inercia generalizada (GIM) de $n \times n$ es simétrica y positiva-definitiva;

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{N}} + \mathbf{W} \mathbf{M} \mathbf{N}) \equiv \mathbf{N}_d^T (\tilde{\mathbf{M}}_l + \tilde{\mathbf{M}}_w + \tilde{\mathbf{M}}_e) \mathbf{N}_d$$

la matriz $n \times n$ de términos de inercia convectiva;

$\mathbf{h} \equiv \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \mathbf{N}_d^T \tilde{\mathbf{w}}'$: el vector n -dimensional de términos de inercia convectiva;

$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{N}^T \mathbf{w}^E \equiv \mathbf{N}_d^T \tilde{\mathbf{w}}^E$: el vector n -dimensional de fuerzas generalizadas debido a los pares de torsión/fuerzas, y los que resulten de la gravedad, el ambiente y la disipación.

Asimismo, las matrices de $6n \times 6n$ $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{M}}_l$, $\tilde{\mathbf{M}}_w$, $\tilde{\mathbf{M}}_e$, y los vectores $6n$ -dimensionales $\tilde{\mathbf{w}}'$ y $\tilde{\mathbf{w}}^E$ se determinan por

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &\equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{M} \mathbf{N}_l; \tilde{\mathbf{M}}_l \equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{N}}_l, \tilde{\mathbf{M}}_w \equiv \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{M}}_e \equiv \mathbf{N}_l^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{M} \mathbf{N}_l \\ \tilde{\mathbf{w}}' &\equiv \mathbf{N}_l^T (\mathbf{M} \mathbf{t}' + \mathbf{W} \mathbf{M} \mathbf{t}); \mathbf{t}' \equiv (\dot{\mathbf{N}}_l + \mathbf{N}_l \mathbf{W}) \mathbf{N}_d \dot{\boldsymbol{\theta}}; \text{ y } \tilde{\mathbf{w}}^E \equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{w}^E \end{aligned} \quad (9.9b)$$

donde se usa $\dot{\mathbf{N}}_d = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{N}_d - \boldsymbol{\Omega} \equiv \text{diag.} [\boldsymbol{\Omega}_1, \dots, \boldsymbol{\Omega}_n]$; $\boldsymbol{\Omega}_i \equiv \text{diag.} [\mathbf{w}_i \times 1, \mathbf{w}_i \times 1]$, y las matrices \mathbf{N}_l , \mathbf{M} , \mathbf{W} y el vector \mathbf{w}^E están previamente definidos. Observe en lo anterior que \mathbf{t}' no es más que el vector de rapidez de torsión, mientras que $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$. Cabe señalar en este punto que la ecuación (9.9a) también se deduce en el capítulo 8, es decir, en la ecuación (8.44a), usando las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. En ese último caso, se requieren complejas diferenciaciones parciales, mientras que el primero proviene de las ecuaciones de movimiento de Newton-Euler que pueden visualizarse más fácilmente en el espacio cartesiano tridimensional y mediante conceptos sencillos de álgebra lineal.

9.2



Expresiones analíticas

Puede demostrarse que por medio del concepto de las matrices DeNOC, cada elemento de las GIM y MCI, así como del VIC y de las fuerzas generalizadas, puede expresarse en forma analítica, lo que permite extraer muchas interpretaciones físicas y sugiere maneras de simplificar las expresiones y la complejidad computacional. A continuación se obtienen las expresiones analíticas.

9.2.1 Matriz de inercia generalizada (GIM)

Las expresiones para la GIM \mathbf{I} de $n \times n$ se obtienen según la ecuación (9.9a) como

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{N}^T \mathbf{M} \mathbf{N} \equiv \mathbf{N}_d^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{N}_d \quad (9.10a)$$

donde $\tilde{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{M} \mathbf{N}_l$ es la matriz de masa compuesta simétrica de $6n \times 6n$, que se obtiene como

$$\tilde{\mathbf{M}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & & & & \text{sym} \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} & \tilde{\mathbf{M}}_2 & & & \\ \tilde{\mathbf{M}}_3 \mathbf{B}_{31} & \tilde{\mathbf{M}}_3 \mathbf{B}_{32} & \tilde{\mathbf{M}}_3 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n1} & \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n2} & \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n3} & \dots & \tilde{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix} \quad (9.10b)$$

donde “sym” denota los elementos simétricos de la matriz $\tilde{\mathbf{M}}$. La matriz $\tilde{\mathbf{M}}_i$ de 6×6 , que se evalúa de $i = n$ a $i = 1$ como

$$\tilde{\mathbf{M}}_i \equiv \mathbf{M}_i + \sum_{k=i+1}^n \mathbf{B}_{ki}^T \mathbf{M}_k \mathbf{B}_{ki} \quad (9.10c)$$

que requiere cálculos del orden n^2 , ya que hay una suma a través de $k = i + 1, \dots, n$. Sin embargo, una mirada profunda a la ecuación, junto con las primeras dos propiedades de la misma (9.5a), revela que la expresión de suma puede evaluarse en forma recursiva para $i = n, \dots, 1$ como

$$\tilde{\mathbf{M}}_i \equiv \mathbf{M}_i + \mathbf{B}_{i+1,i}^T \tilde{\mathbf{M}}_{i+1} \mathbf{B}_{i+1,i} \quad \text{donde } \tilde{\mathbf{M}}_n \equiv \mathbf{M}_n \quad (9.10d)$$

La ecuación (9.10d) tiene las siguientes interpretaciones físicas:

- 1) Es la matriz de masa de un cuerpo compuesto por los eslabones $\#n, \dots, \#i$, que se conectan en forma rígida. Esto se denomina el cuerpo compuesto i , como se indica en la figura 9.1a), cuyo nombre puede justificarse a partir de las matrices de bloque $\tilde{\mathbf{M}}_i$. En la ecuación (9.10d), si $i = n$, entonces

$$\tilde{\mathbf{M}}_n = \mathbf{M}_n \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & m_n \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (9.11a)$$

y para $i = n - 1$,

$$\tilde{\mathbf{M}}_{n-1} = \mathbf{M}_{n-1} + \mathbf{B}_{n,n-1}^T \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n,n-1} \quad (9.11b)$$

lo que puede reescribirse como

$$\tilde{\mathbf{M}}_{n-1} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_{n-1} & -\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1} \times \mathbf{1} \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1} \times \mathbf{1} & \tilde{m}_{n-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (9.11c)$$

donde el escalar \tilde{m}_{n-1} , el vector tridimensional $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1}$ y la matriz $\tilde{\mathbf{I}}_{n-1}$ se determinan por

$$\tilde{m}_{n-1} \equiv m_{n-1} + \tilde{m}_n, \quad \text{donde } \tilde{m}_n = m_n \quad (9.12a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1} \equiv m_n \mathbf{c}_{n,n-1} + \tilde{\boldsymbol{\delta}}_n, \quad \text{donde } \tilde{\boldsymbol{\delta}}_n = \mathbf{0} \quad (9.12b)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_{n-1} \equiv \mathbf{I}_{n-1} + \tilde{\mathbf{I}}_n - \tilde{\boldsymbol{\delta}}_{n-1} \times (\mathbf{c}_{n,n-1} \times \mathbf{1}), \quad \text{donde } \tilde{\mathbf{I}}_n = \mathbf{I}_n \quad (9.12c)$$

La matriz $\tilde{\mathbf{I}}_{n-1}$ es el tensor de inercia del cuerpo compuesto por los eslabones rígidamente conectados $\#(n-1)$ y $\#n$ respecto al centro de masa del $(i-1)$ -ésimo eslabón, es decir, C_{i-1} , en el cual el tercer término no es más que el que se asocia con la transfe-

rencia de la definición de \mathbf{I}_n de C_n a C_{n-1} , es decir, parecido al teorema de ejes paralelos que se proporciona en la subsección 8.1.3. Si se continúa con $i = n - 2, \dots, 1$, el escalár \tilde{m}_i , el vector tridimensional $\tilde{\delta}_i$ y la matriz $\tilde{\mathbf{I}}_i$ de 3×3 se calculan como sigue:

$$\tilde{m}_i = m_i + \tilde{m}_{i+1} \quad (9.13a)$$

$$\tilde{\delta}_i \equiv m_{i+1} \mathbf{c}_{i+1,i} + \tilde{\delta}_{i+1} \quad (9.13b)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}_i = \mathbf{I}_i + \tilde{\mathbf{I}}_{i+1} - \tilde{\delta}_{i+1} \times (\mathbf{c}_{i+1,i} \times \mathbf{1}) - \mathbf{c}_{i+1,i} \times (\tilde{\delta}_i \times \mathbf{1}) \quad (9.13c)$$

- 2) El efecto de inercia del cuerpo compuesto $(i + 1)$, $\tilde{\mathbf{I}}_{i+1}$ se toma en cuenta respecto a C_i y se suma con el tensor de inercia del eslabón i respecto a C_i , \mathbf{I}_i para dar la inercia del cuerpo compuesto i respecto a C_i , es decir, $\tilde{\mathbf{I}}_i$. Otros términos, a saber, los bloques 21 y 22 de la ecuación (9.11c), se incluyen de forma parecida para definir la matriz de masa del cuerpo compuesto i , o la matriz de masa compuesto $\tilde{\mathbf{M}}_i$. Entonces, usando la expresión $\mathbf{I} \equiv \mathbf{N}_d^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{N}_d$, la GIM simétrica \mathbf{I} se escribe como

$$\mathbf{I} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \tilde{\mathbf{M}}_1 \mathbf{p}_1 & \dots & \dots & \dots & \text{sym} \\ \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{p}_2 & \dots & \dots & \vdots \\ \mathbf{p}_3^T \tilde{\mathbf{M}}_3 \mathbf{B}_{31} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_3^T \tilde{\mathbf{M}}_3 \mathbf{B}_{32} \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3^T \tilde{\mathbf{M}}_3 \mathbf{p}_3 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n1} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_n^T \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n2} \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_n^T \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n3} \mathbf{p}_3 & \dots & \mathbf{p}_n^T \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \quad (9.14a)$$

donde “sym” denota los elementos simétricos y los elementos (i, j) de la GIM, que se denotan por i_{ij} , lo que se proporciona en forma analítica como

$$i_{ij} \equiv \mathbf{p}_i^T \tilde{\mathbf{M}}_i \mathbf{B}_{ij} \mathbf{p}_j, \text{ para } i = n, \dots, 1; j = i, \dots, 1 \quad (9.14b)$$

Observe que los elementos simétricos que aparecen encima de los elementos diagonales de la GIM en la ecuación (9.14a) pueden expresarse como

$$i_{ji} \equiv \mathbf{p}_j^T \mathbf{B}_{ij}^T \tilde{\mathbf{M}}_i \mathbf{p}_i, \text{ para } i = n, \dots, 1; j = i - 1, \dots, 1 \quad (9.14c)$$

En la ecuación (9.14a), $i_{ij} = i_{ji}$. Por ende, sólo se necesita calcular (9.14b) o (9.14c) en el algoritmo dinámico. En los ejemplos de este capítulo se calcularán los elementos del triángulo inferior de la GIM por medio de (9.14b).

9.2.2 Matriz de términos de inercia convectiva (MCI)

Las expresiones analíticas de la matriz de términos de inercia convectiva (MCI) se determinan según la definición de MCI que se señaló en seguida de la ecuación (9.9), es decir,

$$\mathbf{C} \equiv \mathbf{N}^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{N}} + \mathbf{W} \mathbf{M} \mathbf{N}) \equiv \mathbf{N}_d^T (\tilde{\mathbf{M}}_l + \tilde{\mathbf{M}}_w + \tilde{\mathbf{M}}_e) \mathbf{N}_d \quad (9.15a)$$

donde las matrices $\tilde{\mathbf{M}}_l$, $\tilde{\mathbf{M}}_w$ y $\tilde{\mathbf{M}}_e$ de $6n \times 6n$ se reproducen según la ecuación (9.9b) como

$$\tilde{\mathbf{M}}_l \equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{N}}_l; \tilde{\mathbf{M}}_w \equiv \tilde{\mathbf{M}} \boldsymbol{\Omega} \equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{M} \mathbf{N}_l \boldsymbol{\Omega}; \text{ y } \tilde{\mathbf{M}}_e \equiv \mathbf{N}_l^T \mathbf{W} \mathbf{M} \mathbf{N}_l \quad (9.15b)$$

La matriz $\tilde{\mathbf{M}}_l$ se obtiene entonces como

$$\tilde{\mathbf{M}}_l \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{B}_{21}^T & \dots & \mathbf{B}_{n1}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{B}_{n,n-1}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{M}_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \dot{\mathbf{B}}_{21} & \mathbf{O} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{O} \\ \dot{\mathbf{B}}_{n1} & \dots & \dot{\mathbf{B}}_{n,n-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (9.15c)$$

donde la matriz $\dot{\mathbf{B}}_{i+1,i}$ de 6×6 se determina por

$$\dot{\mathbf{B}}_{i+1,i} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ -(\dot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{d}}_{i+1}) \times \mathbf{1} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (9.15d)$$

en la que $\dot{\mathbf{r}}_i = \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i$ y $\dot{\mathbf{d}}_{i+1} = \boldsymbol{\omega}_{i+1} \times \mathbf{d}_{i+1}$. La expresión de $\tilde{\mathbf{M}}_l$ se reescribe entonces como

$$\tilde{\mathbf{M}}_l \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{21}^T \tilde{\mathbf{H}}_{21} & \mathbf{B}_{31}^T \tilde{\mathbf{H}}_{32} & \dots & \mathbf{B}_{n1}^T \tilde{\mathbf{H}}_{n,n-1} & \mathbf{O} \\ \tilde{\mathbf{H}}_{21} & \mathbf{B}_{32}^T \tilde{\mathbf{H}}_{32} & \dots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}_{31} & \tilde{\mathbf{H}}_{32} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mathbf{B}_{n,n-1}^T \tilde{\mathbf{H}}_{n,n-1} & \vdots \\ \tilde{\mathbf{H}}_{n1} & \tilde{\mathbf{H}}_{n2} & \dots & \tilde{\mathbf{H}}_{n,n-1} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (9.15e)$$

En la ecuación (9.15e), $\tilde{\mathbf{H}}_{ij} = \tilde{\mathbf{M}}_i \dot{\mathbf{B}}_{ij} + \mathbf{B}_{i+1,i}^T \tilde{\mathbf{H}}_{i+1,i}$ y para $i = n$, $\tilde{\mathbf{H}}_{n+1,n} = \mathbf{O}$. Luego, la matriz $\tilde{\mathbf{M}}_w$ de $6n \times 6n$, como se define en la ecuación (9.15b), se forma como

$$\tilde{\mathbf{M}}_w \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 & \dots & \dots & \text{sym} \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} & \tilde{\mathbf{M}}_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n1} & \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n2} & \dots & \tilde{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Omega}_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \dots & \dots & \boldsymbol{\Omega}_n \end{bmatrix}$$

lo que proporciona

$$\tilde{\mathbf{M}}_w \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 & \mathbf{B}_{21}^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 & \dots & \mathbf{B}_{n1}^T \tilde{\mathbf{M}}_n \boldsymbol{\Omega}_n \\ \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} \boldsymbol{\Omega}_1 & \tilde{\mathbf{M}}_1 \boldsymbol{\Omega}_2 & \dots & \mathbf{B}_{n2}^T \tilde{\mathbf{M}}_n \boldsymbol{\Omega}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n1} \boldsymbol{\Omega}_1 & \tilde{\mathbf{M}}_n \mathbf{B}_{n2} \boldsymbol{\Omega}_2 & \dots & \tilde{\mathbf{M}}_n \boldsymbol{\Omega}_n \end{bmatrix} \quad (9.15f)$$

Finalmente, la matriz $\tilde{\mathbf{M}}_e$ se obtiene como

$$\tilde{\mathbf{M}}_e \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{B}_{21}^T & \vdots & \mathbf{B}_{n1}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{B}_{n,n-1}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{M}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \boldsymbol{\Omega}_2 \mathbf{M}_2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \boldsymbol{\Omega}_n \mathbf{M}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{n1} & \mathbf{B}_{n2} & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

lo que puede escribirse en forma compacta como

$$\tilde{\mathbf{M}}_e \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}}'_1 & \dots & \dots & \text{sym} \\ \tilde{\mathbf{M}}'_2 \mathbf{B}_{21} & \tilde{\mathbf{M}}'_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{M}}'_n \mathbf{B}_{n1} & \tilde{\mathbf{M}}'_n \mathbf{B}_{n2} & \dots & \tilde{\mathbf{M}}'_n \end{bmatrix} \quad (9.15g)$$

donde $\tilde{\mathbf{M}}'_i$ para $i = n, \dots, 1$ se calcula en forma parecida a la matriz $\tilde{\mathbf{M}}_i$ de la ecuación (9.10d) como

$$\tilde{\mathbf{M}}'_i = \mathbf{M}'_i + \mathbf{B}_{i+1,i}^T \tilde{\mathbf{M}}'_{i+1} \mathbf{B}_{i+1,i} \quad (9.15h)$$

en la que $\mathbf{M}'_i = \mathbf{W}_i \mathbf{M}_i$ para $i = n, \dots, 1$. Los elementos escalares de la MCI, \mathbf{C} es decir, c_{ij} para $i, j = n, \dots, 1$ se obtienen entonces explícitamente según la ecuación (9.15) como

$$c_{ij} \equiv \mathbf{p}_i^T [\mathbf{B}_{j+1,i}^T \tilde{\mathbf{H}}_{j+1,i} + \mathbf{B}_{ji}^T (\tilde{\mathbf{M}}_j \boldsymbol{\Omega}_j + \tilde{\mathbf{M}}'_j)] \mathbf{p}_j \quad \text{si } i \leq j \quad (9.15i)$$

$$c_{ij} \equiv \mathbf{p}_i^T (\tilde{\mathbf{M}}_j \mathbf{B}_{ij} \mathbf{W}_j + \tilde{\mathbf{H}}_{ij} + \tilde{\mathbf{M}}'_i) \mathbf{p}_j \quad \text{de otra manera.}$$

Al comparar las ecuaciones (9.14b) y (9.15i), se observa que los elementos de la GIM y de la MCI se expresan de manera uniforme, es decir, $\mathbf{p}_i^T(\cdot)\mathbf{p}_j$, donde (\cdot) denota el argumento de la matriz. En la ecuación (9.15i), la expresión analítica explícita para cada elemento de la MCI está disponible, cuyo uso no es recomendable para el cálculo del vector $\mathbf{h}(\equiv \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}})$ en la ecuación (9.9a), pero es conveniente para las interpretaciones físicas y la depuración. El vector \mathbf{h} se llama aquí vector de los términos de inercia convectiva (VCI). Mientras que la evaluación explícita de la MCI, \mathbf{C} requiere cálculos del orden (n^2) —donde n es el grado de libertad del robot—, el VCI \mathbf{h} puede calcularse en forma recursiva y sólo requiere operaciones del orden n . El algoritmo del orden n para el VCI se proporciona a continuación. Ahora, por lo que respecta a la interpretación física de la MCI, observe que, para un robot planar con articulaciones exclusivamente rotacionales, todos los ejes son paralelos y no cambian de sentido mientras el robot está en movimiento. De allí su derivada de tiempo $\dot{\mathbf{N}}_d = \mathbf{W}\mathbf{N}_d = \mathbf{O}$. Como resultado, el término $\tilde{\mathbf{M}}_w$ desaparece para proporcionar expresiones más sencillas.

9.2.3 Vector de términos de inercia convectiva (VCI)

El vector de términos de inercia convectiva (VCI) \mathbf{h} se proporciona, según la ecuación (9.9a), como

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{N}_d^T \tilde{\mathbf{w}}', \text{ donde } \tilde{\mathbf{w}}' = \mathbf{N}_l^T (\mathbf{M}\mathbf{t}' + \mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{t}) \text{ y } \mathbf{t}' = (\dot{\mathbf{N}}_l + \mathbf{N}_l \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{N}_d \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (9.16)$$

Observe que \mathbf{t}' es el vector generalizado de velocidad de torsión, mientras que $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$, es decir, contiene los términos centrífugos y de aceleración de Coriolis. Si se introducen las siguientes notaciones

$$\mathbf{M}' = \mathbf{W}\mathbf{M} \text{ y } \mathbf{w}' = \mathbf{M}\mathbf{t}' + \mathbf{M}'\mathbf{t}$$

y se sustituye la expresión para \mathbf{N}_l de la ecuación (9.6b) en la ecuación (9.16), se obtiene

$$\tilde{\mathbf{w}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{B}_{21}^T & \dots & \mathbf{B}_{n1}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{B}_{n,n-1}^T \\ \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}'_1 \\ \mathbf{w}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}'_1 \\ \tilde{\mathbf{w}}'_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{w}}'_n \end{bmatrix} \quad (9.17a)$$

donde $\mathbf{w}'_i = \mathbf{M}_i \mathbf{t}'_i + \mathbf{M}'_i \mathbf{t}_i$, para $i = n, \dots, 1$. El vector de $6n$ dimensiones \mathbf{w}' puede interpretarse como la llave de torsión generalizada debida a los términos de inercia convectiva. Además, los elementos del vector $\tilde{\mathbf{w}}'_i$ de la ecuación (9.17a) pueden obtenerse en forma recursiva como

$$\tilde{\mathbf{w}}'_i = \mathbf{w}'_i + \mathbf{B}_{i+1,i}^T \tilde{\mathbf{w}}'_{i+1}, \text{ donde } \tilde{\mathbf{w}}'_n = \mathbf{w}'_n \quad (9.17b)$$

Asimismo, si se usa la expresión para \mathbf{N}_d , el VCI de la ecuación (9.16) \mathbf{h} se determina por

$$\mathbf{h} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \tilde{\mathbf{w}}'_1 \\ \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{w}}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \tilde{\mathbf{w}}'_n \end{bmatrix} \quad (9.18a)$$

en la que cada elemento \mathbf{h}_i se escribe como

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{p}_i^T \tilde{\mathbf{w}}'_i, \text{ para } i = n, \dots, 1 \quad (9.18b)$$

Juntas, las expresiones de las ecuaciones (9.17b) y (9.18b) proporcionan un algoritmo de orden n para el VCI.

9.2.4 Fuerza generalizada

Las expresiones para los elementos de las fuerzas generalizadas τ que se proporcionan según la ecuación (9.9a) son las siguientes:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{N}_d \tilde{\mathbf{w}}^E, \text{ donde } \tilde{\mathbf{w}}^E = \mathbf{N}_l^T \mathbf{w}^E \quad (9.19a)$$

Cuando se sustituye la expresión para \mathbf{N}_l de la ecuación (9.6b) y se observa que $\mathbf{w}^E \equiv [(\mathbf{w}_1^E)^T \dots (\mathbf{w}_n^E)^T]^T$, el vector de $6n$ dimensiones $\tilde{\mathbf{w}}^E$ se escribe como

$$\tilde{\mathbf{w}}^E \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{B}_{21}^T & \dots & \mathbf{B}_{n,1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{B}_{n,n-1}^T \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^E \\ \mathbf{w}_2^E \\ \vdots \\ \mathbf{w}_n^E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_1^E \\ \tilde{\mathbf{w}}_2^E \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{w}}_n^E \end{bmatrix} \quad (9.19b)$$

donde $\tilde{\mathbf{w}}_i^E \equiv \mathbf{w}_i^E + \mathbf{B}_{i+1,i}^T \tilde{\mathbf{w}}_{i+1}^E$ y $\tilde{\mathbf{w}}_n^E \equiv \mathbf{w}_n^E$. La fuerza generalizada τ se encuentra entonces como

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \tilde{\mathbf{w}}_1^E \\ \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{w}}_2^E \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \tilde{\mathbf{w}}_n^E \end{bmatrix} \quad (9.20a)$$

Según la ecuación (9.19a), cada elemento del vector τ n -dimensional, es decir, τ_i , se obtiene entonces a partir de

$$\tau_i = \mathbf{p}_i^T \tilde{\mathbf{w}}_i^E, \text{ para } i = n, \dots, 1 \quad (9.20b)$$

Las ecuaciones (9.9a), (9.14b), (9.15i) o (9.18b) y (9.20b) juntas proporcionan las expresiones explícitas para las ecuaciones dinámicas de movimiento para un robot serial de n eslabones y n grados de libertad.

Ejemplo 9.1

Brazo planar de un eslabón

Para el brazo de un eslabón que se presenta en la figura 9.3, se utiliza la ecuación de movimiento mediante el concepto de las matrices DeNOC. Si se utilizan las ecuaciones (9.6a-b), las matrices DeNOC para el brazo de un eslabón se obtienen mediante

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_l \mathbf{N}_d = \mathbf{p},$$

donde $\mathbf{N}_l = \mathbf{1}$, y $\mathbf{N}_d = \mathbf{p}$ (9.21)

Observe en lo anterior que no se puso el subíndice 1 al vector \mathbf{p} de 6 dimensiones de propagación de la velocidad de articulaciones, ya que sólo hay una articulación. El término de inercia, que es escalar para el brazo de un eslabón, se obtiene entonces según la ecuación (9.14b) como

$$I(\equiv i_{11}) = \mathbf{p}^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{p} = \mathbf{e}^T \mathbf{I} \mathbf{e} + m(\mathbf{e} \times \mathbf{d})^T (\mathbf{e} \times \mathbf{d});$$

donde $\mathbf{p} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \times \mathbf{d} \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & m\mathbf{1} \end{bmatrix}$ (9.22a)

En la ecuación (9.22a), el subíndice 1 tampoco se usa en las notaciones de vector y matriz, ya que sólo existe un eslabón y una articulación. Entonces, los vectores tridimensionales \mathbf{e} y \mathbf{d} en el sistema fijo, es decir, el sistema 1, se obtienen como

$$[\mathbf{e}]_1 \equiv [0 \quad 0 \quad 1]^T; [\mathbf{d}]_1 \equiv \left[\frac{1}{2}ac\theta \quad \frac{1}{2}as\theta \quad 0 \right]^T \quad (9.22b)$$

Además, la matriz de inercia \mathbf{I} de 3×3 para el brazo de un solo eslabón alrededor de su centro de masa C en la trama que fija el eslabón, es decir, el sistema 1, se escribe como

$$[\mathbf{I}]_2 = \frac{ma^2}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.22c)$$

Usando la ecuación (8.72) puede escribirse

$$[\mathbf{I}]_1 = \mathbf{Q}[\mathbf{I}]_2 \mathbf{Q}^T = \frac{ma^2}{12} \begin{bmatrix} c^2\theta & s\theta c\theta & 0 \\ s\theta c\theta & s^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.22d)$$

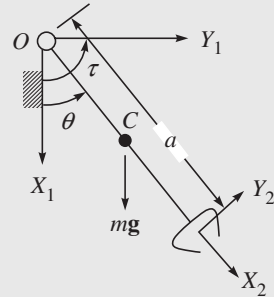


Figura 9.3 Brazo de un eslabón

donde \mathbf{Q} es la matriz de rotación de 3×3 proporcionada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.22e)$$

La sustitución de las ecuaciones (9.22b-d) en la ecuación (9.22a) proporciona entonces

$$I = \frac{1}{3}ma^2 \quad (9.22f)$$

Luego se obtiene el VCI mediante la ecuación (9.15i), donde para el caso de un eslabón $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{1}$, $\mathbf{B}_{21}^T \tilde{\mathbf{H}}_{21} = \mathbf{0}$, ya que no se presenta, y $\dot{\mathbf{M}}' \equiv \mathbf{M}' = \mathbf{W}\mathbf{M}$. Por lo tanto,

$$C(\equiv c_{11}) = \mathbf{p}^T (\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{W}\mathbf{M})\mathbf{p} = \dot{\theta} \mathbf{e}^T [(\mathbf{I}\mathbf{e} \times \mathbf{e}) + (\mathbf{e} \times \mathbf{I}\mathbf{e}) - \mathbf{m}\mathbf{d} \times \mathbf{d}] = 0 \quad (9.23a)$$

donde la expresión de la matriz \mathbf{W} de 6×6 que se usa arriba se determina por

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \mathbf{e} \times \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\theta} \mathbf{e} \times \mathbf{1} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \mathbf{e} \times \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (9.23b)$$

Además, el vector \mathbf{p} de 6 dimensiones y la matriz \mathbf{M} de 6×6 se obtienen con la ecuación (9.22a). Es más, las propiedades de los productos vectoriales se utilizan para obtener el resultado de la ecuación (9.23a), es decir, $\mathbf{d} \times \mathbf{d} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{e}^T (\mathbf{I}\mathbf{e} \times \mathbf{e}) = 0$ o $\mathbf{e}^T (\mathbf{e} \times \mathbf{I}\mathbf{e}) = 0$. Este último resultado se debe al hecho de que el vector \mathbf{e} es ortogonal al que se obtiene de su producto vectorial, a saber, $\mathbf{e} \times \mathbf{I}\mathbf{e}$. Finalmente, se obtiene la fuerza generalizada según

$$\tau_1 = \mathbf{N}^T \mathbf{w}^E = \begin{bmatrix} \mathbf{e}^T & (\mathbf{e} \times \mathbf{d})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \tau - \frac{1}{2} mgas\theta \quad (9.23c)$$

donde el momento externo debido al actuador, así como la fuerza externa debida a la gravedad representadas en el sistema 1, se dan como

$$[\mathbf{n}]_1 \equiv [0 \quad 0 \quad \tau]^T, [\mathbf{f}]_1 \equiv [mg \quad 0 \quad 0]^T \quad (9.23d)$$

El subíndice 1 se agrega a la fuerza generalizada en el lado izquierdo de la ecuación (9.23c), es decir, τ_1 . Esto sirve para distinguir la fuerza generalizada τ_1 del par de torsión del actuador τ en la ecuación (9.23d).

En este punto cabe señalar que para sistemas sencillos como el de este ejemplo, podrá ser más fácil obtener la ecuación dinámica de movimiento, ecuación (9.23c), a partir de la aplicación directa de las expresiones en términos de la matriz NOC que aparecen después de la ecuación (9.9a).

Ejemplo 9.2

Manipulador planar de dos eslabones

En la figura 9.4 se presenta un manipulador planar de dos eslabones con dos articulaciones rotacionales. Este manipulador tiene dos grados de libertad y sus coordenadas independientes son θ_1 y θ_2 . En forma correspondiente, las velocidades de las articulaciones son $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_2$. El vector bidimensional de velocidad de articulaciones $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ se define entonces como

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} \equiv [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2]^T \quad (9.24)$$

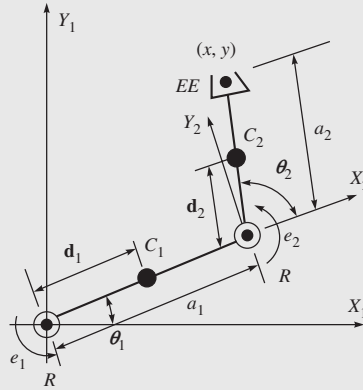


Figura 9.4 Manipulador planar de dos eslabones

Las longitudes de los eslabones son a_1 y a_2 , y las masas son m_1 y m_2 . Los elementos de la matriz de inercia generalizada (GIM) se calculan entonces como sigue: para $i, j = 2$, el cálculo de i_{22} se muestra abajo, según la ecuación (9.14b), como

$$i_{22} \equiv \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{22} \mathbf{p}_2 \quad (9.25a)$$

donde

$$\mathbf{p}_2 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_{22} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{1} \end{bmatrix};$$

$$\text{y} \quad \tilde{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{M}_2 \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & m_2 \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (9.25b)$$

donde el vector $[\mathbf{e}_2]_2 \equiv [\mathbf{e}_2]_1 \equiv [0, 0, 1]^T$ es el vector unitario a lo largo del eje de la segunda articulación rotacional, como se indica en la figura 9.4. El vector \mathbf{d}_2 se muestra en la figura 9.4, mientras que \mathbf{I}_2 es el tensor de inercia alrededor de C_2 . Usando la ecuación (9.25b) y suponiendo que el centro de masa se encuentra en el centro de la longitud del eslabón, es decir, $d_2 = a_2/2$, el elemento (2, 2) de la GIM, es decir, i_{22} , se obtiene entonces en forma explícita, similarmente a I ($\equiv i_{11}$) del ejemplo 9.1 como

$$\begin{aligned} i_{22} &= [\mathbf{e}_2]_2^T [\mathbf{I}_2]_2 [\mathbf{e}_2]_2 + m_2 [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_2]_2^T [\mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_2]_2 \\ &= \frac{1}{12} m_2 a_2^2 + \frac{1}{4} m_2 a_2^2 = \frac{1}{3} m_2 a_2^2 \end{aligned} \quad (9.25c)$$

Para $i = 2, j = 1$, el elemento i_{21} se proporciona entonces como

$$i_{21} = \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} \mathbf{p}_1, \text{ donde } \mathbf{p}_1 \equiv [\mathbf{e}_1^T, (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{d}_1)^T]^T \quad (9.26a)$$

y la matriz \mathbf{B}_{21} se determina por

$$\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ -(\mathbf{r}_1 + \mathbf{d}_2) \times \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (9.26b)$$

donde el vector $\mathbf{r}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{d}_1$. Por lo tanto, el elemento (2, 1) de la GIM, i_{21} , se calcula, parecido a i_{22} , como

$$\begin{aligned} i_{21} &= \mathbf{e}_2^T \mathbf{I}_2 \mathbf{e}_1 + m_2 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{d}_2)^T [\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{a}_1 + \mathbf{d}_2)] \\ &= \mathbf{e}_2^T \mathbf{I}_2 \mathbf{e}_1 + m_2 \mathbf{d}_2^T \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{d}_2^T \mathbf{d}_2 \\ &= \frac{1}{12} m_2 a_2^2 + \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 c \theta_2 + \frac{1}{4} m_2 a_2^2 \\ &= \frac{1}{3} m_2 a_2^2 + \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 c \theta_2 \end{aligned} \quad (9.26c)$$

En la ecuación (9.26c) se aplica la regla del producto vectorial, a saber $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^T (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{c})(\mathbf{b}^T \mathbf{d}) - (\mathbf{a}^T \mathbf{d})(\mathbf{b}^T \mathbf{c})$. Además, $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_2 = 1$ porque \mathbf{e}_2 es un vector unitario, $\mathbf{e}_2^T \mathbf{d}_1 = 0$ porque \mathbf{e}_2 es ortogonal a \mathbf{d}_1 . Además, $\mathbf{d}_i = \mathbf{a}_i/2$, $\mathbf{r}_i + \mathbf{d}_i = \mathbf{a}_i$ para $i = 1, 2$, $\mathbf{r}_1 + \mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_1$, y $\mathbf{d}_2^T \mathbf{a}_1 = \frac{1}{2} a_2 a_1 c \theta_1$. Entonces, la matriz $\tilde{\mathbf{M}}_1$ se calcula como

$$\tilde{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{B}_{21}^T \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_1 & -\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1 \times \mathbf{1} \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}_1 \times \mathbf{1} & \tilde{m}_1 \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (9.27a)$$

donde $\tilde{\mathbf{I}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1$ y \tilde{m}_1 se dan a continuación;

$$\tilde{\mathbf{I}}_1 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - m_2 \mathbf{c}_{21} \times (\tilde{\boldsymbol{\delta}}_1 \times \mathbf{1}); \quad \tilde{\boldsymbol{\delta}}_1 = m_2 \mathbf{c}_{21}; \quad \text{y} \quad \tilde{m}_1 = m_1 + m_2 \quad (9.27b)$$

en la que se usan $\tilde{\mathbf{I}}_2 \equiv \mathbf{I}_2$, $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_2 = \mathbf{0}$, y $\tilde{m}_2 = m_2$. Ahora, para $i, j = 1$, el elemento (1, 1) de la GIM, i_{11} , se encuentra como

$$i_{11} = \mathbf{e}_1^T \tilde{\mathbf{I}}_1 \mathbf{e}_1 + \tilde{m}_1 \mathbf{d}_1^T \mathbf{d}_1 = \frac{1}{3} (m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2) + m_2 a_1^2 + m_2 a_1 a_2 c \theta_2 \quad (9.28a)$$

Para $i, j = 2, 1$, los elementos de la MCI se obtienen, según la ecuación (9.15i), como

$$c_{22} = \mathbf{p}_2^T (\mathbf{B}_{32}^T \tilde{\mathbf{H}}_{32} + \mathbf{B}_{22}^T (\tilde{\mathbf{M}}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 + \tilde{\mathbf{M}}'_2) \mathbf{p}_2) = 0 \quad (9.29a)$$

$$c_{21} = \mathbf{p}_2^T [\tilde{\mathbf{H}}_{21} + \tilde{\mathbf{M}}_2 \mathbf{B}_{21} \boldsymbol{\Omega}_1 + \tilde{\mathbf{M}}'_2 \mathbf{B}_{21}] \mathbf{p}_1 = \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 s \theta_2 \dot{\theta}_1 \quad (9.29b)$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \mathbf{p}_1^T [\mathbf{B}_{31}^T \tilde{\mathbf{H}}_{32} + \mathbf{B}_{21}^T (\tilde{\mathbf{M}}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 + \tilde{\mathbf{M}}'_2) \mathbf{p}_2] \\ &= -\frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 s \theta_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (9.29c)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \mathbf{p}_1^T [\mathbf{B}_{21}^T \tilde{\mathbf{H}}_{21} + \mathbf{B}_{11}^T (\tilde{\mathbf{M}}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 + \tilde{\mathbf{M}}'_2) \mathbf{p}_1] \\ &= -\frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 s \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (9.29d)$$

En las ecuaciones (9.29a-c), se utilizaron $\tilde{\mathbf{H}}_{32} \equiv \mathbf{0}$ y $\tilde{\mathbf{M}}'_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$. Además, para robots planares puede demostrarse que el término $\mathbf{P}_i^T \mathbf{B}_{ji}^T \tilde{\mathbf{M}}_j \boldsymbol{\Omega}_j \mathbf{P}_j$ para $i, j = 1, 2$ desaparece. Finalmente, puede demostrarse que los elementos del vector \mathbf{h} tienen las siguientes expresiones:

$$h_2 = \mathbf{p}_2^T \tilde{\mathbf{w}}'_2 = \frac{1}{2} m_2 a_1 a_2 s \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \quad (9.30a)$$

$$h_1 = \mathbf{p}_1^T \tilde{\mathbf{w}}'_1 = -m_2 a_1 a_2 s \theta_2 \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \right) \dot{\theta}_2 \quad (9.30b)$$

que no son otra cosa que el resultado de la multiplicación de los elementos de la MCI, las ecuaciones (9.29a-d), con las del vector de velocidad de articulaciones $\dot{\theta}$, ecuación (9.24).

9.3



La dinámica inversa recursiva usando RIDIM*

La dinámica inversa tiene la siguiente definición: “Si se proporcionan los parámetros geométricos e inerciales de un robot, junto con sus movimientos de articulaciones, encuentre los pares de torsión y las fuerzas de las articulaciones”. En esta sección se hace hincapié en que, para el propósito del análisis de la dinámica inversa, no es necesario evaluar en forma explícita las matrices y los vectores que aparecen en la ecuación (9.9a), ya que el requerido lado derecho puede evaluarse mediante un algoritmo de orden recursivo (n) (Saha, 1999), donde n es el número de eslabones en el manipulador robótico. El algoritmo recursivo se utilizó en el pasado para desarrollar un programa de C++ de uso universal que recibió el nombre de RIDIM (*Recursive Inverse Dynamics for Industrial Manipulators*; dinámica inversa recursiva para manipuladores industriales) (Marothiya y Saha, 2003).



¿Por qué “inversa”?

En comparación con la dinámica directa, los cálculos “reversivos” o “inversos” son generados por ecuaciones dinámicas de movimiento. De allí viene este término.

9.3.1 El algoritmo de dinámica inversa recursiva

Aquí se presenta el algoritmo recursivo (Saha, 1999) que se implementa en RIDIM; este algoritmo tiene dos recursiones, a saber, hacia delante y hacia atrás, que se muestran a continuación:

Recursión hacia delante

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mathbf{p}_1 \dot{\theta}_1; & \beta_1 &= \mathbf{p}_1 \ddot{\theta}_1 + \Omega_1 \mathbf{p}_1 \dot{\theta}_1 \\ \alpha_2 &= \mathbf{p}_2 \dot{\theta}_2 + \alpha_1; & \beta_2 &= \mathbf{p}_2 \ddot{\theta}_2 + \Omega_2 \mathbf{p}_2 \dot{\theta}_2 + \mathbf{B}_{21} \beta_1 + \dot{\mathbf{B}}_{21} \alpha_1 \\ &\vdots & &\vdots \\ \alpha_n &= \mathbf{p}_n \dot{\theta}_n + \alpha_{n-1}; & \beta_n &= \mathbf{p}_n \ddot{\theta}_n + \Omega_n \mathbf{p}_n \dot{\theta}_n + \mathbf{B}_{n,n-1} \beta_{n-1} + \dot{\mathbf{B}}_{n,n-1} \alpha_{n-1}\end{aligned}$$

donde la matriz Ω_i de 6×6 se define como

$$\Omega_i \equiv \begin{bmatrix} \omega_i \times \mathbf{1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \omega_i \times \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (9.31)$$

Recursión hacia atrás

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \mathbf{M}_n \beta_n + \mathbf{W}_n \mathbf{M}_n \alpha_n; & \tau_n &= \mathbf{p}_n^T \gamma_n \\ \gamma_{n-1} &= \mathbf{M}_{n-1} \beta_{n-1} + \mathbf{W}_{n-1} \mathbf{M}_{n-1} \alpha_{n-1} + \mathbf{B}_{n,n-1}^T \gamma_n; & \tau_{n-1} &= \mathbf{p}_{n-1}^T \gamma_{n-1} \\ &\vdots & &\vdots \\ \gamma_1 &= \mathbf{M}_1 \beta_1 + \mathbf{W}_1 \mathbf{M}_1 \alpha_1 + \mathbf{B}_{21}^T \gamma_2; & \tau_1 &= \mathbf{p}_1^T \gamma_1\end{aligned}$$

* RIDIM (Recursive Inverse Dynamics for Industrial Manipulators; dinámica inversa recursiva para manipuladores industriales) es un programa de C++ de desarrollo propio con una interfaz de MS-Windows.

donde α_i , β_i y γ_i son los vectores de seis dimensiones con las dimensiones de torsión, la rapidez de torsión y la llave de torsión. Observe que, a partir de las ya dichas expresiones del par de torsión/fuerza y de la ecuación (9.20b), $\gamma_i \equiv \tilde{w}_i^E$, mientras que $\tilde{w}_{n+1}^E = \mathbf{0}$. Esto implica que los pares de torsión y fuerzas se deben únicamente al movimiento del sistema sin ningún momento y fuerza externos sobre el efector final. Además, si hay presencia de gravedad, se está tomando en cuenta por proveer una aceleración negativa que se denota por \mathbf{g} al primer cuerpo #1 (Kane y Levinson, 1983), es decir, se agrega un término adicional a β_i como

$$\beta_1 = \mathbf{p}_1 \ddot{\theta}_1 + \Omega_1 \mathbf{p}_1 \dot{\theta}_1 + \mathbf{p}, \text{ donde } \mathbf{p} \equiv [\mathbf{0}, -\mathbf{g}^T]^T \quad (9.32)$$

Ahora bien, para un manipulador serial de articulaciones puramente rotacionales, la complejidad computacional del algoritmo citado líneas arriba se presenta en la tabla 9.1, lo que se compara con algunos de los otros algoritmos dinámicos inversos que existen. A pesar de que el algoritmo de arriba no es el mejor, es muy sencillo, como es evidente en el algoritmo de dos pasos, donde se tratan seis vectores dimensionales en forma parecida a aquéllos de tres vectores dimensionales. Es decir, si se conoce α_1 , encontrar a α_2 es muy similar a la evaluación de la velocidad lineal del cuerpo 2 a partir de la velocidad conocida del cuerpo 1.

Tabla 9.1 Complejidades computacionales para la dinámica inversa

Algoritmo	Multiplicaciones/ divisiones (M)	Suma/ sustracción (A)	n = 6	
Hollerbach (1980)	412n-277	320n-201	2195M	17119A
Luh <i>et al.</i> (1980)	150n-48	131n+48	852M	834A
Walker y Orin (1982)	137n-22	101n-11	800M	595A
RIDIM (Saha, 1999)	120n-44	97n-55	676M	527A
Khalil <i>et al.</i> (1986)	105n-92	94n-86	538M	478A
Ángeles <i>et al.</i> (1989)	105n-109	90n-105	521M	435A
Balafoutis <i>et al.</i> (1988)	93n-69	81n-65	489M	421M

9.3.2 El programa RIDIM

El programa RIDIM se desarrolló en C++ para la dinámica inversa de un manipulador general de n eslabones. Con el fin de hacer el programa amigable para el usuario, también se desarrolló una interfaz de usuario en MS-Windows, como se muestra en la figura 9.5. El programa también tiene módulos de análisis de cinemática inversa y directa y verificación de resultados, respectivamente. Las entradas requeridas para el análisis de dinámica inversa con el uso de RIDIM son como sigue: Para $i = 1, \dots, n$,



¿Por qué "industrial" en RIDIM?

El programa también puede usarse para robots de aplicaciones no industriales. Sin embargo, la mayoría de los robots industriales son de tipo serial. Por esto se usa la palabra "industrial".

1. Los parámetros constantes de Denavit-Hartenberg (DH) (Denavit y Hartenberg, 1955) del robot bajo estudio, que están definidos en la sección 5.4. Ellos son b_i , a_i , α_i para una articulación rotacional y θ_i , a_i , α_i para una articulación prismática. Los parámetros b_i , θ_i , a_i y α_i se llaman desplazamiento o separa-

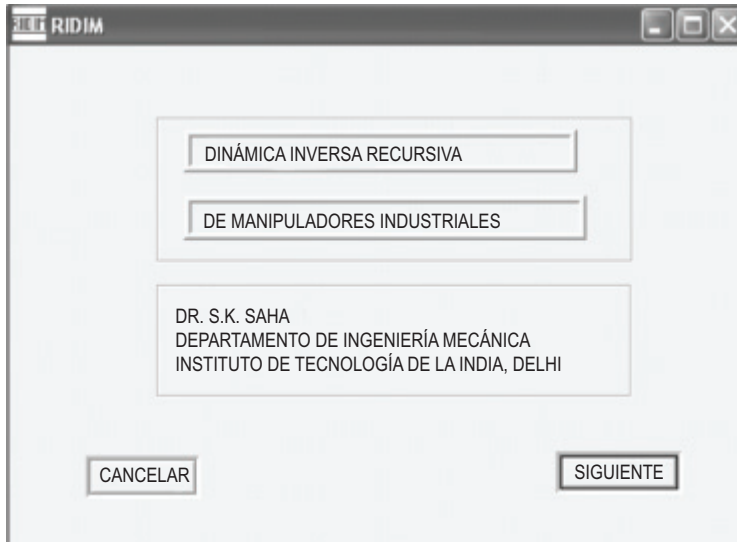


Figura 9.5 Interfaz de MS-Windows de RIDIM

ción articular, ángulo articular, longitud de eslabón y ángulo de torsión, respectivamente.

2. Historial de tiempo del parámetro DH variable, es decir, θ_i para un par rotacional y b_i para una articulación prismática, así como su primera y segunda derivada en el tiempo, es decir, $\dot{\theta}_i$, \dot{b}_i , y $\ddot{\theta}_i$, \ddot{b}_i , respectivamente.
3. Masa de cada cuerpo m_i .
4. Vector que denota la distancia de la $(i + 1)$ -ésima articulación del i -ésimo centro de masa C_i en el $(i + 1)$ -ésimo sistema de referencia, es decir $[\mathbf{r}_i]_{i+1}$.
5. Tensor de inercia del i -ésimo eslabón alrededor de su centro de masa C_i en el $(i + 1)$ -ésimo sistema $[\mathbf{I}_i]_{i+1}$.

Observe que RIDIM tiene las siguientes características:

- Puede manejar manipuladores con pares o articulaciones tanto rotacionales o revolutas como prismáticas:
- Toma en cuenta la gravedad, pues considera la aceleración negativa debido a la gravedad denotada por \mathbf{g} al primer cuerpo #1, como se muestra en la ecuación (9.32).

Ejemplo 9.3

Dinámica inversa de un manipulador planar de tres DOF

En la figura 9.6 se presenta el manipulador de tres eslabones en estudio, cuyos parámetros DH e inerciales se muestran en la tabla 9.2. Se supone que el manipulador se mueve en el plano X - Y , donde la gravedad está trabajando en la dirección negativa Y . Suponga que \mathbf{i} y \mathbf{j} son los dos vectores unitarios paralelos a los ejes X y Y , respectivamente,

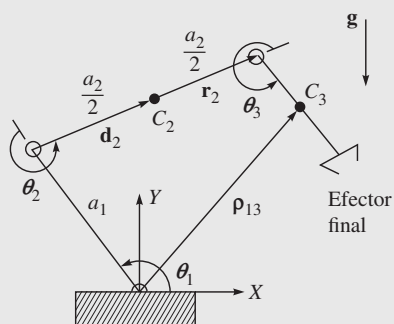


Figura 9.6 Manipulador de tres eslabones

y que $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$. Los tres pares de torsión o torsionales de las articulaciones, es decir, τ_1 , τ_2 y τ_3 , se evaluaron por medio del programa RIDIM, para lo cual se tomaron como entrada ángulos articulares suaves, como los de la subsección 8.5.1, y las correspondientes velocidades y aceleraciones.

Tabla 9.2 Los parámetros DH e inerciales del robot PUMA

a) Parámetros DH

Eslabón	Articulación	a_i (m)	b_i (m)	α_i (rad)	θ_i (rad)
1	r	0.3	0	0	JV [0]
2	r	0.25	0	0	JV [0]
3	r	0.22	0	0	JV [0]

JV: Variable articular con valores iniciales entre corchetes [y]; r: Articulación rotacional o revoluta

b) Parámetros de masa e inercia

Eslabón	m_i (kg)	$r_{i,x}$	$r_{i,y}$ (m)	$r_{i,z}$	$I_{i,xx}$	$I_{i,xy}$	$I_{i,xz}$	$I_{i,yy}$ (kg-m ²)	$I_{i,yz}$	$I_{i,zz}$
1	0.5	0.15	0	0	0	0	0	0.00375	0	0.00375
2	0.4	0.125	0	0	0	0	0	0.00208	0	0.00208
3	0.3	0.11	0	0	0	0	0	0.00121	0	0.00121

El ángulo de articulación se determina por

$$\theta_i = \theta_i(0) + \frac{\theta_i(T) - \theta_i(0)}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (9.33a)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{\theta_i(T) - \theta_i(0)}{T} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right];$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{\theta_i(T) - \theta_i(0)}{T} \left[\frac{2\pi}{T} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \right] \quad (9.33b)$$

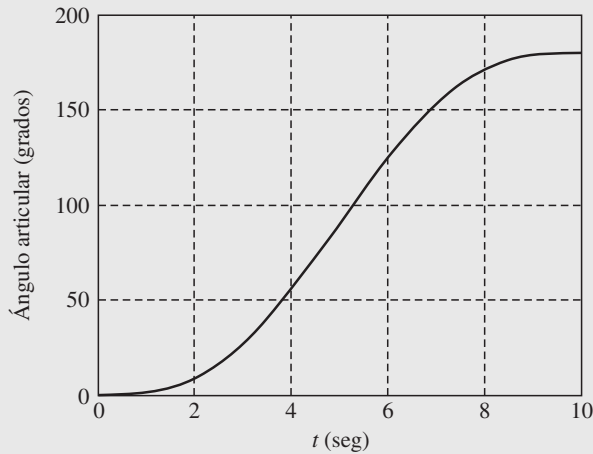


Figura 9.7 Trayectoria articular

donde se tomaron $T = 10$ seg, valores iniciales de la articulación $\theta_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = \ddot{\theta}_i(0) = 0$ y cuyos valores finales son $\theta_i(T) = \pi$, $\dot{\theta}_i(0) = \ddot{\theta}_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, 3$. La trayectoria de la articulación se muestra en la figura 9.7, donde los pares de torsión de la articulación obtenidos por RIDIM se grafican en la figura 9.8. Los términos “tau_1”, “tau_2” y “tau_3” de la figura 9.8 denotan los pares de torsión de la articulación τ_1 , τ_2 y τ_3 , respectivamente. Las gráficas también se verificaron con las que se obtuvieron de las expresiones explícitas disponibles en muchos libros sobre robótica, por ejemplo, Ángeles (2003).

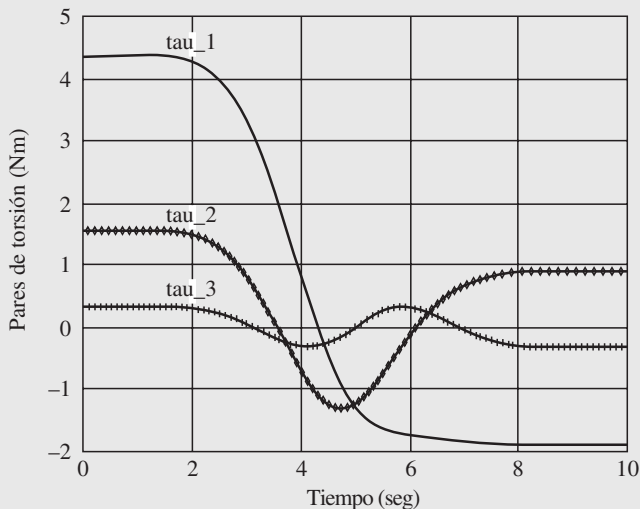


Figura 9.8 Pares de torsión de las articulaciones del manipulador de tres eslabones

Ejemplo 9.4

El robot PUMA

Para el robot PUMA que se presenta en la figura 9.9, los resultados de dinámica inversa se obtuvieron para sus parámetros DH e inerciales que se muestran en la tabla 9.3.

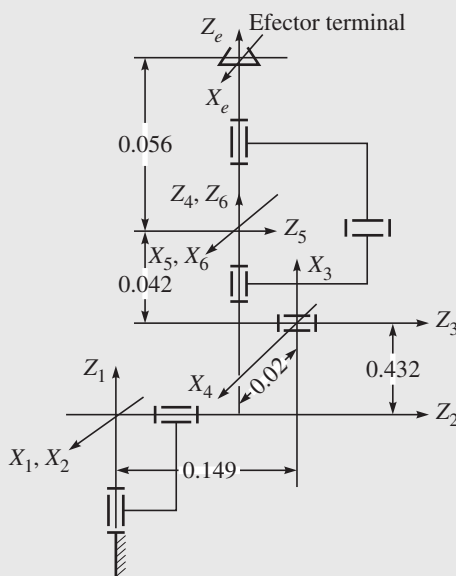


Figura 9.9 Un robot PUMA

Se supone que la trayectoria para cada articulación será la misma que para el manipulador de tres eslabones, como se definió en las ecuaciones (9.33a-b) para el mismo T , y los valores de articulaciones iniciales y finales. Las gráficas de pares de torsión correspondientes se dan en las figuras 9.10a-f).

Tabla 9.3 Los parámetros DH e inerciales del robot PUMA

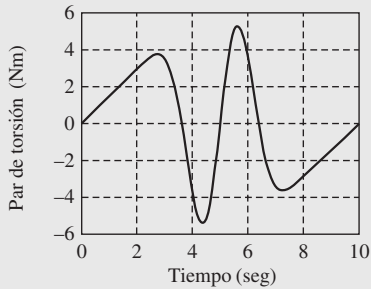
a) Parámetros DH

Eslabón	Articulación	a_i (m)	b_i (m)	α_i (rad)	θ_i (rad)
1	r	0	0	$-\pi/2$	JV [0]
2	r	0.432	0.149	0	JV [0]
3	r	0.02	0	$-\pi/2$	JV [0]
4	r	0	0.432	$-\pi/2$	JV [0]
5	r	0	0	$-\pi/2$	JV [0]
6	r	0	0.05	0	JV [0]

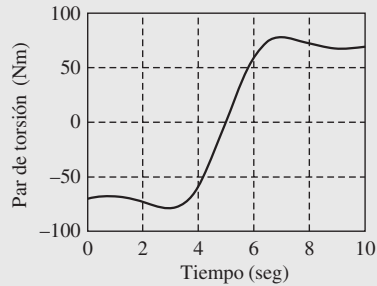
JV: Variable articular con valores iniciales entre corchetes [y]; r: Articulación rotacional o revoluta

b) Parámetros de masa e inercia

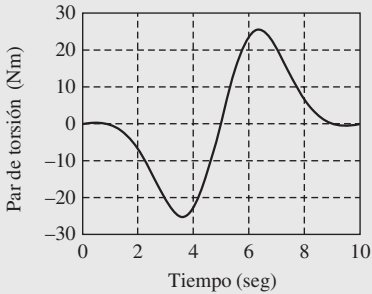
<i>Eslabón</i>	m_i (kg)	$r_{i,x}$	$r_{i,y}$ (m)	$r_{i,z}$	$I_{i,xx}$	$I_{i,xy}$	$I_{i,xz}$	$I_{i,yy}$ (kg·m ²)	$I_{i,yz}$	$I_{i,zz}$
1	10.521	0	0	0.054	1.612	0	0	1.612	0	0.5091
2	15.761	0.292	0	0	0.4898	0	0	8.0783	0	8.2672
3	8.767	0.02	0	-0.197	3.3768	0	0	3.3768	0	0.3009
4	1.052	0	-0.057	0	0.181	0	0	0.1273	0	0.181
5	1.052	0	0	-0.007	0.0735	0	0	0.1273	0	0.0735
6	0.351	0	0	0.019	0.0071	0	0	0.0071	0	0.0141



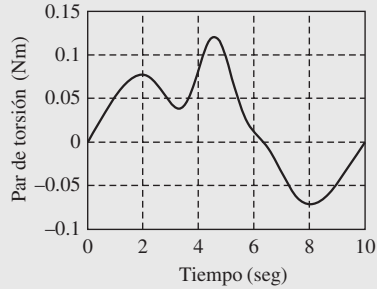
a) Articulación 1



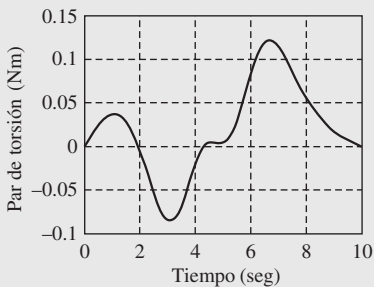
b) Articulación 2



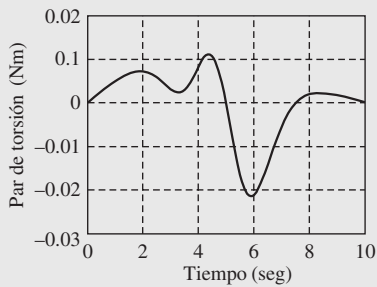
c) Articulación 3



d) Articulación 4



e) Articulación 5



f) Articulación 6

Figura 9.10 Pares de torsión de articulaciones del robot PUMA

Ejemplo 9.5

El brazo STANFORD

Para el brazo Stanford que se presenta en la figura 9.11, los parámetros DH y otros se muestran en la tabla 9.4. Observe que se distingue del robot PUMA en que tiene una articulación prismática en la ubicación 3 de la articulación. Las funciones para las articulaciones rotacionales o revolutas se tomaron exactamente de las mismas que en el robot PUMA del ejemplo 9.4, con los siguientes datos: $T = 10$ seg, $\theta_i(0) = 0$ para $i \neq 2, 3$, $\theta_2(0) = \pi/2$; y $\theta_i(T) = \pi/3$ para $i \neq 3$. Puesto que la tercera articulación es prismática, el desplazamiento de la articulación, que se denota por b_3 , es una variable. Su variación se toma igual que en la ecuación (9.33a), a saber,

$$b_i = b_i(0) + \frac{b_i(T) - b_i(0)}{T} \left[t - \frac{T}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right] \quad (9.34)$$

donde $b_3(0) = 0$, y $b_3(T) = 0.1$ m.

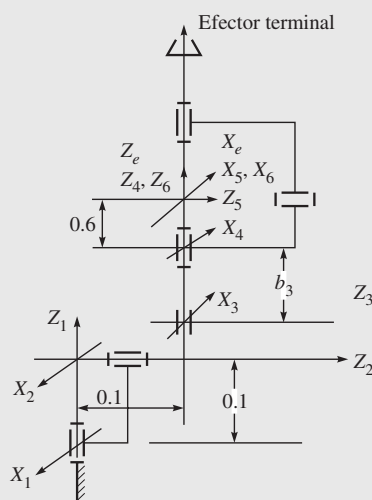


Figura 9.11 El brazo Stanford

Tabla 9.4 Los parámetros DH e inerciales de un brazo Stanford
a) Parámetros DH

Eslabón	Articulación	a_i (m)	b_i (m)	α_i (rad)	θ_i (rad)
1	r	0	0.1	$-\pi/2$	JV [0]
2	r	0	0.1	$-\pi/2$	JV [0]
3	p	0	JV [0]	0	0
4	r	0	0.6	$\pi/2$	JV [0]
5	r	0	0	$-\pi/2$	JV [0]
6	r	0	0.0	0	JV [0]

JV: Variable articular con valores iniciales entre corchetes [y]; r: Articulación rotacional ; p: Articulación prismática

b) Parámetros de masa e inercia

Eslabón	m_i (kg)	$r_{i,x}$	$r_{i,y}$ (m)	$r_{i,z}$	$I_{i,xx}$	$I_{i,xy}$	$I_{i,yz}$ (kg-m ²)	$I_{i,yy}$	$I_{i,yz}$	$I_{i,xz}$
1	9	0	-0.1	0	0.01	0	0	0.02	0	0.01
2	6	0	0	0	0.05	0	0	0.06	0	0.01
3	4	0	0	0	0.4	0	0	0.4	0	0.01
4	1	0	-0.1	0	0.001	0	0	0.001	0	0.0005
5	0.6	0	0	-0.06	0.0005	0	0	0.0005	0	0.0002
6	0.5	0	0	0.2	0.003	0	0	0.001	0	0.002

Los pares de torsión y fuerza que se obtienen mediante RIDIM se grafican luego en las figuras 9.12a-f) y coinciden exactamente con los que se reportan en Cyril (1988) para el mismo brazo.

9.4



La dinámica directa recursiva y la simulación

La definición de la dinámica directa es: si se proporcionan los pares de torsión y fuerzas, junto con los parámetros físicos del robot, se buscan las aceleraciones de las articulaciones, es decir, se resuelven para las aceleraciones de las articulaciones $\ddot{\theta}$ según las ecuaciones dinámicas de movimiento, ecuación (9.9a). La simulación, por otro lado, involucra la dinámica directa, seguida por la solución de las ecuaciones diferenciales en las aceleraciones articulares, para obtener velocidades y posiciones de las articulaciones, es decir, $\dot{\theta}$ y θ , respectivamente, para un conjunto determinado de posiciones iniciales de articulaciones y velocidades del manipulador en estudio, es decir, $\dot{\theta}(0)$ y $\theta(0)$, respectivamente.



¿Por qué “directo”?

Este paso para la simulación lleva al comportamiento de un robot como si éste existiese y se le estuviese moviendo. Por eso se usa la palabra “directo”.

9.4.1 Algoritmo de dinámica directa recursiva

Convencionalmente, se resuelven las aceleraciones articulares según la ecuación (9.9a), usando la descomposición de Cholesky de la GIM \mathbf{I} , como lo hacen Walker y Orin (1982), Ángeles (2003) y otros, o mediante el comando de MATLAB de “ $\phi\mathbf{I}$ ” (Matlab, 2002), donde ϕ representa el vector de las fuerzas generalizadas debido a los momentos y fuerzas externos, la gravedad y los términos de Coriolis, etc. El planteamiento que se menciona arriba requiere cálculos del orden (n^3), donde n es el número de eslabones que hay en el robot y produce aceleraciones articulares no suaves (Ascher *et al.*, 1997). Por el contrario, la formulación dinámica basada en las matrices de complemento ortogonal natural desacoplado (DeNOC) que se presentan en este capítulo permite resolver $\ddot{\theta}$ de la ecuación (9.9a) en forma recursiva con la complejidad computacional de orden (n) (Saha, 1999; 2003). Se sabe que estos

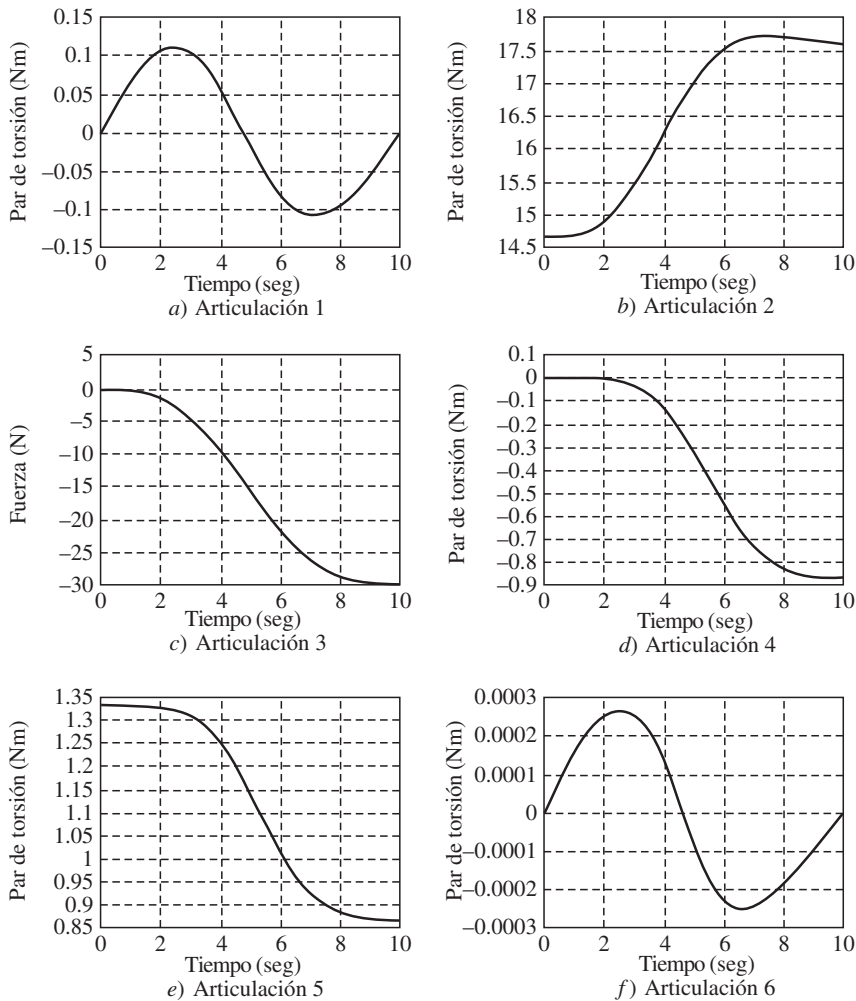


Figura 9.12 Pares de torsión y fuerza para el brazo Stanford

algoritmos recursivos proporcionan perfiles suaves para $\ddot{\theta}$, como se informa en Ascher *et al.* (1997), Mohan y Saha (2007) y otros.

En esta subsección se presenta un algoritmo de dinámica directa recursiva del orden (n) que requiere las siguientes entradas: Para $i = 1, \dots, n$,

1. Ítems de dinámica recursiva 1, así como 3-5, como se menciona en la subsección 9.3.2.
2. Valores iniciales para los parámetros variables DH, es decir, θ_i para una articulación rotacional y b_i para una articulación prismática, y su derivada respecto al tiempo, es decir, $\dot{\theta}_i$ y \dot{b}_i .
3. Historial de tiempo de las fuerzas/pares de torsión de la articulación, es decir, τ_i .

4. Cada componente del vector $\boldsymbol{\phi} \equiv \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}\ddot{\boldsymbol{\theta}}$, obtenido mediante la ecuación (9.9a), es decir, ϕ_i , que ha de calcularse en forma recursiva mediante un algoritmo de dinámica inversa, por ejemplo, el que se da en la subsección 9.3.1, mientras que $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$.

El algoritmo que se basa en la descomposición \mathbf{UDU}^T de la matriz generalizada de inercia \mathbf{I} de la ecuación (9.9a), es decir, $\mathbf{I} = \mathbf{UDU}^T$, donde \mathbf{U} y \mathbf{D} son las matrices superior y diagonal, respectivamente. Además, mediante la sustitución para \mathbf{I} y $\boldsymbol{\phi} \equiv \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ en la ecuación (9.9a), se obtiene

$$\mathbf{UDU}^T \ddot{\boldsymbol{\theta}} \equiv \boldsymbol{\phi} \quad (9.35)$$

Luego se utiliza un método recursivo de tres pasos para calcular las aceleraciones de las articulaciones a partir de las ecuaciones arriba mencionadas, por ejemplo,

1. Solución para $\hat{\boldsymbol{\phi}}$: La solución $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\phi}$ se evalúa en función de los términos escalares como

$$\hat{\phi}_i = \phi_i - \mathbf{p}_i^T \boldsymbol{\eta}_{i,i+1}, \text{ para } i = n, \dots, 1 \quad (9.36a)$$

Observe que $\hat{\phi}_n \equiv \phi_n$, y el vector de 6 dimensiones $\boldsymbol{\eta}_{i,i+1}$ se obtiene como

$$\boldsymbol{\eta}_{i,i+1} \equiv \mathbf{B}_{i+1,i}^T \boldsymbol{\eta}_{i+1} \text{ y } \boldsymbol{\eta}_{i+1} \equiv \boldsymbol{\psi}_{i+1} \hat{\phi}_{i+1} + \boldsymbol{\eta}_{i+1,i+2} \quad (9.36b)$$

en la que $\boldsymbol{\eta}_{n,n+1} = \mathbf{0}$. La nueva variable $\boldsymbol{\psi}_{i+1}$ es la matriz de 6×6 que se evalúa mediante

$$\boldsymbol{\psi}_i = \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}_i}{\hat{m}_i}, \text{ donde } \hat{\boldsymbol{\psi}}_i \equiv \hat{\mathbf{M}}_i \mathbf{p}_i \text{ y } \hat{m}_i \equiv \mathbf{p}_i^T \hat{\boldsymbol{\psi}}_i \quad (9.36c)$$

En la ecuación (9.36c), la matriz de 6×6 $\hat{\mathbf{M}}_i$, que se llama “inercia de cuerpo articulado” (Saha, 1997; 1999), puede obtenerse en forma recursiva, parecido a $\tilde{\mathbf{M}}_i$, en la ecuación (9.10d), como

$$\hat{\mathbf{M}}_i \equiv \mathbf{M}_i + \mathbf{B}_{i+1,i}^T \bar{\mathbf{M}}_{i+1} \mathbf{B}_{i+1,i}, \text{ donde } \bar{\mathbf{M}}_{i+1} = \hat{\mathbf{M}}_{i+1} - \hat{\boldsymbol{\psi}}_{i+1} \boldsymbol{\psi}_{i+1}^T \quad (9.36d)$$

para $i = n - 1, \dots, 1$, y $\hat{\mathbf{M}}_n = \mathbf{M}_n$.

2. Solución para $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$: La solución $\mathbf{D}\tilde{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{\phi}}$ involucra la inversa de la matriz diagonal \mathbf{D} de la ecuación (9.35), que es simple, a saber, \mathbf{D}^{-1} sólo tiene elementos diagonales no ceros que son los recíprocos de los correspondientes elementos diagonales de \mathbf{D} . El vector $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ se obtiene como sigue: Para $i = 1, \dots, n$,

$$\tilde{\phi}_i = \hat{\phi}_i / \hat{m}_i \quad (9.37)$$

El escalar \hat{m}_i se define en la ecuación (9.36c).

3. Solución para $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$: En este paso, $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{U}^{-T} \tilde{\boldsymbol{\phi}}$ se calcula para $i = 2, \dots, n$ como

$$\ddot{\theta}_i = \tilde{\phi}_i - \hat{\boldsymbol{\psi}}_i^T \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{i,i-1} \quad (9.38a)$$

donde $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}_1$, y el vector de seis dimensiones $\tilde{\mu}_{i,i-1}$ se obtiene como

$$\tilde{\mu}_{i,i-1} \equiv \mathbf{B}_{i,i-1} \tilde{\mu}_{i-1} \text{ y } \tilde{\mu}_{i-1} \equiv \mathbf{p}_{i-1} \ddot{\theta}_{i-1} + \tilde{\mu}_{i-1,i-2} \quad (9.38b)$$

en la que $\tilde{\mu}_{10} \equiv \mathbf{0}$.

La complejidad del algoritmo de dinámica directa propuesto se compara en la tabla 9.5 con algunos otros algoritmos. La comparación muestra claramente que el algoritmo que se presenta arriba es el mejor. Además, mediante el uso de cualquier otro algoritmo recursivo, la complejidad computacional para la dinámica directa tiene ventajas sobre el algoritmo de orden convencional (n^3) cuando $n \geq 12$, mientras que el algoritmo que se menciona arriba tiene ventajas incluso para $n \geq 10$.

Tabla 9.5 Complejidades computacionales para la dinámica directa

Algoritmo	Multiplicaciones/ divisiones(M)	Suma/ resta (A)	$n = 6$	$n = 10$
Saha (2003)	191n-284	187n-325	862M 797A	1626M 1545A
Featherstone (1983)	199n-198	174n-173	996M 871A	1792M 1527A
Valasek [14]	226n-343	206n-345	1013M 891A	1917M 1715A
Brandl <i>et al.</i> [14]	250n-222	220n-198	1278M 1122A	2278M 2002A
Walker y Orion (1982)	$n^3/6+23$	$n^3/6+7n^2+233n/3-46$ $n^2/2+115n/3-47$	633M 480A	1653M 1209A

9.4.2 Simulación

La simulación consiste en la dinámica directa para encontrar la aceleración articular $\ddot{\theta}$, seguida por su integración, es decir, para obtener $\dot{\theta}$ y θ , para un determinado conjunto de condiciones iniciales, es decir, $\dot{\theta}(0)$ y $\theta(0)$. Como se señaló en el capítulo 8, subsección 8.5.2, excepto en casos sumamente simples, la integración debe hacerse en forma numérica, usando métodos establecidos, como Runge-Kutta-Fehlberg, Adams-Bashforth-Moulton y otros (Shampine, 1994) o el comando “ode45” de MATLAB (Matlab, 2002). En esta subsección se generaron resultados de simulación utilizando un programa de computación escrito en C++ para la implementación del algoritmo de dinámica directa que se dio en la subsección 9.4.1 y el método de integración numérica mediante la fórmula de Runge-Kutta-Fehlberg.

Aquí se elabora un aspecto importante de perfiles de aceleración de articulaciones suaves que están disponibles a partir de un algoritmo recursivo de dinámica directa como se menciona en la subsección 9.4.1. Cuando el perfil de aceleración de articulación para $\ddot{\theta}$ no es suave, la convergencia de su integración numérica para obtener la velocidad y posición de la articulación, es decir, $\dot{\theta}$ y θ , es lenta. Alternativamente, con un perfil $\ddot{\theta}$ suave obtenido según un algoritmo recursivo de dinámica directa, la convergencia de los resultados de integración numérica es más rápida. Por lo tanto, el tiempo total del CPU que se requiere para la dinámica directa y la integración numérica juntas mediante el uso del algoritmo recursivo podrá ser más corto incluso para $n = 6$ en comparación con su algoritmo de orden (n^3). Este aspecto se comprueba en Mohan y Saha (2007) mediante la simulación.

Ejemplo 9.6**Simulación del manipulador de tres DOF**

Aquí se considera el manipulador de tres DOF que se presenta en la figura 9.6, para dejarlo caer bajo gravedad desde la configuración horizontal inicial, es decir, $\theta_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = 0$, para $i = 1, 2, 3$. El incremento en el tiempo, ΔT , para la integración numérica se toma como $\Delta T = 0.01$ seg. Los resultados para las posiciones de la articulación, a saber, las variaciones de θ_1 , θ_2 y θ_3 con el tiempo se muestran en la figura 9.13, donde “th_1”, “th_2” y “th_3” representan θ_1 , θ_2 y θ_3 , respectivamente.

Observe en la figura 9.6 que, debido a la gravedad del primer ángulo de la articulación, θ_1 se incrementará inicialmente en sentido negativo. Esto es evidente según la figura 9.13. Además, el sistema bajo gravedad se comporta como un péndulo de tres eslabones, lo que queda claro conforme todas las variaciones de ángulo de la articulación de la figura 9.13.

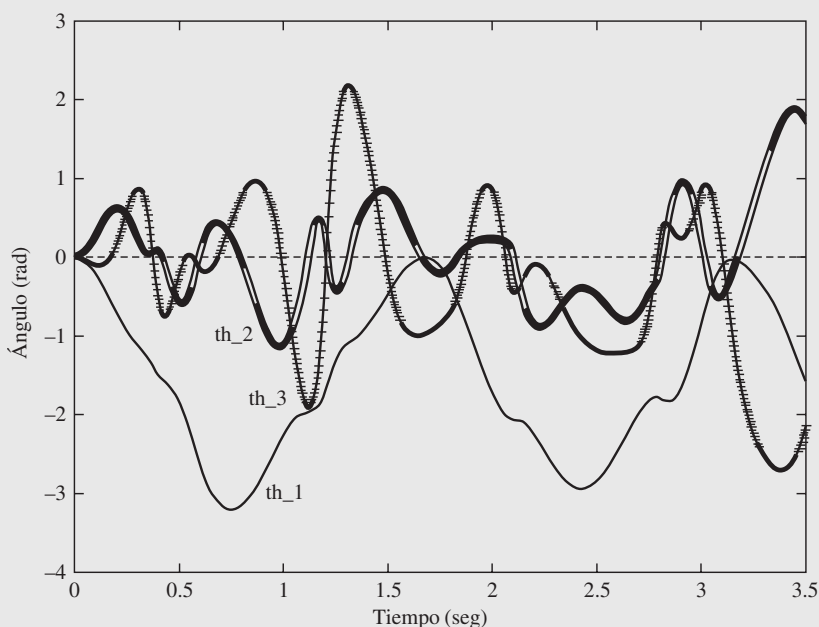


Figura 9.13 Ángulos de las articulaciones para el manipulador de tres DOF

Ejemplo 9.7**Simulación del robot PUMA**

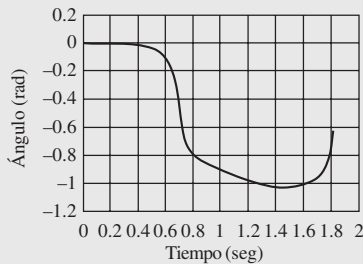
Para el robot PUMA, cuya arquitectura se muestra en la figura 9.10, la simulación de caída libre, es decir, que el robot se deje caer libremente bajo gravedad, se realiza con las condiciones iniciales $\theta_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = 0$ para $i = 1, \dots, 6$. El intervalo ΔT , que se adopta para la integración numérica, se toma como $\Delta T = 0.01$ seg. Las variaciones para las



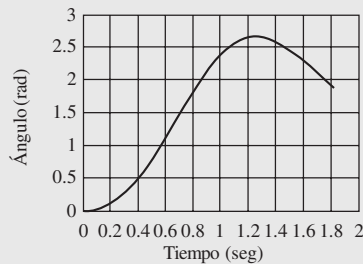
¿Qué es "libre"?

Las articulaciones están libres de cualquier par de torsión aplicado.

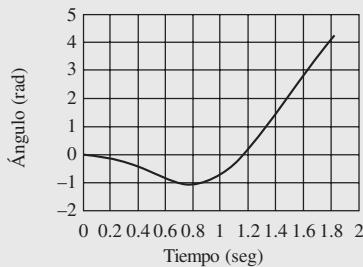
posiciones de las articulaciones contra el tiempo se muestran en las figuras 9.14 a-f). Según la figura 9.10, queda claro que, debido a la longitud, $a_3 = 0.02$, la articulación 2 girará en sentido positivo, lo que es evidente según la figura 9.14b).



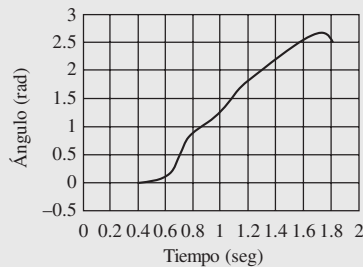
a) Articulación 1



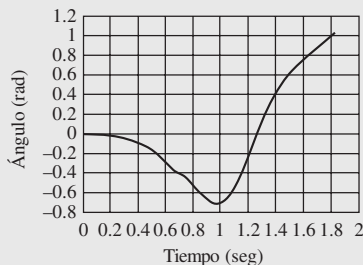
b) Articulación 2



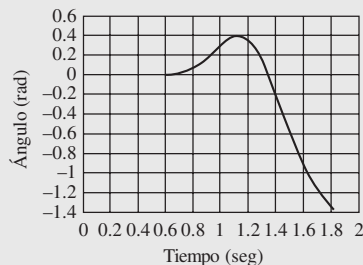
c) Articulación 3



d) Articulación 4



e) Articulación 5



f) Articulación 6

Figura 9.14 Ángulos articulares del robot PUMA

Ejemplo 9.8

Simulación del brazo Stanford

Aquí se realiza la simulación de caída libre del brazo Stanford con los siguientes valores: $\theta_i(0) = 0$ para $i \neq 2, 3$, $\theta_2(0) = \pi$, $b_3(0) = 0$; $\dot{\theta}_i(0) = 0$ para $i \neq 3$ y $\dot{b}_3(0) = 0$. El intervalo ΔT para la integración numérica se toma igual que antes, es decir, $\Delta T = 0.01$ seg.

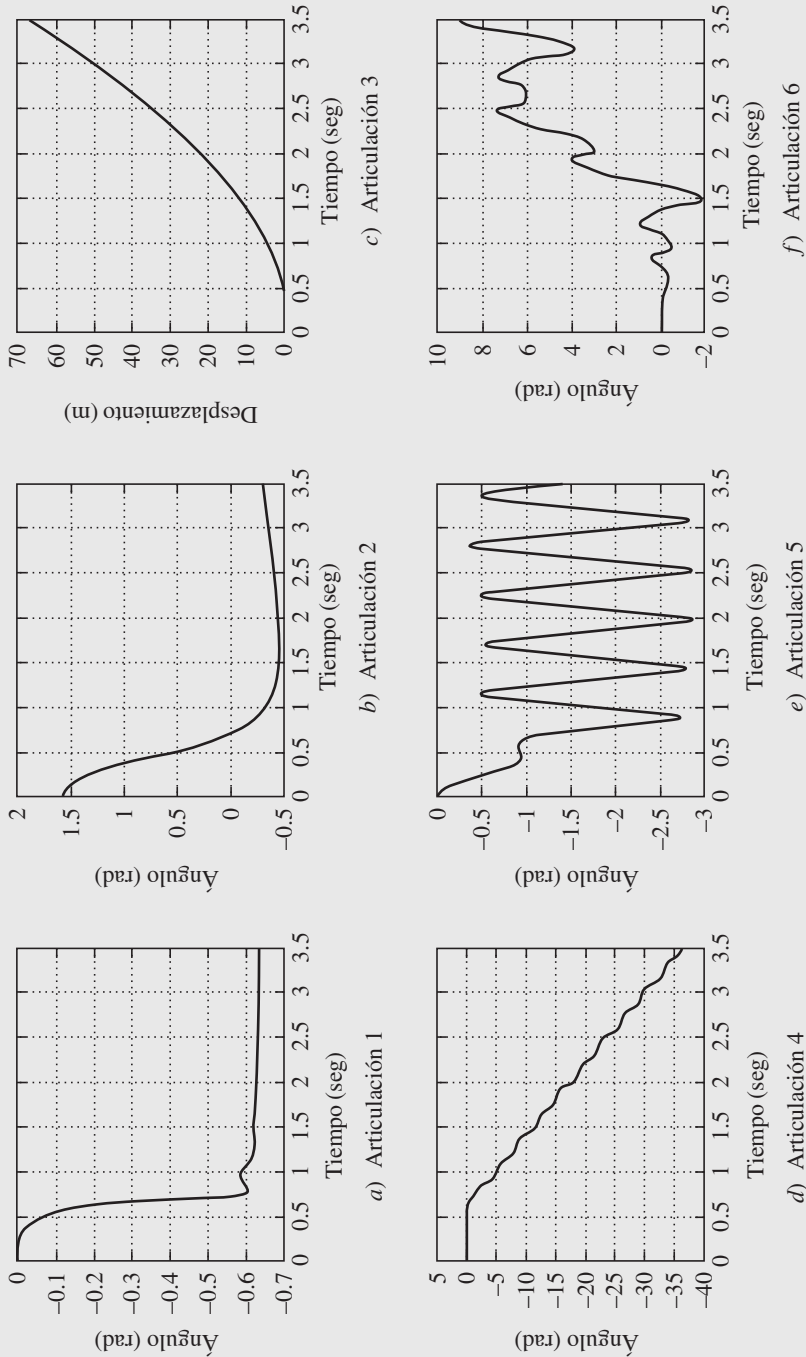


Figura 9.15 Ángulos articulares del brazo Stanford

Los resultados de posiciones de articulaciones se presentan luego en las figuras 9.15a-f). Debido a la configuración inicial del brazo Stanford que se da en la tabla 9.4a), el movimiento de la articulación 3 deberá incrementarse en forma pronunciada una vez que la articulación 2 gire más que $\pi/2$. Esto es cierto, como es evidente según las figuras 9.15c) y b), respectivamente. En la figura 9.15b), la articulación 2 gira por $\pi/2$ de su valor de $\pi/2$ o 1.5708 radianes para volverse cero. Esto sucede poco después de 0.5 seg., cuando el desplazamiento de la articulación 3 empieza a aumentar, como queda claro en la figura 9.15c).

RESUMEN

En este capítulo es presentado el modelado dinámico de robots seriales mediante el uso de complementos ortogonales naturales desacoplados (DeNOC). Se presentan algoritmos de dinámica recursiva inversos y directos para el control y la simulación de robots, respectivamente. Se reportan las complejidades computacionales de ambos algoritmos con resultados ilustrativos para sistemas robóticos planares y espaciales.



EJERCICIOS

- 9.1 ¿Qué es la dinámica inversa?
- 9.2 ¿Por qué se prefiere el concepto de las matrices DeNOC sobre otros planeamientos de modelado dinámico?
- 9.3 ¿Cuál es el significado de “ortogonal” en DeNOC?
- 9.4 Busque la expresión de la energía cinética del brazo de un eslabón, ecuación (8.54a), aplicando las matrices DeNOC.
- 9.5 Derive la ecuación de movimiento del brazo de un eslabón, figura 9.3, usando las expresiones de matrices y vectores mediante la matriz NOC \mathbf{N} que aparece después de la ecuación (9.9a).
- 9.6 Escriba la expresión de la energía cinética total para un manipulador de n eslabones, usando la definición de torsión generalizada \mathbf{t} que se presenta en la ecuación (9.3c).
- 9.7 Repita el ejercicio 9.6, usando la definición de la velocidad de articulación generalizada $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ de la ecuación (9.6b).
- 9.8 ¿Cuáles son las características de RIDIM?



EJERCICIOS BASADOS EN RIDIM

- 9.9 Usando el programa RIDIM, busque los pares de torsión de articulaciones para el manipulador planar de dos DOF que se muestra en la figura 9.4.

- 9.10 Genere pares torsionales o de torsión de articulaciones para el manipulador de tres DOF de la figura 9.6 para la trayectoria de articulación proporcionada por las ecuaciones (9.33a-b) con las siguientes entradas:

$$\theta_i(0) = \dot{\theta}_i(0) = \ddot{\theta}_i(0) = 0; \theta_i(T) = \pi/2, \dot{\theta}_i(0) = \ddot{\theta}_i(0) = 0, \text{ para } i = 1, 2, 3 \quad (9.39)$$



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 9.11 Genere las gráficas de pares torsionales o de torsión de articulaciones para el ejemplo 9.10, usando las siguientes expresiones explícitas:

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\tau}^g + \boldsymbol{\tau}, \text{ donde } \boldsymbol{\theta} \equiv [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \quad (9.40a)$$

donde las matrices GIM y MCI de 3×3 , \mathbf{I} y \mathbf{C} , respectivamente, así como el vector tridimensional $\boldsymbol{\tau}^g$, debido a la gravedad, se determinan por

$$\begin{aligned} i_{11} &= \frac{1}{3}(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_3 a_3^2) + m_2 a_1^2 + m_3(a_1^2 + a_2^2) \\ &\quad + (m_2 + 2m_3)a_1 a_2 c\theta_2 + m_3 a_3(a_2 c\theta_3 + a_1 c\theta_{23}) \\ i_{12} = i_{21} &= \frac{1}{3}(m_2 a_2^2 + m_3 a_3^2) + m_3 a_2^2 + \left(\frac{1}{2}m_2 a_2 + m_3 a_2\right)a_1 c\theta_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_3 a_3(2a_2 c\theta_3 + a_1 c\theta_{23}) \end{aligned} \quad (9.40b)$$

$$i_{13} = i_{31} = \frac{1}{3}m_3 a_3^2 + \frac{1}{2}m_3 a_3(a_2 c\theta_3 + a_1 c\theta_{23})$$

$$i_{22} = \frac{1}{3}(m_2 a_2^2 + m_3 a_3^2) + m_3(a_2^2 + a_2 a_3 c\theta_3)$$

$$i_{23} = i_{32} = \frac{1}{3}m_3 a_3^2 + \frac{1}{2}m_3 a_2 a_3 c\theta_3; i_{33} = \frac{1}{3}m_3 a_3^2$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\frac{1}{2}[\{m_2 a_1 a_2 s\theta_2 + m_3(2a_1 a_2 s\theta_2 + a_1 a_3 s\theta_{23})\}\dot{\theta}_2 \\ &\quad + m_3(a_1 a_3 s\theta_{23} + a_2 a_3 s\theta_3)\dot{\theta}_3] \\ c_{12} &= -\frac{1}{2}[\{m_2 a_1 a_2 s\theta_2 + m_3(2a_1 a_2 s\theta_2 + a_1 a_3 s\theta_{23})\}\dot{\theta}_{12} \\ &\quad + m_3(a_1 a_3 s\theta_{23} + a_2 a_3 s\theta_3)\dot{\theta}_3] \end{aligned} \quad (9.40c)$$

$$c_{13} = -\frac{1}{2}m_3(a_1 a_3 s\theta_{23} + a_2 a_3 s\theta_3)\dot{\theta}_{123}$$

$$c_{21} = \frac{1}{2}[\{m_2 a_1 a_2 s\theta_2 + m_3(2a_1 a_2 s\theta_2 + a_1 a_3 s\theta_{23})\}\dot{\theta}_1 - m_3 a_2 a_3 s\theta_3 \dot{\theta}_3]$$

$$c_{22} = -\frac{1}{2}m_3 a_2 a_3 s\theta_3 \dot{\theta}_3; c_{23} = -\frac{1}{2}m_3 a_2 a_3 s\theta_3 \dot{\theta}_{123}$$

$$c_{31} = \frac{1}{2} m_3 [(a_1 a_3 s \theta_{23} + a_2 a_3 s \theta_3) \dot{\theta}_1 + a_2 a_3 s \theta_3 \dot{\theta}_2]; \quad c_{32} = \frac{1}{2} m_3 a_2 a_3 s \theta_3 \dot{\theta}_{12}$$

$$c_{33} = 0$$

y

$$\tau_1^g = \frac{1}{2} g [-m_1 a_1 c \theta_1 - 2m_2 (a_1 c \theta_1 + a_2 c \theta_{12}) - 2m_3 (a_1 c \theta_1 + \frac{1}{2} a_2 c \theta_{12}) \dots + a_3 c \theta_{123}]$$

$$\tau_2^g = \frac{1}{2} g [-m_2 a_2 c \theta_{12} - 2m_3 (a_2 c \theta_{12} \dots + \frac{1}{2} a_3 c \theta_{123});$$

$$\tau_3^g = \frac{1}{2} g [-m_3 a_3 c \theta_{123}] \quad (9.40d)$$

donde $\theta_{12} \equiv \theta_1 + \theta_2$; $\theta_{123} \equiv \theta_{12} + \theta_3$; $\dot{\theta}_{12} \equiv \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$; $\dot{\theta}_{123} \equiv \dot{\theta}_{12} + \dot{\theta}_3$. Busque los pares de torsión de los actuadores de articulaciones, vector τ , para graficar.

- 9.12 Verifique los resultados de simulación del ejemplo 9.11 usando las expresiones de la ecuación (9.40) y “ode45”.



Capítulo

10

Control



¿Quién controla un robot?

Una computadora personal o un sistema dedicado de circuitos electrónicos conectado al manipulador.

El control de cualquier sistema significa aplicar/ejercer fuerza(s) para que el sistema se mueva/trabaje de acuerdo con las instrucciones ordenadas. En un sistema robótico, se requiere de un manipulador para ejecutar una tarea específica mediante el movimiento de su efector final en forma precisa y repetida. En el capítulo 6 se calcularon ecuaciones para obtener los

historiales de tiempo de todos los movimientos de las articulaciones para lograr el movimiento deseado del efector final. En este capítulo se desarrollarán las leyes de control, donde los historiales de las articulaciones pueden convertirse en entradas con el fin de hacer que el robot siga la trayectoria ordenada. Se asume que el lector tiene los conocimientos básicos de sistemas de control (Ogata, 1987; Kuo, 1991; Gopal, 1997).

El control de un robot requiere el conocimiento del modelo matemático del mismo, así como de un sistema inteligente que actúe sobre él. Mientras que el modelo matemático necesario se obtiene de las leyes físicas que rigen el movimiento del manipulador, el sistema inteligente requiere de dispositivos sensoriales y medios para accionar y reaccionar ante las variables detectadas. En el control de un robot, las articulaciones individuales se accionan mediante actuadores, ya sean neumáticos, hidráulicos o eléctricos, como se explicó en el capítulo 3. Los actuadores aplican una fuerza o un par de torsión sobre los eslabones para que se muevan. Sus comandos provienen del sistema de control del manipulador que lo mueven para ejecutar el movimiento específico ordenado para el efector final. Estos comandos se basan en los valores nominales de control generados a partir del conjunto de pares de torsión de las articulaciones en función de los historiales de tiempo. Observe que el generador de trayectoria o planeador prepara los historiales de articulaciones, como se indica en la figura 10.1. Esencialmente, se trata de un algoritmo que se basa en cualquiera de los

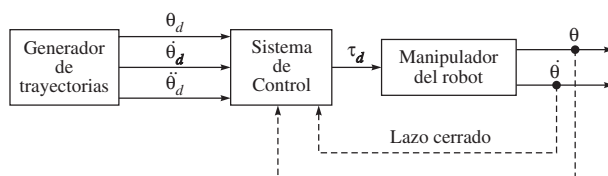


Figura 10.1 Diagrama de bloques de un sistema de control de robots

métodos desarrollados en el capítulo 11. Sin embargo, debido a las dificultades que hay en las computaciones precisas de los parámetros de manipuladores en el modelo matemático, por ejemplo, las longitudes de eslabones, masas e inercias, cambios en la carga de trabajo, consideraciones de fricción, holguras, etc., el efector final del robot no seguirá en forma exacta la trayectoria ordenada. Por lo tanto, las posiciones reales de las articulaciones y/o del efector final, así como sus derivadas pueden retroalimentar al sistema de control para obtener un movimiento preciso. En la figura 10.1 se presenta un diagrama esquemático del control de un manipulador. Las líneas punteadas para la retroalimentación indican que el sistema de control podrá o no emplear la retroalimentación de los movimientos actuales reales de las articulaciones. Los parámetros θ_d , $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$ son las posiciones, velocidades y aceleraciones deseadas predefinidas de todas las articulaciones, respectivamente, mientras que θ y $\dot{\theta}$ son las posiciones y velocidades reales de las articulaciones, respectivamente.

El control de un robot puede clasificarse como lineal y no lineal. El uso de técnicas de control lineal sirve cuando el robot se mueve lentamente, de manera que puede ser matemáticamente modelado por medio de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Para el caso de un control de robot real, estos métodos lineales se consideran esencialmente como métodos aproximativos, ya que las ecuaciones dinámicas de movimiento de un manipulador robótico son en realidad ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, la teoría de control lineal sirve de base para sistemas de control no lineales más complejos. Para muchas aplicaciones prácticas, el uso de sistemas de control lineales es a menudo razonable, puesto que los manipuladores robóticos que se usan en la mayoría de las industrias se mueven relativamente lento. Pero si las articulaciones se mueven rápidamente, entonces todas ellas tienen que moverse de manera simultánea. En esta situación, las fuerzas dinámicas acopladas son significativas, y la dinámica del robot es no lineal y compleja. Las articulaciones no pueden moverse de manera independiente, y se requiere de algoritmos de control complejos.

10.1 Técnicas de control

Pueden emplearse varias técnicas para resolver un problema de control de un manipulador robótico. Tanto la técnica que se emplea como la manera de su implementación podrán tener una influencia significativa sobre el desempeño del robot. Por ejemplo, la necesidad de un movimiento continuo se contrapone de aquella que permitiese un control de punto a punto, donde únicamente importa alcanzar la posición final. Por otro lado, el diseño mecánico del robot tiene una influencia sobre el tipo de método de control que va a utilizarse. Por ejemplo, el problema de control de un robot cartesiano es significativamente diferente al problema de control de un robot articulado antropomórfico, pues en este último los movimientos del

efector final tienen que convertirse a los movimientos de las articulaciones. El sistema para accionar las articulaciones también tiene un efecto sobre el tipo de estrategia de control que se utilizará. Si un manipulador se acciona mediante motores eléctricos con engranes reductores de alta razón de transferencia, la presencia de los engranes tiende a linealizar la dinámica del sistema. Los términos efectivos de masa e inercia de los eslabones son por lo regular enormemente reducidos por el cuadrado de la relación del engranaje. Por lo tanto, la dinámica de las articulaciones se desacopla, y cada articulación puede ser controlada en forma independiente. Sin embargo, la presencia de engranajes introduce fricción, deformación y holgura en el tren de engranajes. Como resultado, el diseñador del control tiene que poner más atención a estos efectos que a la inercia no lineal, a las fuerzas de Coriolis, etc., con el fin de lograr alto rendimiento. Por el contrario, los accionamientos directos, como se da en el caso de robots de accionamiento directo, eliminan los problemas del tren de engranajes, aunque introducen términos no lineales debido al acoplamiento entre articulaciones y los eslabones. Como resultado, debe pensarse en diferentes estrategias de control para obtener un alto rendimiento.

Por otro lado, el problema de control del manipulador es de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO por sus siglas en inglés), como se indica en la figura 10.1 mediante los vectores n -dimensionales a lo largo de cada línea de señal. Para simplificar el problema, se considera cada articulación como independiente y controlada por separado. Esta consideración se justifica para robots con múltiples engranajes, como ya se mencionó anteriormente. Ahora bien, para el modelo de una sola articulación, existe una sola entrada y una sola salida (SISO). El control que se diseña para este tipo de modelo se llama comúnmente control de variable de articulación independiente. Por lo tanto, para un manipulador de n articulaciones, tienen que diseñarse n sistemas de control SISO independientes. Puesto que cada sistema SISO puede modelarse como una ecuación diferencial lineal de segundo orden, sus características se estudiarán en la siguiente sección, mientras que a continuación se mencionan las diferentes maneras de controlarla:



¿Por qué SISO?

En robots con múltiples engranajes, la consideración de un control independiente y separado para cada articulación es equivalente a un problema de control SISO.

- i) Control de encendido/apagado o control de dos pasos.
- ii) Control proporcional (P): produce una señal de control proporcional al error entre el movimiento deseado y el real.
- iii) Control derivativo (D): se genera una señal de control que es proporcional a la razón de cambio del error. El control derivativo se conoce como un control anticipado que mide la razón de cambio del error existente, anticipa el error más grande entrante y aplica la corrección antes de que el error mayor pueda llegar. El control derivativo nunca se usa solo.
- iv) Control integral (I): produce una señal de control proporcional a la integral del error respecto al tiempo. Este tipo de controlador puede considerarse como el retroactivo que suma todos los errores y luego responde.
- v) Modos de combinación: en estos modos se combinan las estrategias arriba mencionadas, como los controles proporcionales (P) y derivativos (D), y por ello se llama control PD. De manera similar, también se usan controles proporcionales e integrales (PI), así como proporcionales, integrales y derivativos (PID), para lograr el desempeño deseado.

Observe que un controlador basado en las estrategias mencionadas reacciona a la señal de error y suministra a los actuadores la entrada de control necesaria. Para el control de robots existen también sistemas de control más avanzados, tales como el adaptivo, el de par de torsión computado, el difuso, entre otros. Éstos no se analizarán en este libro.

10.2



Sistemas lineales de segundo orden

Considere el sistema mecánico que se presenta en la figura 10.2. Un bloque de la masa m se une a un resorte con rigidez k y sujeto a una fricción de coeficiente b . La posición cero del bloque y el sentido positivo de x se indican en la figura 10.2. Si se supone que hay una fuerza de fricción proporcional a la velocidad del bloque, el diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que está actuando sobre el bloque lleva directamente a la siguiente ecuación de movimiento:

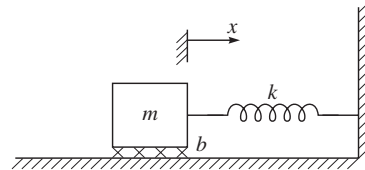


Figura 10.2 Sistema de masa-resorte con fricción

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (10.1)$$

que es una ecuación diferencial de coeficiente constante lineal de segundo orden. La solución para la ecuación diferencial (10.1) es una función del tiempo $x(t)$ que describe el movimiento del bloque. Esta solución dependerá de las condiciones iniciales del bloque, es decir, de su posición y velocidad inicial. Según el estudio de las ecuaciones diferenciales, si se supone que la solución de x es $x = e^{st}$, entonces la solución para la ecuación (10.1) depende de las raíces de su ecuación característica, a saber,

$$ms^2 + bs + k = 0 \quad (10.2)$$

que tiene las siguientes raíces:

$$s_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}; \text{ y } s_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} \quad (10.3)$$

Si s_1 y s_2 son reales, el comportamiento del sistema es lento y no oscilatorio. Si s_1 y s_2 son complejos, es decir, si tienen componentes imaginarios, el comportamiento del sistema es oscilatorio. El rango entre estos dos comportamientos da el tercer tipo de respuesta, es decir, la respuesta no oscilatoria más rápida. Estos casos se presentarán a continuación.

Caso I: Raíces reales y desiguales

Este caso se presenta cuando $b^2 > 4mk$, es decir, cuando la fricción domina y el resultado es el comportamiento lento. Esta respuesta se llama sobreamortiguada. La solución $x(t)$, que da el movimiento del bloque en el caso de raíces reales y desiguales, tiene la siguiente forma:

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (10.4)$$

donde s_1 y s_2 se obtienen por la ecuación (10.3), que también se llaman polos del sistema. Los coeficientes c_1 y c_2 son constantes que pueden ser determinadas para cualquier conjunto de condiciones iniciales, es decir, la posición y velocidad inicial del bloque. La figura 10.3

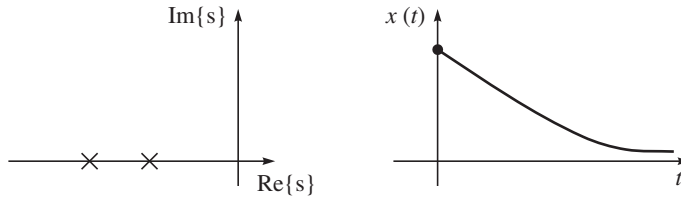


Figura 10.3 Ubicación de raíces (polos) y respuesta del sistema de un sistema sobreamortiguado.

muestra un ejemplo de ubicaciones de polos o raíces y la correspondiente respuesta de tiempo a una condición inicial de no cero. Cuando los polos de un sistema de segundo orden son reales y desiguales, el sistema demuestra movimientos lentos o sobreamortiguados. En casos donde uno de los polos tiene una magnitud mucho mayor que el otro, el polo de mayor magnitud puede omitirse, puesto que el término que le corresponde decaerá rápidamente a cero en comparación con el otro polo más dominante. Esta misma noción de dominio se extiende a los sistemas de mayor orden; por ejemplo, frecuentemente puede estudiarse un sistema de tercer orden como sistema de segundo orden si se consideran solamente dos polos dominantes.

Ejemplo 10.1

Movimiento de un bloque con raíces (polos) reales y desiguales

Para el sistema de la figura 10.2, si los parámetros del sistema son $m = 1$, $b = 5$ y $k = 6$, la ecuación característica se obtiene por

$$s^2 + 5s + 6 = 0 \quad (10.5)$$

que tiene raíces (polos) en $s_1 = 2$ y $s_2 = 3$. Por lo tanto, la respuesta tiene la siguiente forma:

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} \quad (10.6)$$

Si el bloque está inicialmente en reposo y se libera de la posición $x = -1$, es decir, $x(0) = -1$ y $\dot{x}(0) = 0$, los coeficientes c_1 y c_2 pueden entonces calcularse fácilmente a partir de las ecuaciones que satisfagan las condiciones iniciales en $t = 0$, es decir,

$$c_1 + c_2 = -1; \text{ y } -2c_1 - 3c_2 = 0 \quad (10.7)$$

La ecuación (10.7) proporciona $c_1 = -3$ y $c_2 = 2$. De este modo, el movimiento del sistema para ≥ 0 se obtiene por

$$x(t) = -3e^{-2t} + 2e^{-3t} \quad (10.8)$$

Caso II: Raíces complejas

Este caso se presenta cuando $b^2 < 4mk$, es decir, cuando domina la rigidez, y se da como resultado el comportamiento oscilatorio. Esta respuesta se llama subamortiguada. Para este caso, la ecuación característica tiene raíces complejas de la forma

$$s_1 = \lambda + \mu i; \text{ y } s_2 = \lambda - \mu i \quad (10.9)$$

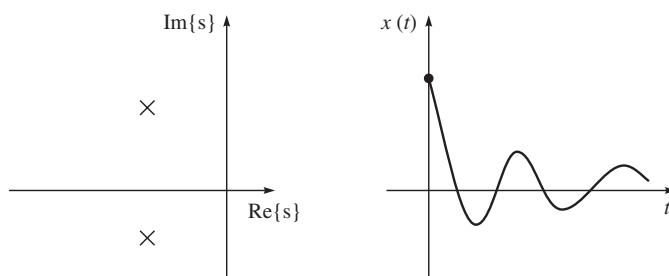


Figura 10.4 Ubicación de raíces (polos) y respuesta del sistema de un sistema subamortiguado.

que proporciona la solución en la forma

$$x(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} \quad (10.10)$$

Sin embargo, la ecuación (10.10) es difícil de usar en forma directa, puesto que involucra números imaginarios de manera explícita. Si se usa la fórmula de Euler, puede demostrarse que

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (10.11)$$

entonces, la solución, ecuación (10.10), puede manipularse en la forma

$$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + \alpha_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t), \text{ donde } \alpha_1 \equiv c_1 + c_2 \text{ y } \alpha_2 \equiv i(c_1 - c_2) \quad (10.12)$$

Como sucedió anteriormente, los coeficientes α_1 y α_2 son constantes que pueden ser determinadas para cualquier juego determinado de condiciones iniciales, es decir, la posición y velocidad inicial del bloque. Suponga que las constantes α_1 y α_2 se escriben como

$$\alpha_1 = r \cos \delta, \text{ y } \alpha_2 = r \sin \delta \quad (10.13)$$

Entonces, la ecuación (10.12) puede escribirse en la siguiente forma:

$$x(t) = r e^{\lambda t} \cos(\mu t - \delta) \quad (10.14)$$

donde

$$r = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \text{ y } \delta = \tan^{-1}(\alpha_2, \alpha_1) \quad (10.15)$$

Ahora queda claro, por la ecuación (10.14), que el movimiento resultante es una oscilación cuya amplitud disminuye exponencialmente hacia cero. La figura 10.4 muestra las ubicaciones de los polos y la correspondiente respuesta de tiempo a una condición inicial de no cero. Cuando los polos de un sistema de segundo orden son complejos, el sistema muestra un movimiento oscilatorio o subamortiguado.

Ejemplo 10.2

Movimiento de un bloque con raíces complejas

Si los parámetros del sistema que se presenta en la figura 10.2 son $m = 1$, $b = 1$ y $k = 1$, la ecuación característica se vuelve

$$s^2 + s + 1 = 0 \quad (10.16)$$

cuyas raíces son $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Por lo tanto, la respuesta $x(t)$ tiene la siguiente forma:

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(\alpha_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \alpha_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \quad (10.17)$$

Observe que para el bloque que estuvo inicialmente en reposo y que se liberó de la posición $x = -1$, las condiciones iniciales son $x(0) = -1$ y $\dot{x}(0) = 0$. Para determinar las constantes c_1 y c_2 , se tiene que

$$\alpha_1 = -1, \text{ y } \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_2 = 0 \quad (10.18)$$

lo que da $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, el movimiento del sistema para $t \geq 0$ se obtiene por

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \left(-\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) \quad (10.19)$$

lo que también puede ponerse en la forma de la ecuación (10.14) como

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + 150^\circ \right) \quad (10.20)$$

Caso III: Raíces reales e iguales

Este caso especial se presenta cuando $b^2 = 4mk$, es decir, cuando la fricción y la rigidez están balanceadas, lo que produce la respuesta no oscilatoria más rápida posible. Esta respuesta se llama críticamente amortiguada. Mediante la ecuación (10.3), puede demostrarse que tiene raíces iguales y reales s , es decir, raíces repetidas. La solución tiene la forma

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{st} \quad (10.21)$$

donde $s_1 = s_2 = s = -\frac{b}{2m}$. Por lo tanto, la ecuación (10.21) puede escribirse como

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{b}{2m}t} \quad (10.22)$$

La figura 10.5 muestra las ubicaciones de polos y la respuesta de tiempo correspondiente a una condición inicial no cero. Cuando los polos de un sistema de segundo orden son reales e iguales, el sistema muestra un movimiento críticamente amortiguado: la respuesta no oscilatoria más rápida posible. Este tercer caso de amortiguamiento crítico es generalmente una situación deseable, ya que el sistema nulifica las condiciones iniciales de no cero y regresa a su posición nominal lo más rápidamente posible sin comportamiento oscilatorio.

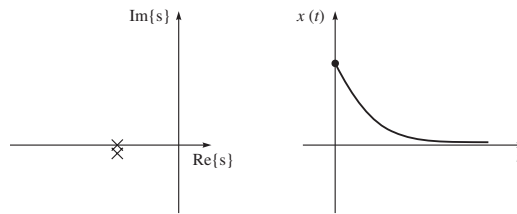


Figura 10.5 Ubicación de raíces (polos) y respuesta del sistema de un sistema críticamente amortiguado

Ejemplo 10.3

Movimiento de un bloque con raíces iguales y reales

Para el sistema de la figura 10.2, los parámetros son $m = 1$, $b = 4$ y $k = 4$. La ecuación característica es

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \quad (10.23)$$

cuyas raíces son $s_1 = s_2 = s = -2$. Por lo tanto, la respuesta tiene la siguiente forma:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \quad (10.24)$$

Para el bloque que estuvo inicialmente en reposo cuando se liberó de la posición $x = -1$, las condiciones iniciales son $x(0) = -1$ y $\dot{x}(0) = 0$, lo cual se utilizará para determinar c_1 y c_2 . Para cumplir con estas condiciones en $t = 0$, se tiene que

$$c_1 = -1, \text{ y } -2c_1 + c_2 = 0 \quad (10.25)$$

La ecuación (10.25) se cumple mediante $c_1 = -1$ y $c_2 = -2$. De este modo, el movimiento del sistema para $t \geq 0$ se obtiene por

$$x(t) = (-1 - 2t)e^{-2t} \quad (10.26)$$

En los ejemplos 10.2 y 10.3, todos los sistemas estuvieron estables. Para cualquier sistema físico pasivo como el de la figura 10.2, éste será el caso. Estos sistemas mecánicos siempre tienen las propiedades

$$m > 0; b > 0 \text{ y } k > 0 \quad (10.27)$$

En el caso de que un sistema no sea estable, no siempre será posible cambiar los parámetros del sistema físico. Por lo tanto, tiene que usarse el concepto de un control retroalimentado, donde deberá ser posible cambiar de manera efectiva los valores de uno o más de los coeficientes de la ecuación característica, de tal modo que el sistema resultante sea estable. Esto se analizará en la siguiente sección.

10.3



Control retroalimentado

En el caso de un control de lazo abierto de un robot, es decir, sin retroalimentación, el par de torsión o las fuerzas en un actuador pueden computarse en forma directa a partir del modelo dinámico del manipulador que se calculó en los capítulos 8 y 9, en las ecuaciones (8.44a) o

(9.9a). Utilizando, por ejemplo, la ecuación (8.44a) —el comportamiento dinámico de un manipulador para una trayectoria determinada, es decir, para θ_d , $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$ —, las ecuaciones de movimiento se expresan como

$$\mathbf{I} \ddot{\theta}_d + \mathbf{h}_d + \boldsymbol{\gamma}_d = \boldsymbol{\tau}_d \quad (10.28)$$

donde θ_d , $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$ denotan los vectores n -dimensionales —siendo n el número de articulaciones del manipulador— de las posiciones, velocidades y aceleraciones de articulaciones deseadas, respectivamente. Estos valores se conocen a partir del generador de trayectorias, como se indica en la figura 10.1. Además,

I: la matriz de inercia generalizada de $n \times n$ (GIM), que es una función de los ángulos de articulación θ_d .

\mathbf{h}_d : el vector n -dimensional de los términos de inercia convectiva (VCI), que es una función de ángulos y velocidades de articulaciones, es decir, θ_d , $\dot{\theta}_d$.

$\boldsymbol{\gamma}_d$: el vector n -dimensional de aceleraciones gravitacionales, que es una función únicamente de los ángulos de articulación, es decir, θ_d .

$\boldsymbol{\tau}_d$: el vector n -dimensional de las fuerzas generalizadas, que pueden ser pares de torsión o fuerzas en las articulaciones, dependiendo del tipo de articulaciones utilizadas, es decir, revolutas o prismáticas, respectivamente. Los pares de torsión o fuerzas de articulaciones surgen debido a la presencia de los actuadores necesarios para impulsar el robot a lo largo de la trayectoria de las articulaciones deseada, es decir, θ_d , $\dot{\theta}_d$ y $\ddot{\theta}_d$.

Observe que cuando se usa la ecuación (10.28), el robot no seguirá la trayectoria deseada, debido a incertidumbres acerca de la longitud de eslabones, masa e inercia, así como por la no consideración de fricción, holguras, etc. Por lo tanto, el control por retroalimentación es esencial, donde se retroalimentan al sistema de control las posiciones reales de las articulaciones o el efector final y a veces sus derivadas, como se indica en la figura 10.1 mediante las líneas punteadas. Con el fin de hacer esto, los robots están equipados con sensores en cada articulación para medir los ángulos de las articulaciones y a veces también se instalan sensores de velocidad, por ejemplo, tacómetros. Los principios de algunos de estos sensores se explicaron en el capítulo 4. Para el control retroalimentado, el robot acepta



¿Qué es lo que se retroalimenta?

Se retroalimenta el estado actual del robot, es decir, la posición y frecuentemente la velocidad de cada articulación.

un vector de pares de torsión y fuerzas de las articulaciones, denotados por $\boldsymbol{\tau}$, del sistema de control. La ecuación (10.28) computa estos pares de torsión y fuerzas de articulaciones para el sistema de control, mientras que los sensores del manipulador leen el vector de posiciones de las articulaciones $\boldsymbol{\theta}$ y las velocidades de las articulaciones $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ para el controlador. Observe que los pares de torsión y fuerzas de las articulaciones $\boldsymbol{\tau}_d$ son necesarios para producir la trayectoria deseada θ_d . Si el modelo dinámico fue completo y exacto, y si no hubo presencia de ruidos u otras perturbaciones, el uso continuo de la ecuación (10.28) a lo largo de la trayectoria deseada lo produciría, y no habrá error entre las posiciones y velocidades de articulaciones deseadas y reales. Puesto que esto no sucede en la realidad, debido a la imperfección del modelo dinámico y la inevitable presencia de perturbaciones, la retroalimentación se utiliza para computar el error, que también se conoce como servo-error, encontrando la diferencia entre las posiciones deseadas y reales, y, del mismo modo, entre las velocidades deseadas y reales, es decir,

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\theta}_d - \boldsymbol{\theta}; \text{ y } \dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_d - \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (10.29)$$

El sistema de control computará entonces el par de torsión como alguna función del servo-error para ser transmitido a los actuadores, de manera que el servo-error sea mínimo o cero. Un sistema de control que hace uso de la retroalimentación se llama sistema de lazo cerrado. El lazo cerrado de uno de estos sistemas de control alrededor del robot es aparente, según la figura 10.1, mientras que la figura 10.6 muestra una implementación por hardware del sistema de control de lazo cerrado. En la figura 10.6, el comparador es un circuito electrónico que mide el error entre la salida deseada (también conocido como “referencia”) y la salida real o medida, y produce señales para el controlador. El controlador puede ser una computadora o microcomputadora o incluso un microprocesador que implemente una estrategia de control basada en la señal de error arriba mencionada. La señal del controlador se convierte entonces en una señal análoga mediante un convertidor de digital a análogo (DAC), otro circuito electrónico, antes de ser ampliada por el amplificador de potencia con el fin de acrecentar la pequeña señal, de tal modo que pueda mover el actuador de la articulación. Luego se usa un sensor para detectar la posición y, de ser posible, la velocidad de la articulación, lo que retroalimenta al comparador después de que se convierte la señal análoga por medio de un convertidor de análogo a digital (ADC), que es otro circuito electrónico.

En el control retroalimentado, la señal de control τ_d no es la única entrada que actúa sobre el sistema. Como se muestra en la figura 10.6, las perturbaciones también son entradas, que no se controlan pero que influyen en el comportamiento de la salida. Por lo tanto, el controlador debe diseñarse, además para la minimización del servo-error, para reducir los efectos de las perturbaciones. Como resultado, el robot deberá comportarse de manera estable. Si se logra esto, puede decirse que el controlador rechaza las perturbaciones. El doble objetivo de seguir la trayectoria o rastreo y rechazar las perturbaciones es central para cualquier metodología de control. Deberá observarse que un sistema de control incorrectamente diseñado a veces puede dar como resultado el desempeño inestable, en el cual los servo-errores se aumentan en vez de reducirse. Por lo tanto, la primera tarea de un ingeniero de control es comprobar que su diseño produce un sistema estable; en segundo lugar, debe comprobar que el desempeño de lazo cerrado del sistema es satisfactorio, es decir, que el error se encuentra dentro de los límites aceptados. En la práctica, estas comprobaciones podrán abarcar desde comprobaciones matemáticas basadas en ciertas suposiciones y modelos hasta resultados más empíricos, como los que se obtienen a través de la simulación numérica o la experimentación.

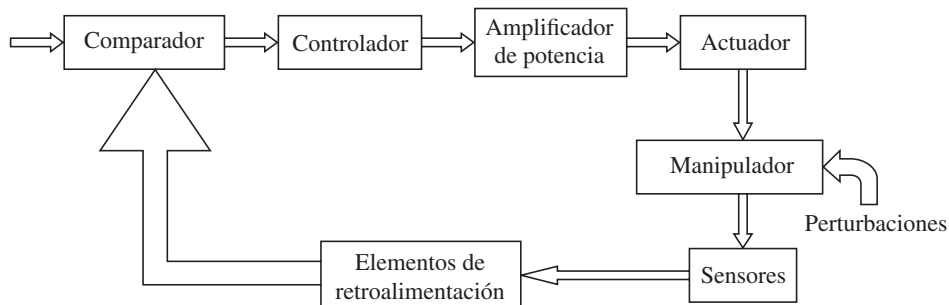


Figura 10.6 Implementación por hardware de un controlador de lazo cerrado

10.3.1 Control retroalimentado de un bloque

En esta subsección se presenta una ilustración del control por retroalimentación, utilizando el sistema de masa-resorte-amortiguador que se presentó en la sección 10.2. Suponga que la respuesta natural del bloque no es como se desea. Quizá sea subamortiguada y oscilatoria y se quiera que sea críticamente amortiguada. O tal vez el resorte falte por completo ($k = 0$) y de esta forma el sistema nunca regrese a $x = 0$ si éste se perturba. Mediante el uso de sensores, de un actuador y de un sistema de control, puede modificarse el comportamiento del sistema. La figura 10.7a) presenta un sistema de masa-resorte-amortiguador con la adición de un actuador, por lo que es posible aplicar una fuerza f al bloque. El diagrama de cuerpo libre que se presenta en la figura 10.7b) lleva a la siguiente ecuación de movimiento:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (10.30a)$$

que tiene una representación alternativa, a saber,

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f' \quad (10.30b)$$

donde

$$\omega_n \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}; \zeta \equiv \frac{b}{2\sqrt{km}}; \text{ y } f' \equiv \frac{f}{m} \quad (10.30c)$$

Los términos ω_n y ζ se llaman frecuencia natural y razón de amortiguamiento, respectivamente, mientras que f' es la función de forzamiento modificada que actúa sobre el sistema. Ahora supóngase que hay sensores capaces de detectar la posición y velocidad del bloque. Se propone una ley de control que computa la fuerza y que deberá ser aplicada por los actuadores como función de la retroalimentación detectada, es decir,

$$f = k_p(x_d - x) + k_v(\dot{x}_d - \dot{x}) \quad (10.31)$$

donde x_d y \dot{x}_d son la posición y velocidad deseada del bloque. Si el bloque tiene que mantenerse en reposo en el origen, entonces $x_d = 0$ y $\dot{x}_d = 0$. Este control se ilustra en la figura 10.8, donde \ddot{x}_d representa la aceleración deseada que también se deriva para ser cero, es decir, $\ddot{x}_d = 0$. Observe que la parte izquierda de la línea punteada en la figura 10.8 es el sistema de control (usualmente implementado en una computadora), mientras que la parte de la derecha de la línea punteada es el sistema físico. Implícitas en la figura están las interfaces entre la computadora de control y los comandos del actuador de salida, junto con la información del sensor de entrada. El sistema de control propuesto es un sistema de regulación de posiciones, que simplemente trata de mantener la posición del bloque en un lugar fijo, independientemente de las fuerzas de perturbación aplicadas al bloque. Al igualar la dinámica de lazo

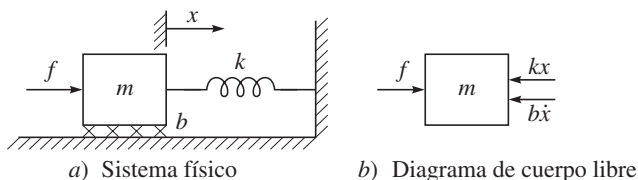
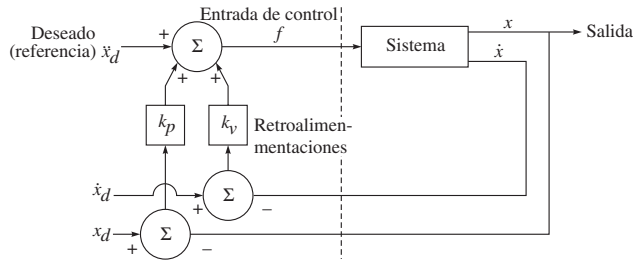


Figura 10.7 Un sistema de masa-resorte-amortiguador con un actuador



El controlador lee la entrada del sensor y escribe los comandos de salida del actuador

Figura 10.8 Un sistema de control retroalimentado

abierto del bloque, ecuación (10.30a), con la ley de control de la ecuación (10.31), se calcula la dinámica de lazo cerrado como

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = -k_p x - k_v \dot{x} \quad (10.32a)$$

o

$$m\ddot{x} + (b + k_v)\dot{x} + (k + k_p)x = 0 \quad (10.32b)$$

lo que da

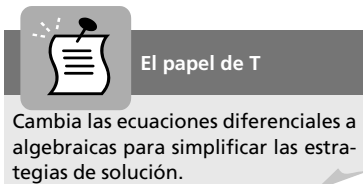
$$m\ddot{x} + b'\dot{x} + k'x = 0 \quad (10.32c)$$

donde $b' \equiv b + k_v$ y $k' \equiv k + k_p$. Según las ecuaciones (10.32b-c), queda claro que, mediante la elección de las ganancias de control k_v y k_p , puede lograrse que el sistema de lazo cerrado se comporte como cualquiera de los sistemas de segundo orden que se explicaron en la sección 10.2. Las ganancias se seleccionan para obtener la amortiguación crítica, es decir, $b' = 2\sqrt{mk'}$. Observe que k_v y k_p podrán ser negativos o positivos, dependiendo de los parámetros del sistema original. Sin embargo, si b' o k' son negativos el resultado podría derivar en un sistema inestable. Esta inestabilidad sería obvia si se escribiera la solución de la ecuación diferencial de segundo orden del lazo cerrado, ecuación (10.32b), en la forma de las ecuaciones (10.4), (10.12) y (10.21). También tiene sentido intuitivo que si b' o k' son negativos, los servo-errores tienden a magnificarse en vez de reducirse.

10.3.2 Representación de la función de transferencia

La ley de control arriba mencionada también puede explicarse mediante el concepto de la función de transferencia (TF) que se usa extensamente en la teoría de control. La definición de una TF se da en el apéndice A. Ahora bien, para el sistema de masa-resorte amortiguado que se muestra en la figura 10.7, la TF de lazo abierto, conforme a la ecuación (A.26 a), se obtiene por

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (10.33)$$



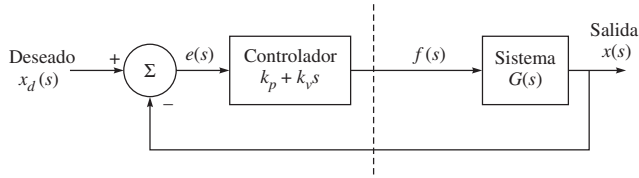


Figura 10.9 Representación de la función de transferencia del control retroalimentado

donde $x(s)$ y $f(s)$ son las transformadas de Laplace de los parámetros de variación en el tiempo, es decir, el desplazamiento x y la fuerza f , respectivamente.

Para el control retroalimentado, se selecciona la función de forzamiento f de acuerdo con la ecuación (10.31), de tal modo que el bloque siga o rastree una trayectoria deseada denotada por x_d , que por lo general es también una función del tiempo. Por ende, el sistema de lazo cerrado para el control retroalimentado como se muestra en la figura 10.8 también tiene la representación que se muestra en la figura 10.9, donde la salida $x(s)$, usando las reglas de las manipulaciones del diagrama de bloques, puede escribirse como

$$x(s) = G(s) (k_p + k_v s) [x_d(s) - x(s)] \quad (10.34a)$$

En la figura 10.9, la señal de entrada al controlador es el error $e(s)$, definido como la diferencia entre la salida real y la deseada que genera la fuerza necesaria $f(s)$, es decir, $f(s) = (k_p + k_v s)e(s)$. Mediante el reordenamiento de la ecuación (10.34a), puede obtenerse fácilmente la TF de lazo cerrado, relacionando la salida $x(s)$ y la salida deseada $x_d(s)$ como

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{G(s)(k_p + k_v s)}{1 + G(s)(k_p + k_v s)} \quad (10.34b)$$

Según la ecuación (10.34b), queda claro que para un comportamiento deseado del sistema de lazo cerrado, los polos de la ecuación característica deberán seleccionarse de manera apropiada. Según la ecuación (10.34b), la ecuación característica se obtiene por

$$1 + G(s)(k_p + k_v s) = 0 \quad (10.35)$$

Si se sustituye la expresión para la TF, $G(s)$ que se obtiene por la ecuación (10.33), puede reescribirse la ecuación (10.35), que proporciona la expresión equivalente a la ecuación (10.32c). Entonces, según la ecuación (10.35), el sistema de lazo cerrado se amortigua críticamente cuando sus polos son iguales, es decir, $s_1 = s_2$. Para esta situación, $b' = 2\sqrt{mk'}$, que también se obtiene según el análisis de dominio de tiempo que se presenta en la subsección 10.3.1.

Ejemplo 10.4

Diseño sencillo de controladores

Si los parámetros del sistema de la figura 10.7 son $m = 1$, $b = 1$ y $k = 1$, las ganancias k_p y k_v para una ley de control de regulación de posiciones deberán encontrarse para un sistema críticamente amortiguado con la rigidez de lazo cerrado de 16.0, es decir, $k' = 16.0$. Para la amortiguación crítica se requiere $b' = 2\sqrt{mk'} = 8.0$, es decir,

$$b' \equiv b + k_v = 8 \quad (10.36)$$

Por lo tanto, $k_v = 7$ porque $b = 1$. Además, $k_p = 15$, ya que $k' \equiv k + k_p = 16$ y $k = 1$.

Ejemplo 10.5**Gráficas de MATLAB para el comportamiento del bloque de la figura 10.7**

Para los parámetros señalados en el ejemplo 10.4, la TF del bloque se obtiene según la ecuación (10.33) como

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (10.37a)$$

El comportamiento del bloque $x(s)$ para una perturbación inicial, por ejemplo, la entrada de pulsos, es decir, $f(s) = 1$, se obtiene mediante el comando que se proporciona a continuación:

```
>> num = 1;
>> den = [1 1 1];
>> impulse(num,den);
```

La respuesta se muestra en la figura 10.10a), donde la amplitud a lo largo del eje Y representa el valor de $x(t)$. Observe la sobreoscilación y la naturaleza vibratoria de la respuesta al principio y antes de estabilizarse. Ésta es la característica de un sistema subamortiguado. Ahora bien, la respuesta del sistema se grafica para el bloque controlado por retroalimentación mediante la función de transferencia de lazo cerrado que se obtiene según la ecuación (10.36), es decir,

$$\frac{x(s)}{x_d(s)} = \frac{G(s)(k_p + k_v s)}{1 + G(s)(k_p + k_v s)} = \frac{7s + 15}{s^2 + 8s + 16} \quad (10.37b)$$

donde se emplea el $G(s)$ de la ecuación (10.37a). La respuesta $x(s)$ para el pulso de entrada $x_d(s) = 1$ puede entonces obtenerse usando los siguientes comandos:

```
>> numc = [7 15];
>> denc = [1 8 16];
>> impulse(numc,denc);
```

La respuesta se muestra en la figura 10.10b), donde la estabilidad asintótica se asegura, puesto que los dos polos de la ecuación característica son -4 .

10.4**El desempeño de sistemas de control retroalimentados**

La habilidad para ajustar el desempeño de un sistema es la ventaja distintiva de cualquier control retroalimentado. Con el fin de analizar y diseñar sistemas de control, tiene que definirse y medirse su desempeño. Luego, basado en el desempeño deseado, podrán ajustarse los parámetros del sistema para dar la respuesta deseada. Puesto que los sistemas de control son inherentemente dinámicos, su desempeño usualmente se especifica en términos de su respuesta en tiempo para una señal de entrada específica, así como el error de estado estable resultante. Es necesario determinar inicialmente si el sistema es estable o no, es decir, si la respuesta a una señal de entrada específica proporciona las medidas deseadas de desempeño. Sin embargo, observe que usualmente se desconoce la señal de entrada real a un sistema. Por

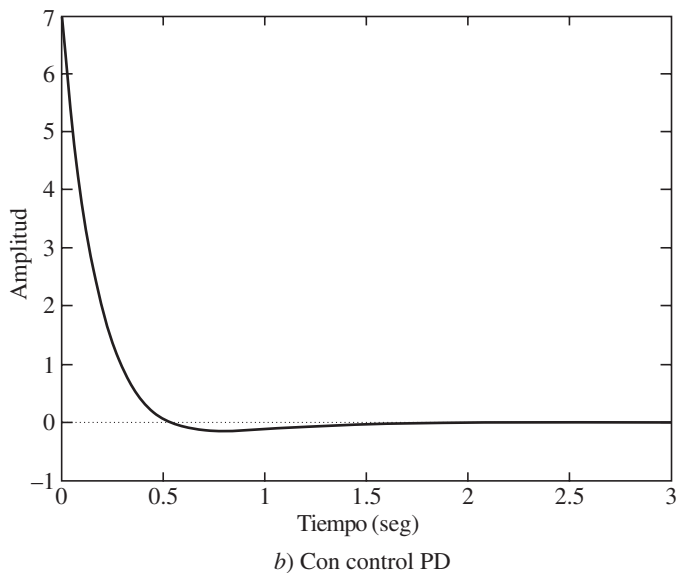
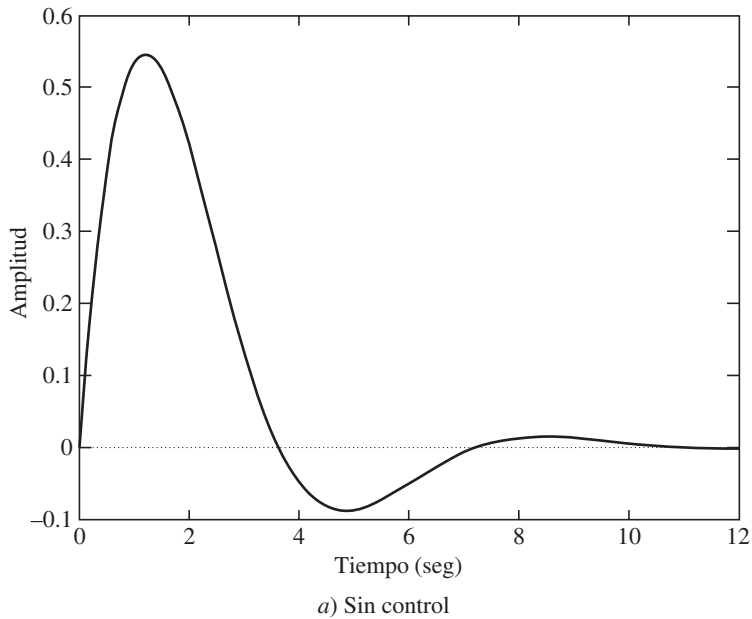


Figura 10.10 Comportamiento del bloque sin y con control

ende, se selecciona normalmente una señal de entrada estándar de prueba. Una de ellas es la entrada escalonada. Las entradas escalonadas son, de hecho, también entradas comunes a muchos procesos físicos. En aplicaciones de control, una práctica común es la de evaluar el comportamiento de un sistema con base en su respuesta escalonada. Este planteamiento

es bastante útil porque hay una correlación razonable entre la respuesta de un sistema a una entrada de prueba estándar y la capacidad del sistema para funcionar en condiciones de operación normales. Además, el uso de una entrada estándar le permite al diseñador la comparación de varios diseños disponibles.

Con el fin de evaluar el desempeño de un sistema de control, considere el sistema que se presenta en la figura 10.7, cuyo comportamiento se evaluará contra una entrada escalonada unitaria. Para este tipo de estudio, es más conveniente usar la forma de la ecuación dinámica de movimiento que se da en la ecuación (10.30b), donde la correspondiente función de transferencia (TF) se obtiene en la ecuación (A.26b). Para una entrada escalonada unitaria, es decir, $f'(s) = 1/s$, la salida $x(s)$ se obtiene por

$$x(s) = G(s)f'(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (10.38a)$$

que puede ser reordenada como

$$x(s) = G(s)f'(s) = \frac{1}{s(s + s_1)(s + s_2)} \quad (10.38b)$$

donde s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación característica de los polos del sistema que se proporciona en la ecuación (A.27). Mediante las fórmulas inversas de la transformada de Laplace, la salida x , como función de tiempo, t , se obtiene como

$$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi), \text{ donde } \phi = \cos^{-1}\zeta \quad (10.39)$$

y el término $\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$, se conoce como frecuencia natural amortiguada. Dependiendo del valor de la razón de amortiguamiento ζ , estos polos pueden ser reales y desiguales ($\zeta > 1$) o reales e iguales ($\zeta = 1$) o complejos conjugados ($\zeta < 1$). Por lo tanto, se refiere al sistema como sobreamortiguado, críticamente amortiguado y sub-amortiguado, respectivamente. Para varios valores de la razón de amortiguamiento ζ , se muestran las respuestas en la figura 10.10. Conforme se reduzca ζ , se acercan los polos del sistema al eje imaginario y la respuesta se vuelve cada vez más oscilatoria.

Ahora, los desempeños medidos respecto a la respuesta transitoria de la entrada escalonada a un sistema se muestran en la figura 10.11. La prontitud de la respuesta se mide por el tiempo de subida T_r y el tiempo pico T_p , como se indica en la figura. Para sistemas sub-amortiguados con $\zeta < 1$ y una sobreoscilación, el tiempo de subida T_r es un índice útil, mientras que para los sistemas sobreamortiguados $\zeta > 1$ y sin sobreoscilación, no se define ningún tiempo pico. Por lo tanto, se usa normalmente un tiempo de subida de 10-90% T_{r1} , como se indica en la figura 10.11. La similitud con la que la respuesta real coincide con la entrada escalonada se mide por el porcentaje de sobreoscilación y el tiempo de estabilización T_s . El porcentaje de sobreoscilación (PO) se define como

$$PO = \frac{M_{pt} - f_v}{f_v} \times 100\% \quad (10.40)$$

donde M_{pt} es el valor pico de la respuesta de tiempo y f_v es el valor final de la respuesta. Normalmente, f_v es la magnitud de la entrada, pero muchos sistemas tienen un valor final diferente de la magnitud de entrada deseada. Para el sistema con un paso unitario que se presenta en la ecuación (10.38a), el valor de f_v es uno. Entonces, el tiempo de estabilización

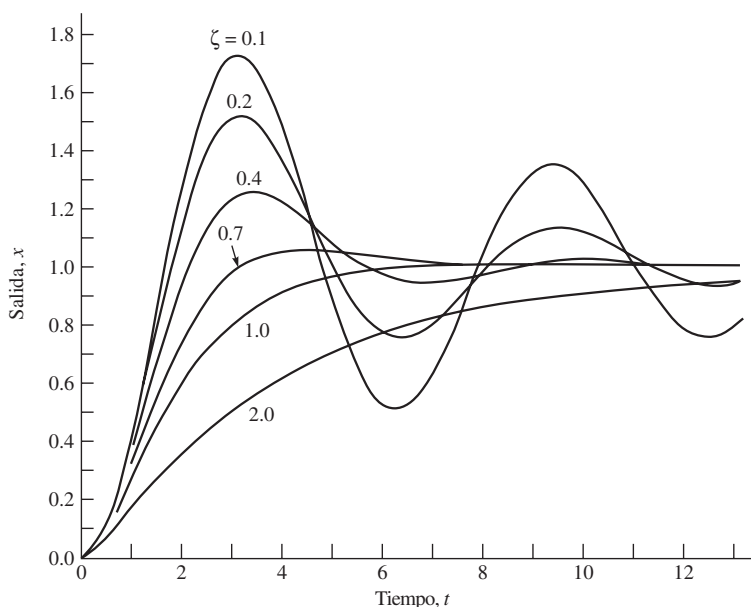


Figura 10.11 Respuesta de un sistema de segundo orden

T_s se define como el tiempo necesario del sistema para estabilizarse dentro de un determinado porcentaje δ de la amplitud de entrada. La banda de $\pm \delta$ se muestra en la figura 10.11. Para el sistema de segundo orden en estudio, la respuesta permanece dentro de 2% después de cuatro constantes de tiempo, es decir,

$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (10.41)$$

Finalmente, el error de estado estable se mide en la respuesta escalonada del sistema, como se muestra en la figura 10.12. Por otro lado, los requerimientos de la respuesta transitoria son la prontitud de respuesta T_r y T_p y la cercanía de la respuesta a lo deseado M_{pt} y T_s , que son contradictorias. Por lo tanto, tiene que encontrarse una solución intermedia.

Para un sistema robótico, no puede permitirse una respuesta oscilatoria, particularmente en una operación de levantar y colocar, donde un efector final podrá chocar contra el objeto antes de recogerlo para su manipulación. Por lo tanto, la más alta velocidad, pero sin una respuesta oscilatoria, dicta que los parámetros de diseño del controlador deberán seleccionarse de tal manera que tengan una razón de amortiguamiento igual a uno o cerca de uno, pero menos que uno.

10.5 Una articulación robótica

En esta sección se desarrollará el modelo para una articulación robótica. Para ello, primero que nada se desarrollará el modelo del par de torsión de un motor de corriente directa (CD) que se muestra en la figura 3.8 y que comúnmente se usa en robots industriales, seguido

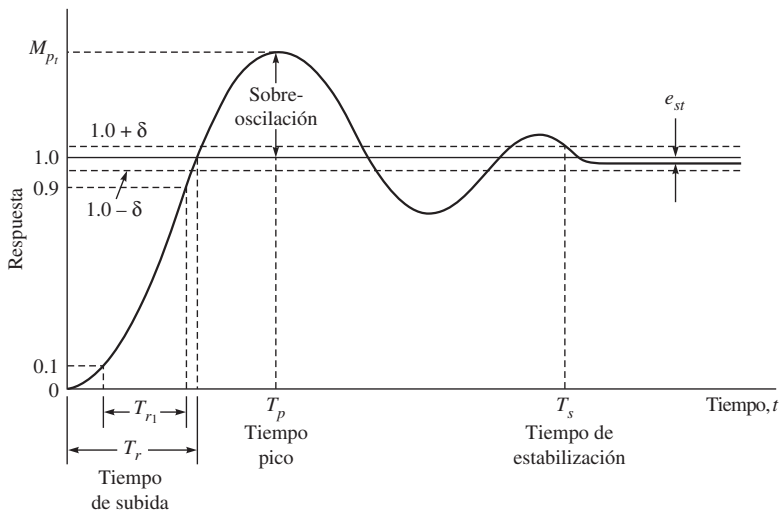


Figura 10.12 Respuesta escalonada de un sistema de segundo orden

por el modelo general de articulaciones. Puesto que un actuador también se equipa con un conjunto de engranajes o arreglos de poleas de banda o cadena articulada para aplicar el par de torsión o la fuerza al eslabón colindante (el próximo más alto), éstos también se tomarán en cuenta en el modelo.

10.5.1 Modelo de un motor CD

Un motor de CD, como el que se muestra en la figura 3.7, trabaja con el principio de que un conductor de corriente en un campo magnético experimenta una fuerza. Si el estator del motor produce un flujo de inducción magnética y la corriente en el rotor (que también se llama inducido o armadura) es i_a , entonces habrá un par de torsión sobre el rotor que lo hace girar. La magnitud de este par de torsión es

$$\tau_m = k_m i_a \quad (10.42)$$

donde τ_m y k_m son el par del motor y la constante del motor, respectivamente. La constante del par de torsión del motor puede determinarse mediante un conjunto de curvas de par/velocidad que se presentan en la figura 3.8 para diferentes valores de los voltajes aplicados. La ecuación (10.42) implica que el par de torsión sobre el rotor se controla con el control de la corriente del inducido. Observe que cuando un motor gira, también actúa como un generador y se desarrolla un voltaje a través de su inducido. Este voltaje es proporcional a la velocidad del conductor en el campo y se llama fuerza contraelectromotriz (EMF). Esta fuerza contraelectromotriz, denotada como v_b , se opone al flujo de corriente en el conductor, lo que puede expresarse como

$$v_b = k_e \dot{\theta}_m \quad (10.43)$$

donde k_e es la constante de fuerza contraelectromotriz, y $\dot{\theta}_m$ denota la velocidad angular del rotor del motor. Además, tomando en cuenta el diagrama de circuitos para un motor CD

controlado por el inducido que se representa en la figura 10.13, la ecuación diferencial para el circuito se obtiene como

$$l_a \frac{di_a}{dt} + r_a i_a = v_a - k_e \dot{\theta}_m \quad (10.44)$$

donde v_a , l_a y r_a son la fuente de voltaje, la inductancia del devanado del inducido y la fuerza contraelectromotriz generada, respectivamente.

En un control de robot, es deseable controlar el par de torsión generado por el motor en lugar de la velocidad, por medio de los circuitos electrónicos controladores del motor. Estos circuitos de accionamiento detectan la corriente a través del inducido y continuamente ajustan la fuente de voltaje v_a , para que una corriente deseada i_a fluya a través del inducido. Este tipo de circuito se llama control del motor por amplificación de la corriente. En estos sistemas de accionamiento por corriente, la velocidad con la que puede controlarse el cambio de corriente del inducido se limita por la inductancia del motor l_a y un límite superior sobre la capacidad de la fuente de voltaje v_a .

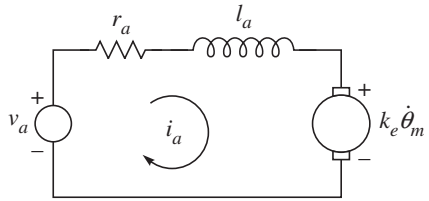


Figura 10.13 El circuito del inducido de un motor de CD

10.5.2 Modelo de articulaciones independiente

En esta sección se calcularán los modelos de ecuación diferencial y la función de transferencia que tratan cada eslabón del manipulador robótico como un sistema independiente de una sola entrada/una sola salida (SISO).

La figura 10.14 muestra un eslabón con la inercia I_i , conectado al motor de CD a través de un par de engranajes. La razón de radios es η ; 1, es decir, se trata de un tren de engranajes reductores. La razón de radios normal η en aplicaciones robóticas está en el rango de 20 a 200 o más. Luego se combinan las inercias del actuador (I_a) y de los engranajes (I_g) como $I_m = I_a + I_g$. El término I_m se llama aquí inercia del rotor. En términos del ángulo de rotación del motor θ_m , se da la ecuación de movimiento del sistema de eslabones del actuador, por

$$I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m = \tau_m - \frac{\tau_l}{\eta} = k_m i_a - \frac{\tau_l}{\eta} \quad (10.45)$$



¿Por qué engranajes en robots?

Se necesitan engranajes para la reducción de velocidad de un motor de CD que se utiliza en robots, el cual sólo es eficiente con altas velocidades, de 2 000 RPM o más.

donde el par generado aplicado al rotor es τ_m y el par de carga es τ_l . La expresión para τ_m aportada por la ecuación (10.42) es una función de la corriente i_a que fluye en el circuito del inducido y que se usa en la ecuación (10.45). Además, b_m es el coeficiente de fricción

viscosa que incluye fricciones en las escobillas y engranajes. Añadido a esto, la relación de radios (η) causa un aumento del par de torsión que se ve en la carga y una reducción de la velocidad de la carga, lo que proporciona

$$\tau_l = \eta \tau_m, \text{ y } \dot{\theta}_l = \frac{\dot{\theta}_m}{\eta} \quad (10.46)$$

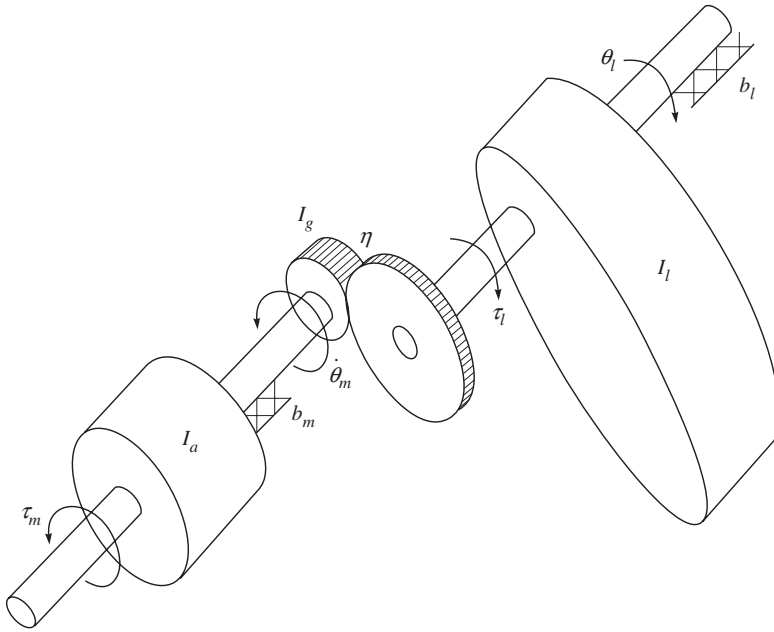


Figura 10.14 Un eslabón conectado a un motor CD a través del tren de engranes

donde $\eta \gg 1$. Si se expresa el par de torsión de carga τ_l conforme a los parámetros de carga, a saber, θ_l y b_l , es decir, $\tau_l = I_l \ddot{\theta}_l + b_l \dot{\theta}_l$, donde b_l es la fricción viscosa en los cojinetes de carga, entonces la ecuación (10.45) se reescribe como

$$I_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + \frac{1}{\eta} (I_l \ddot{\theta}_l + b_l \dot{\theta}_l) = \tau_m = k_m i_a \quad (10.47)$$

Si se usa la relación del movimiento de motor y eslabón que se obtiene en la ecuación (10.46), la ecuación (10.47) puede escribirse en términos de las variables del motor θ_m y τ_m como

$$\left(I_m + \frac{I_l}{\eta^2} \right) \ddot{\theta}_m + \left(b_m + \frac{b_l}{\eta^2} \right) \dot{\theta}_m = \tau_m \quad (10.48a)$$

mientras que, en términos de las variables de carga, es decir, θ_l y τ_l , lo mismo puede expresarse como

$$(I_l + \eta^2 I_m) \ddot{\theta}_l + (b_l + \eta^2 b_m) \dot{\theta}_l = \tau_l \quad (10.48b)$$

El término $I_l + \eta^2 I_m$ se llama inercia efectiva, que se ve en el lado del eslabón de salida del engranaje. Asimismo, el término $b_l + \eta^2 b_m$ se conoce como amortiguación efectiva. Observe que en articulaciones de muchos engranajes, es decir, $\eta \gg 1$, la inercia del rotor del motor puede ser una parte significativa de la inercia efectiva combinada. Este efecto permite la suposición de que la inercia efectiva es una constante. Se sabe, con base en la dinámica, que la inercia del eslabón o de la carga I_l de una articulación del mecanismo en realidad varía según la configuración y la carga. Sin embargo, en robots de múltiples engranajes, las

variaciones representan un menor porcentaje de lo que representarían en un manipulador de accionamiento directo, es decir, $\eta = 1$. Con el fin de encontrar la representación de la función de transferencia (TF) de la articulación con el motor de CD, los engranajes y el eslabón, se escriben las ecuaciones (10.44) y (10.45) en el dominio de Laplace como

$$(l_a s + r_a) i_a(s) = v_a(s) - k_e s \theta_m(s) \quad (10.49)$$

$$(I_m s^2 + b_m s) \theta_m(s) = k_m i_a(s) - \frac{\tau_l(s)}{\eta} \quad (10.50)$$

donde las variables con (s) representan las transformadas de Laplace de la correspondiente función en el dominio del tiempo. El diagrama de bloques del sistema de actuador/articulación se presenta en la figura 10.15. La TF de $v_a(s)$ a $\theta_m(s)$ se obtiene con $\tau_l(s) = 0$ como

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = \frac{k_m}{s[(l_a s + r_a)(I_m s + b_m) + k_e k_m]} \quad (10.51)$$

mientras que la TF del par de carga $\tau_l(s)$ a $\theta_m(s)$ se obtiene con $v_a(s) = 0$ como

$$\frac{\theta_m(s)}{\tau_l(s)} = \frac{-(l_a s + r_a)/\eta}{s[(l_a s + r_a)(I_m s + b_m) + k_e k_m]} \quad (10.52)$$

Observe que la magnitud de esta última función de transferencia, es decir, el efecto del par de torsión de la carga sobre el ángulo del motor, se reduce por la relación de reducción (η). Esto también se señaló después de la ecuación (10.48b). Para muchos sistemas electro-mecánicos, por ejemplo, los robots en estudio, se supone por lo general que la constante de tiempo eléctrica dada por l_a/r_a es mucho más pequeña que la constante de tiempo mecánica I_m/b_m . Por lo tanto, el orden del modelo dinámico del actuador puede reducirse en el orden por uno. Esto se realiza de la siguiente manera. Se divide el numerador y denominador de las ecuaciones (10.51) y (10.52) entre r_a y se desprecia la constante de tiempo eléctrica asignándola en cero. Las TF de arriba se reescriben entonces como

$$\frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = \frac{k_m/r_a}{s(I s + b)}; \text{ y } \frac{\theta_m(s)}{\tau_l(s)} = \frac{-1/\eta}{s(I s + b)} \quad (10.53a)$$

donde

$$I = I_m; b \equiv b_m + \frac{k_e k_m}{r_a} \quad (10.53b)$$

Puesto que se supusieron $\tau_l(s) = 0$ y $v_a = 0$ mientras se obtuvieron las TF de lazo abierto de las ecuaciones (10.51) y (10.52), la respuesta total del sistema de orden reducido en el dominio de tiempo se obtiene mediante la superposición de las dos TF obtenidas por la ecua-

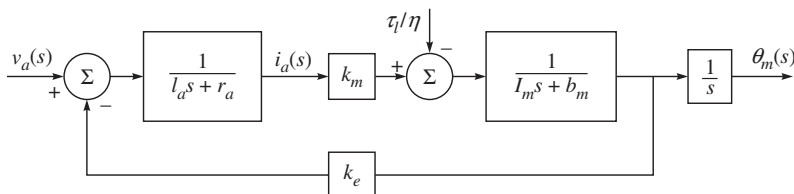


Figura 10.15 Diagrama de bloques de un motor de CD

ción (10.53a). Luego se realiza la transformación de Laplace inversa, lo que proporcionará la siguiente expresión:

$$I\ddot{\theta}_m + b\dot{\theta}_m = u_a - \tau_d \quad (10.54a)$$

donde

$$u_a \equiv \frac{k_m}{r_a} v_a; \text{ y } \tau_d \equiv \frac{\tau_l}{\eta} \quad (10.54b)$$

En las ecuaciones (10.54a-b), b representa la amortiguación efectiva u_a de la entrada de control y τ_d , la entrada de perturbación. El diagrama de bloques correspondiente se muestra en la figura 10.16.

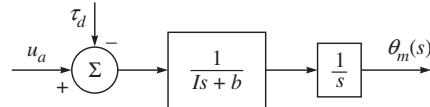


Figura 10.16 Diagrama de bloques simplificado del motor de CD

Ejemplo 10.6

Inercia efectiva

Si la inercia del eslabón varía de 2 a 6 kg/m², la inercia del rotor es 0.02 kg/m² y la relación de reducción es de 30, entonces las inercias efectivas mínima y máxima se calculan como

$$I_{\min} = I_l(\text{mín}) + \eta^2 I_m = 2 + (900)(0.01) = 11, \text{ donde } \eta = 30$$

$$I_{\max} = I_l(\text{máx}) + \eta^2 I_m = 6 + (900)(0.01) = 15$$

Observe que la variación de porcentaje de la inercia efectiva es sólo aproximadamente 27% en comparación con la variación original de 67%. Esto se debe a la presencia de la relación de radios.

10.6



Controlador de articulaciones

En esta sección se analizarán varios controladores de retroalimentación, a saber, proporcionales (P), proporcionales y derivativos (PD), así como proporcionales, integrales y derivativos (PID), basándose en el modelo de articulaciones desarrollado en la sección 10.5. Inicialmente, no se supone ninguna perturbación, es decir, $\tau_d = 0$, para la discusión sobre controladores P y PD, mientras que el controlador PID se introduce para rechazar la perturbación.

10.6.1 Controlador proporcional (P)

La figura 10.17 presenta el diagrama de bloques de una articulación robótica, ecuación (10.54a), sin perturbación alguna, donde $\theta_d(s)$ y $\theta(s)$ son el ángulo de articulación deseado y real del motor, mientras que k_p es la ganancia del controlador retroalimentado. El subíndice m para el ángulo del motor se abandonará de ahora en adelante.

Según la figura 10.17, la función de transferencia de lazo cerrado (TF) se obtiene por

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{k_p}{s(Is+b) + k_p} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} \quad (10.55)$$

donde

$$\omega_n \equiv \sqrt{\frac{k_p}{I}}; \text{ y } \zeta \equiv \frac{b}{2\sqrt{k_p I}} \quad (10.56)$$

Los términos ω_n y ζ se conocen como frecuencia natural y amortiguación del sistema de lazo cerrado de segundo orden que se muestra en la figura 10.17, respectivamente. El comportamiento del sistema se determina por los valores de ζ , es decir, $\zeta < 1$ o subamortiguado, $\zeta = 1$ o críticamente amortiguado y $\zeta > 1$ o sobreamortiguado, como se ve en la sección 10.2 para el sistema de masa-resorte con fricción.

Observe que, según la ecuación (10.56), dados los parámetros de sistema I y b , pueden determinarse una frecuencia natural adecuada y la relación de amortiguamiento mediante la selección de la ganancia del controlador k_p . Por lo tanto, mediante el cambio de k_p , puede alterarse el comportamiento del sistema dado y hacerlo subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado. Puesto que k_p aparece tanto en la expresión de ω_n como en la de ζ , no pueden obtenerse los dos de manera simultánea y arbitraria. Por ende, se introduce entonces otro método de control, es decir, el controlador proporcional y derivativo, donde ω_n y ζ pueden seleccionarse en forma arbitraria.

10.6.2 Controlador Proporcional-Derivativo (PD)

En este controlador, la ganancia se elige como $k_p + k_v s$ en lugar de k_p en la figura 10.17, donde k_v se llama ganancia derivativa o ganancia de velocidad. Para este controlador, la TF de lazo cerrado se da como

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{k_v s + k_p}{I s^2 + (b + k_v) s + k_p} = \frac{k_v s / I + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (10.57a)$$

donde la frecuencia natural ω_n se define igual que en la ecuación (10.56), mientras que la relación de amortiguamiento se define como

$$\zeta \equiv \frac{b + k_v}{2\sqrt{k_p I}} \quad (10.57b)$$

En este punto, tanto la frecuencia natural ω_n como la relación de amortiguamiento ζ se determinan entonces por k_p y k_v . Puede demostrarse que si k_p se aumenta, el tiempo de estabilización se reduce (el sistema se vuelve más rápido), mientras que al aumentar k_v , se reduce la sobreoscilación, pero el sistema se vuelve más lento. Por ende, mediante la elección correcta de los valores k_p y k_v , puede elegirse ω_n y ζ para cumplir con los requerimientos del tiempo de estabilización y la sobreoscilación. Para la amortiguación crítica se obtiene $k_v = 2\sqrt{k_p I} - b$. El controlador que se describió anteriormente se llama proporcional-deriva-

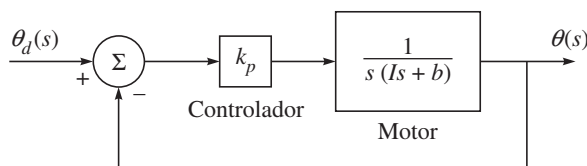


Figura 10.17 Controlador proporcional de una articulación motorizada

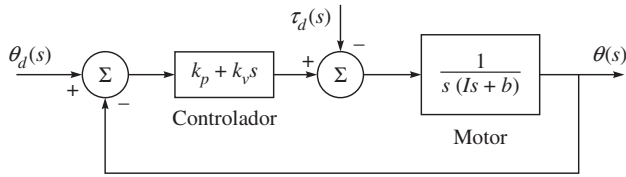


Figura 10.18 Controlador proporcional-derivativo con perturbación

tivo o controlador PD. Es muy versátil y se usa extensamente para el control de robots. Sin embargo, no es capaz de compensar el error de estado estable debido a las holguras o a la fricción no modelada en el sistema mecánico, entre otros factores, lo que puede modelarse como la entrada de perturbación, es decir, $\tau_d \neq 0$. Esto puede verificarse mediante la figura 10.18, donde el ángulo θ se obtiene primero como

$$\theta(s) = \frac{k_v s + k_p}{P(s)} \theta_d(s) - \frac{\tau_d(s)}{P(s)} \quad (10.58)$$

donde el polinomio característico $P(s)$ se obtiene por $P(s) \equiv Is^2 + (b + k_v)s + k_p$. El error e puede entonces obtenerse como

$$e(s) = \theta_d(s) - \theta(s) = \frac{Is^2 + bs}{P(s)} \theta_d(s) + \frac{\tau_d(s)}{P(s)} \quad (10.59a)$$

Para una entrada escalonada y una perturbación constante, es decir, cuando

$$\theta_d(s) = \frac{\theta_d}{s}; \text{ y } \tau_d(s) = \frac{\tau_d}{s} \quad (10.59b)$$

el error de estado estable e_{ss} se obtiene mediante el teorema de valor final (Ogata, 1987). Esto se obtiene por

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} e(s) = \frac{\tau_d}{k_p} \quad (10.60)$$

Puesto que τ_d es proporcional a la reducción de engranaje $1/\eta$, el error de estado estable es menor para reducciones de engranaje altas. Además, e_{ss} puede hacerse aún más pequeño si la ganancia proporcional k_p se hace grande. Sin embargo, el valor de k_p no puede aumentarse a cualquier valor, ya que podrá excitar la oscilación estructural. Por lo tanto, se propone un controlador alternativo con un término de integración adicional.

10.6.3 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

Mediante el uso de un término de integración con la ley de control de PD, se obtiene lo siguiente:

$$f(s) = k_p + k_v s + \frac{k_i}{s} \quad (10.61)$$

donde k_i es la ganancia integrativa y la ecuación (10.61) es la bien conocida ley de control PID, como se muestra en la figura 10.19. Este controlador PID puede lograr que el error de estado estable sea cero. Sin embargo,

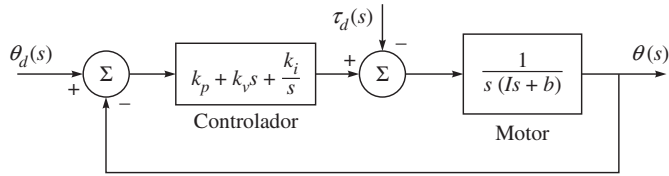


Figura 10.19 Controlador proporcional-integral-derivativo

el término de integración tiene que elegirse con cuidado, puesto que un k_i grande puede causar la inestabilidad del sistema.

Observe que con el término de integración $\tau_d(s) = 0$, la TF del sistema de lazo cerrado se obtiene con

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{k_v s^2 + k_p s + k_i}{P(s)}, \text{ donde } P(s) = I s^3 + (b + k_v) s^2 + k_p s + k_i \quad (10.62)$$

que es un sistema de tercer orden porque el orden más alto del polinomio característico es tres. Si se aplica un criterio de estabilidad, por ejemplo, el de Routh-Hurwitz (Ogata, 1987) al polinomio arriba mencionado, resultará que el sistema de lazo cerrado es estable si todas las ganancias k_p , k_v y k_i son positivas; además,

$$k_i < \frac{(b + k_v) k_p}{I} \quad (10.63)$$

Asimismo, el error de estado estable puede calcularse de manera parecida a las ecuaciones (10.58)-(10.60) como

$$\theta(s) = \frac{k_i + k_p s + k_v s^2}{P(s)} \theta_d(s) - \frac{s \tau_d(s)}{P(s)} \quad (10.64a)$$

$$e(s) = \theta_d(s) - \theta(s) = \frac{I s^3 + b s^2}{P(s)} \theta_d(s) + \frac{s \tau_d(s)}{P(s)} \quad (10.64b)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \tau_d}{P(s)} = 0, \text{ donde } \theta_d(s) = \frac{\theta_d}{s}; \text{ y } \tau_d(s) = \frac{\tau_d}{s} \quad (10.64c)$$

Por lo tanto, el controlador PID causa que el robot alcance el objetivo deseado, incluso en presencia de una perturbación constante.

10.6.4 Selección de ganancias del controlador

Uno de los problemas principales que ocurre con mayor frecuencia en la implementación de uno de los controladores arriba mencionados principalmente en el PID, es la elección de las ganancias del controlador, lo que también se llama sintonía. Como puede verse según la desigualdad de ecuación (10.63), la magnitud de k_i se limita por la restricción de estabilidad. Por lo



Frecuencia de resonancia

En esta frecuencia un puente se derrumbará si se permite que haya vibración durante algún tiempo.

Tabla 10.1 Efecto de las ganancias en los controladores

<i>Respuesta del lazo cerrado</i>	<i>Tiempo de subida</i>	<i>Sobre-oscilación</i>	<i>Tiempo de estabilización</i>	<i>Error de estado estable</i>
k_p	Disminución	Aumento	Cambio pequeño	Disminución
k_v	Cambio pequeño	Disminución	Disminución	Cambio pequeño
k_i	Disminución	Aumento	Aumento	Eliminación

tanto, una regla general de diseño común es la de establecer primero $k_i = 0$ y diseñar la ganancia proporcional y derivativa, k_p y k_v , respectivamente, para obtener el comportamiento transitorio deseado, es decir, tiempo de subida, tiempo de estabilización, etc. También puede tomarse en consideración el efecto de flexibilidad de la articulación mientras se eligen las ganancias. Por ejemplo, suponga que k_j es la rigidez efectiva de la articulación, por lo tanto, la frecuencia de resonancia de la articulación es $\omega_j = \sqrt{k_j/I}$. Es práctica de ingeniería común limitar ω_n de la ecuación (10.56b) a no más que la mitad de ω_j para evitar la excitación de la resonancia de la articulación. Para la selección de k_p y k_v , debe recordarse que un controlador proporcional con una ganancia k_p reducirá el tiempo de subida y el error de estado estable, pero jamás lo eliminará, mientras que un control derivativo con una ganancia k_v tendrá el efecto de aumentar la estabilidad del sistema, es decir, reducirá la sobreoscilación y mejorará la respuesta transitoria. Finalmente, un control integral con la ganancia k_i eliminará el error de estado estable, pero podrá hacer que la respuesta transitoria empeore. Estos puntos se resumirán en la tabla 10.1.

Aquí se hace notar que las correlaciones señaladas en la tabla 10.1 posiblemente no sean exactas porque k_p , k_v y k_i son interdependientes. De hecho, el cambio de una de estas variables puede cambiar el efecto de las otras dos. Por esta razón, esta tabla sólo deberá usarse como referencia cuando se determinan los valores de ganancia. Una vez que se hayan elegido k_p y k_v , se obtiene la ganancia k_i mediante la ecuación (10.63). Finalmente, puede tenerse en cuenta que no se necesita implementar los tres controladores (proporcional, derivativo e integral) en un solo sistema si no es necesario. Por ejemplo, si un controlador PI da una respuesta suficientemente buena, no es necesario implementar un controlador derivativo en el sistema. El controlador deberá mantenerse lo más sencillo posible.

Ejemplo 10.7

Respuesta de un controlador de articulación mediante MATLAB

Para un brazo de un eslabón, se supone que $I = b = 1$ y la ganancia del control proporcional $k_p = 1$. Por medio de MATLAB se obtiene la respuesta del brazo para la entrada escalonada del ángulo de articulación deseado θ_d . La función de transferencia (TF) se evalúa mediante la ecuación (10.56a), es decir,

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \text{ donde } \theta_d = \frac{1}{s} \quad (10.65a)$$

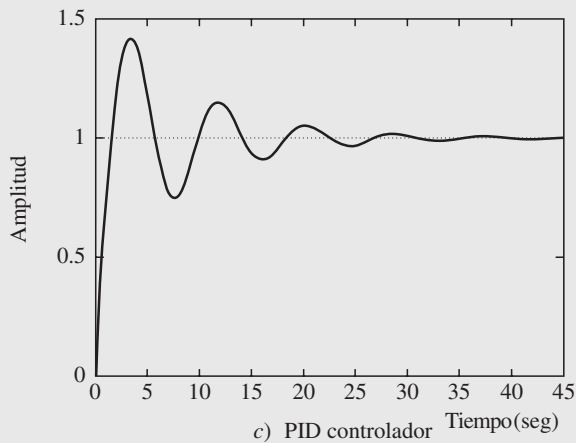
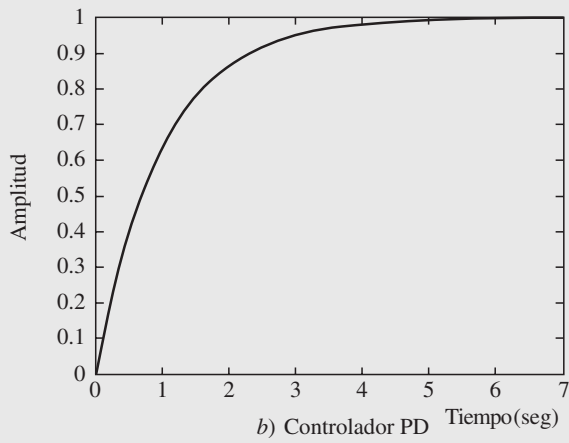
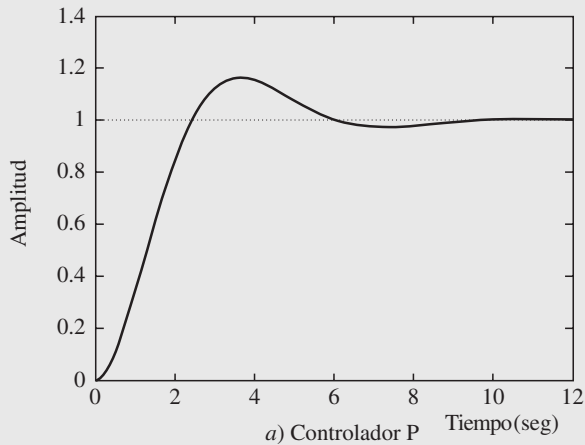


Figura 10.20 Controladores de articulaciones para un brazo de un eslabón

Los comandos que se usan para obtener la respuesta son parecidos a los del ejemplo 10.5, mientras que la respuesta se muestra en la figura 10.20a). Observe el valor unitario de estado estable para la amplitud que indica el ángulo de articulación deseado θ_d . Entonces, con el fin de reducir la sobreoscilación, se introduce un control derivativo con la ganancia derivativa $k_v = 1$. La TF correspondiente se obtiene según la ecuación (10.56b) como

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+1} \quad (10.65b)$$

Para la entrada escalonada del ángulo de articulación deseado, la respuesta se presenta en la figura 10.20b), que muestra el comportamiento asintótico para alcanzar el valor de estado estable. Además, las otras características de la tabla 10.1, por ejemplo, la disminución del tiempo de estabilización, son bastante obvias según la figura 10.20b). Finalmente, la respuesta para el controlador PID se obtiene mediante la TF determinada, basado en el polinomio característico de la ecuación (10.62), es decir,

$$\frac{\theta(s)}{\theta_d(s)} = \frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+s+1} \quad (10.65c)$$

Para $k_i = 1$ y la entrada escalonada de $\theta_d = 1/s$, la respuesta se muestra en la figura 10.20c). Observe que algunas características, por ejemplo, el aumento de sobreoscilación, que se dan en la tabla 10.1 también son obvias.

10.7



Control de trayectoria no lineal

El análisis de las secciones anteriores fue hecho con la suposición de que la señal de referencia y la perturbación son constantes que no se aplican para el rastreo de trayectorias de variación de tiempo más generales, como, por ejemplo, una trayectoria polinomial cúbica que se presentará en el capítulo 11. Además, el sistema de la sección 10.6 fue lineal, mientras que un sistema de múltiples grados de libertad es no lineal. Por lo tanto, en esta sección se presentará un planteamiento basado en la partición de la ley de control o en un control por par de torsión computado.

10.7.1 Partición de la ley de control

En la preparación para el diseño de leyes de control para robots de múltiples grados de libertad más complejos, considere una estructura del controlador ligeramente diferente para el problema que se muestra en la figura 10.17. En este método se realiza la partición del controlador en una parte basada en el modelo y otra parte en el servo. El resultado es que los parámetros del sistema (es decir, m , b y k en este caso) aparecen sólo en la parte basada en el modelo y la parte de servo es independiente de estos parámetros. Este planteamiento se conoce como partición de la ley de control. Observe que la ecuación de movimiento de lazo abierto para el sistema determinado, es

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (10.66)$$

donde la parte de la ley de control basada en el modelo hará uso de valores conocidos para m , b y k . Esta parte de la ley de control se organiza de tal modo que *se reduce el sistema de*

tal forma que parece tener una masa unitaria. La segunda parte de la ley de control hace uso de la retroalimentación para modificar el comportamiento del sistema. Puesto que la parte del modelo basada en la ley de control tiene el efecto de hacer que el sistema aparezca como una masa unitaria, el diseño de la parte de servo es muy simple. Las ganancias se eligen para controlar un sistema compuesto únicamente por una sola masa unitaria, es decir, sin fricción y sin rigidez. La parte del control basada en el modelo aparece en la ley de control como

$$f = \alpha f' + \beta \tag{10.67}$$

donde α y β son funciones o constantes y se eligen de tal modo que f' se considera la nueva entrada del sistema y el sistema parece ser una masa unitaria. Con esta estructura de la ley de control, la ecuación del sistema mediante las ecuaciones (10.66)-(10.67) es como sigue:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta \tag{10.68a}$$

Queda claro que con el fin de hacer que el sistema aparezca como una masa unitaria con f' como entrada, α y β se tienen que elegir como

$$\alpha = m, \text{ y } \beta = b\dot{x} + kx \tag{10.68b}$$

Mediante estas asignaciones e incorporándolas en la ecuación (10.68a), se obtiene la siguiente ecuación de sistema:

$$\ddot{x} = f' \tag{10.69}$$

que es la ecuación de movimiento para una masa unitaria. Entonces se propone una ley de control para computar f' como

$$f' = -k_v \dot{x} - k_p x \tag{10.70}$$

Si se combina esta ley de control con la ecuación (10.69), se obtiene

$$\ddot{x} + k_v \dot{x} + k_p x = 0 \tag{10.71}$$

Mediante esta metodología, el ajuste de las ganancias de control es fácil y queda independiente de los parámetros del sistema, es decir,

$$k_v = 2\sqrt{k_p} \tag{10.72}$$

que debe ser válido para la amortiguación crítica. La figura 10.21 muestra el diagrama de bloques para el controlador particionado que se utiliza para controlar el sistema de la figura 10.7.

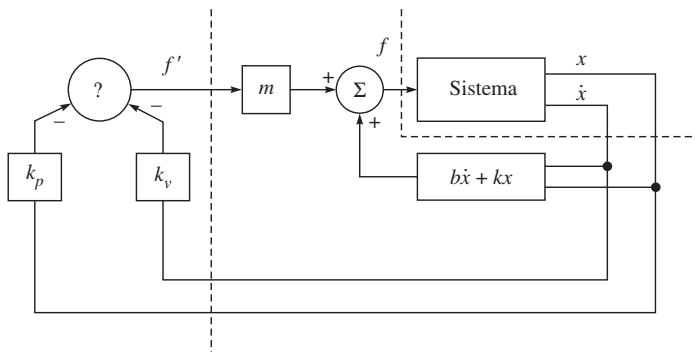


Figura 10.21 Un sistema de control de lazo cerrado con control particionado

Ejemplo 10.8**Control particionado para un bloque**

Si los parámetros del sistema de la figura 10.7 son $m = 1$, $b = 1$ y $k = 1$, se determinan α , β y las ganancias k_p y k_v para una ley de control de regulación de posición que resulta en el amortiguamiento crítico del sistema con una rigidez de lazo cerrado de 16.0, es decir, $k_p = 16$. Suponga que elegimos

$$\alpha = 1, \text{ y } \beta = \dot{x} + x \quad (10.73)$$

de tal modo que el sistema aparezca como una masa unitaria según la entrada f' . Luego establecemos la ganancia $k_v = 2\sqrt{k_p}$ para el amortiguamiento crítico, lo que resulta en $k_p = 16.0$ y $k_v = 8.0$.

10.7.2 Control de trayectoria del bloque

Considerando la figura 10.7, en lugar de simplemente mantener este bloque en una ubicación deseada, vamos a mejorar el controlador de tal modo que pueda lograrse que el bloque siga una trayectoria. La trayectoria se define como una función de tiempo, por ejemplo, $x_d(t)$ que especifica la ubicación deseada del bloque. Suponga que la trayectoria es continua (es decir, que existen las primeras dos derivadas) y que el generador de trayectorias proporciona x_d , \dot{x}_d y \ddot{x}_d para cualquier tiempo t . El servo-error entre la trayectoria deseada y la real se define por $e = x_d - x$. Una ley de control de servo que entonces genera la trayectoria que se va a seguir se obtiene por

$$f' = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (10.74)$$

Al combinar las ecuaciones (10.69) y (10.74) se obtiene

$$\ddot{x} = \ddot{x}_d + k_v \dot{e} + k_p e \quad (10.75)$$

o

$$\ddot{e} + k_v \dot{e} + k_p e = 0 \quad (10.76)$$

Ésta es una ecuación diferencial de segundo orden para la que pueden elegirse los coeficientes con el fin de obtener cualquier respuesta (frecuentemente la opción que se elige es el amortiguamiento crítico). Una ecuación de este tipo se escribe en el espacio del error, ya que describe la evolución de los errores en relación con la trayectoria deseada. La figura 10.22 muestra un diagrama de bloques de un controlador que sigue una trayectoria.

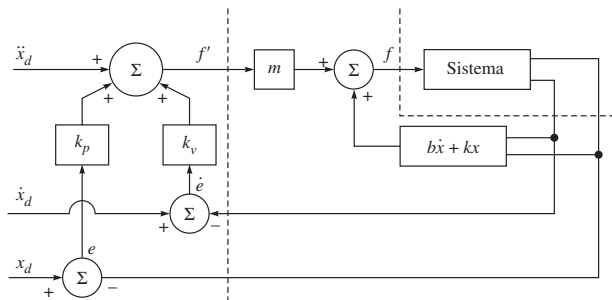


Figura 10.22 Un controlador de trayectoria para el sistema que se presenta en la figura 10.7.

Si el modelo es perfecto (es decir, m , b y k no están completamente definidos) y si no hay ruido ni error inicial, el bloque seguirá precisamente la trayectoria deseada. Si existe un error inicial, se suprimirá de acuerdo con la ecuación (10.76), y posteriormente el sistema seguirá con precisión la trayectoria deseada.

10.7.3 Control no lineal de un robot


En esta subsección se extenderá el control de trayectoria del bloque a un robot de múltiples grados de libertad (DOF). Cabe señalar que el manipulador robótico de múltiples DOF, a diferencia de una articulación de un solo DOF como la de la sección 10.6, es un sistema no lineal. Sin embargo, visto que la mayoría de los robots industriales tienen una relación de radios alta, se supone que su dinámica de articulaciones es lineal e independiente. Por lo tanto, el método de control lineal desarrollado para la articulación sencilla se aplica en forma independiente a todas las articulaciones de un robot. Este método de control podrá funcionar razonablemente bien en muchas aplicaciones industriales, pero no funciona bien si se le compara con un método de control no lineal. En particular, no puede garantizarse el amortiguamiento crítico o el mismo tiempo de estabilización de manera uniforme en cada punto del espacio de trabajo para todas las articulaciones. Tampoco es posible analizar y pronosticar el desempeño exacto de un método de PD o PID para el robot no lineal. En este control se supone que el sistema es lineal y la inercia de los eslabones es constante. Sin embargo, en el capítulo 8 se observó que la matriz de inercia depende de la configuración del robot. Además, existen términos de Coriolis y centrífugos no lineales. Un método de control lineal, cuando se utiliza en un robot no lineal, no se desempeña de manera uniforme en cada punto del espacio de trabajo de un robot. Por ende, se presentará a continuación un método de control avanzado que se basa en la partición de la ley de control que ofrecerá un desempeño mucho mejor en comparación con el método de control lineal. Sin embargo, muchos otros controles existen en la literatura, por ejemplo, en Canudas de Wit *et al.* (1996), que el lector podrá consultar.

Aquí, el controlador no lineal cancela las no linealidades en el modelo dinámico del robot que se va a controlar, como se hizo en la subsección 10.7 para el bloque. Como resultado, se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales desacopladas. Uno de estos controladores basados en el modelo se llama control de par de torsión computado. Observe que el modelo dinámico de un robot de n DOF puede expresarse según la ecuación (8.44) como

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{h} + \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\tau} \quad (10.77)$$

donde la matriz de inercia generalizada \mathbf{I} de $n \times n$ se define en la ecuación (8.33) y los vectores n -dimensionales \mathbf{h} , $\boldsymbol{\gamma}$ y $\boldsymbol{\tau}$ se definen según la ecuación (8.44a), mientras que $\ddot{\boldsymbol{\theta}}$ es el vector n -dimensional de las aceleraciones de las articulaciones. El paso clave en el control no lineal de un sistema robótico complejo es el uso del concepto de la partición de la ley de control, como se mencionó anteriormente. Supóngase que la salida del controlador puede escribirse como

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{A}\boldsymbol{\tau}' + \boldsymbol{\beta} \quad (10.78a)$$



¿Qué es no lineal?

Los coeficientes de las ecuaciones diferenciales que representan la dinámica del robot son funciones de las variables de control y sus derivadas. En el caso de sistemas lineales, estos coeficientes son constantes.

donde la matriz \mathbf{A} de $n \times n$ y el vector n -dimensional β se eligen como

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}, \text{ y } \beta = \mathbf{h} + \gamma \quad (10.78b)$$

La sustitución de las ecuaciones (10.78a-b) en la ecuación (10.77) proporciona lo siguiente:

$$\tau' = \ddot{\theta} \quad (10.79)$$

Esta ecuación puede verse como un sistema de inercia unitaria con una nueva entrada τ' . De alguna manera se cancelan las no linealidades en el modelo de dinámica no lineal original del sistema. Cuando se elige la matriz \mathbf{A} y el vector β de manera adecuada, se transforma el sistema no lineal en un sistema lineal. Entonces puede aplicarse un controlador PD, similar al bloque de la ecuación (10.74), al sistema de inercia unitaria como

$$\tau' = \ddot{\theta}_d + \mathbf{K}_v \dot{e} + \mathbf{K}_p e \quad (10.80a)$$

donde $e = \theta_d - \theta$, y \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v son las matrices diagonales de $n \times n$. Mediante la sustitución de la ecuación (10.80a) en la ecuación (10.79), se obtiene

$$\ddot{e} + \mathbf{K}_v \dot{e} + \mathbf{K}_p e = 0 \quad (10.80b)$$

La ecuación vectorial arriba señalada es la ecuación desacoplada de error n escalar que corresponde a las n articulaciones del robot. Si se establecen los elementos de las matrices \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v , puede entonces lograrse el desempeño crítico o sobreamortiguado en cada punto del espacio de trabajo del robot.

El método de control propuesto que se describe arriba utiliza una linealización por retroalimentación en contraste con la linealización de un sistema no lineal donde se elige un punto de operación alrededor del cual se realiza la linealización. Por lo tanto, este último se linealiza en un punto del espacio de trabajo y no en el control no lineal basado en la ley de control particionada. Un diagrama de bloques de este control se presenta en la figura 10.23. Puede verse que el controlador tiene dos partes, a saber: 1) una parte accionada por el error que computa τ' basado en la ley de control PD o PID que se presenta en las subsecciones 10.6.2 y 10.6.3, respectivamente; y 2) una parte basada en el modelo donde se computan \mathbf{A} y β .

10.8 Representación de estado-espacio y control

Sistemas complejos tienen múltiples entradas y múltiples salidas, o sistemas MIMO. Estos sistemas pueden ser lineales o no lineales y con o sin variación en el tiempo, como se indicó an-

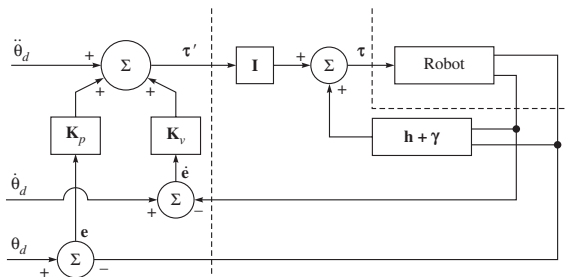


Figura 10.23 Controlador de seguimiento de trayectorias para el robot

teriormente. Éste es un planteamiento muy potente para tratar estos sistemas es el de estado-espacio. Este enfoque se basa en el concepto del estado. Se define como el conjunto de variables más pequeño (las llamadas variables de estado), de tal modo que el conocimiento de estas variables en $t = t_0$, junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema en cualquier $t \geq t_0$.

En una representación de estado-espacio de un sistema dinámico, se ocupan de tres tipos de variables, a saber, variables de entrada, de salida y de estado. Observe que la representación de estado-espacio de un sistema de control no es única, excepto cuando el número de variables es el mismo para cualquiera de las diferentes representaciones de estado-espacio del mismo sistema. Normalmente, la representación del estado-espacio de un sistema de variación de tiempo no lineal puede darse como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t); \text{ y } \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (10.81)$$

donde el vector \mathbf{x} de $2n$ dimensiones se llama vector de estado para un sistema regido por n ecuaciones diferenciales de segundo orden, mientras que \mathbf{u} es el vector de entrada r -dimensional y t es el tiempo. Además, \mathbf{y} es el vector de salida de m dimensiones, y \mathbf{f} y \mathbf{g} son las funciones de vectores de $2n$ y m dimensiones respectivamente. Si el sistema es lineal, puede modificarse la ecuación (10.81) como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \text{ y } \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (10.82)$$

donde la matriz \mathbf{A} de $2n \times 2n$ es la matriz de estado, la matriz \mathbf{B} de $2n \times r$ es la matriz de entrada y la matriz \mathbf{C} de $m \times 2n$ es la matriz de salida. Para un sistema no lineal, puede linealizarse la ecuación (10.81) alrededor de un estado operativo, para obtener así la ecuación resultante en la forma de la ecuación (10.82).

Observe que para el sistema de entrada sencilla y salida sencilla (SISO), puede calcularse la función de transferencia (TF) según la representación del estado-espacio, por ejemplo, la ecuación (10.82) nuevamente, donde los vectores \mathbf{y} y \mathbf{u} son escalares, denotados por y y u , respectivamente. Para ello, las transformadas de Laplace de la ecuación (10.82) con condiciones iniciales iguales a cero se expresan como

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}u(s) \quad (10.83a)$$

$$y(s) = \mathbf{C}\mathbf{x}(s) + \mathbf{D}u(s) \quad (10.83b)$$

Si se resuelve para $\mathbf{x}(s)$ según la ecuación (10.83a) y se sustituye en la ecuación (10.83b), se obtiene la relación entre la salida $y(s)$ con la entrada $u(s)$, es decir,

$$y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]u(s) \quad (10.84a)$$

Por lo tanto, la TF definida por $G(s)$ se extrae de la ecuación (10.84a) como

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (10.84b)$$

Observe que el lado derecho de la ecuación (10.84b) involucra a $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Por ende, $G(s)$ puede escribirse como

$$G(s) = \frac{q(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \quad (10.84c)$$



Estado-espacio

Un estado-espacio de un sistema dinámico se forma como una gráfica de sus variables de control y sus derivadas, graficadas contra los ejes que representan las variables y derivadas ya mencionadas.

donde $q(s)$ es un polinomio en s , y $|s\mathbf{1} - \mathbf{A}|$ representa el determinante de la matriz $(s\mathbf{1} - \mathbf{A})$, que es igual al polinomio característico de $G(s)$. En otras palabras, los valores propios de \mathbf{A} son idénticos a los polos de $G(s)$.

Por otra parte, dada una función de transferencia, también puede obtenerse la representación de estado-espacio tomando una transformación de Laplace inversa de la expresión para la salida, y relacionando la TF y la entrada, como se ilustra en el ejemplo 10.9.

Ejemplo 10.9

Representación estado-espacio de un bloque

Considere el movimiento del bloque en la figura 10.6, cuya única ecuación dinámica de movimiento se obtiene por la ecuación (10.30a). Se define lo siguiente:

$$x_1 = x; \text{ y } x_2 = \dot{x} \quad (10.85a)$$

Luego, la ecuación (10.30a) puede expresarse como

$$\dot{x}_1 = x_2; \text{ y } \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}f \quad (10.85b)$$

donde la salida y puede darse por

$$y = x_1 \quad (10.85c)$$

Las ecuaciones arriba señaladas (10.85b-c) se ponen entonces en forma de matriz/vector como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \text{ y } \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (10.86a)$$

donde

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}; \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}; \mathbf{u} \equiv f; \mathbf{C} \equiv [1 \ 0]; \mathbf{D} = 0 \quad (10.86b)$$

En las ecuaciones (10.86a-b), el vector bidimensional \mathbf{x} es el vector de estado, la matriz \mathbf{A} de 2×2 es la matriz de estado, mientras que las matrices \mathbf{B} y \mathbf{C} de 2×1 y 1×2 , respectivamente, son las matrices de entrada y salida del bloque en estudio. Además, el vector de salida y y la matriz de transmisión directa \mathbf{D} son escalares.

Ejemplo 10.10

Estado-espacio de un robot de $\text{DOF} = 1$

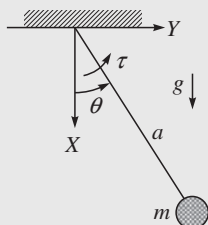


Figura 10.24 Brazo de un robot de $\text{DOF} = 1$

Considere el brazo robótico con $\text{DOF} = 1$ cuya masa, sin pérdida de ninguna generalidad, se supone que se concentra al final del eslabón sin masa de longitud l , como se muestra en la figura 10.24. El par de torsión τ y la gravedad g que está actuando hacia abajo también se muestran en la figura. Observe que sin ningún par de torsión externo τ , es decir, $\tau = 0$, el sistema es un simple péndulo. Se da entonces la ecuación de movimiento para el brazo con $\text{DOF} = 1$ por

$$ma^2 \ddot{\theta} = \tau - mga \sin \theta, \text{ o } \ddot{\theta} + \frac{g}{a} \sin \theta = \frac{\tau}{ma^2} \quad (10.87)$$

La ecuación (10.87) es una ecuación diferencial no lineal debido a la aparición de la función “sen”. Puesto que esto es un sistema de segundo orden, se necesitan dos variables de estado, a saber,

$$x_1 = \theta, \text{ y } x_2 = \dot{\theta} \quad (10.88)$$

Luego se obtiene lo siguiente:

$$\dot{x}_1 = x_2; \text{ y } \dot{x}_2 = \frac{\tau}{ma^2} - \frac{g}{a} \sin x_1 \quad (10.89)$$

Puesto que no hay entrada u , y se obtiene por

$$y = \theta = x_1 \quad (10.90)$$

Aunque es difícil que una ecuación general no lineal exprese la forma de estado-espacio de la ecuación (10.82), es posible para este péndulo, donde los vectores y matrices asignados son los siguientes:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{a} \sin x_1 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \frac{1}{ma^2}; \mathbf{u} \equiv \tau; \mathbf{C} \equiv [1 \ 0]; \mathbf{D} = 0 \quad (10.91a)$$

En la ecuación (10.91a), si el ángulo θ se limita a ser pequeño, entonces el sistema puede linealizarse. Para un ángulo pequeño θ , se sabe que $\sin \theta = \sin x_1 \approx x_1$. Por lo tanto, la representación de estado-espacio del modelo linealizado, donde sólo la matriz \mathbf{A} ha cambiado,

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{a} & 0 \end{bmatrix} \quad (10.91b)$$

Ejemplo 10.11

Función de transferencia a partir de la representación de estado-espacio

Considere el movimiento del bloque de la figura 10.6, para el cual se da la representación de estado-espacio en las ecuaciones (10.86a-b). Para encontrar la TF según la ecuación (10.86b), la matriz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$ se evalúa primero como

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{m} & s + \frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad (10.92a)$$

Entonces es fácil encontrar la matriz inversa de 2×2 en la ecuación (10.92a) como

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \quad (10.92b)$$

Finalmente, la ecuación (10.84b) proporciona lo siguiente:

$$G(s) = [1 \ 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} + 0 = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (10.92c)$$

Ejemplo 10.12

Representación de estado-espacio a partir de una función de transferencia determinada

Dada la función de transferencia del brazo robótico con $\text{DOF} = 1$, su representación de estado-espacio puede escribirse según la primera TF de la ecuación (10.53a), es decir,

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{v_a(s)} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (10.93a)$$

donde $K \equiv k_m/r_a b$ y $T \equiv I/b$ es la constante de tiempo del sistema. Según la ecuación (10.93a) puede escribirse lo siguiente:

$$s^2 T \theta_m(s) + s \theta_m(s) = K v_a(s) \quad (10.93b)$$

Tomando la transformada de Laplace inversa de la ecuación (10.93b), se obtiene la ecuación en el dominio de tiempo como

$$T \ddot{\theta}_m + \dot{\theta}_m = K v_a \quad (10.93c)$$

Puesto que la ecuación (10.93c) es una ecuación diferencial de segundo orden, se requieren las dos variables de estado, a saber, x_1 y x_2 , que se definen como

$$x_1 = \theta_m, \text{ y } x_2 = \dot{\theta}_m \quad (10.94a)$$

Esto proporciona la representación estado-espacio de la dinámica de una sola articulación como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \text{ y } y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (10.94b)$$

donde u , los vectores bidimensionales \mathbf{x} , \mathbf{b} , \mathbf{c} y la matriz \mathbf{A} de 2×2 se presentan como sigue:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}; \mathbf{b} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}; u = v_a; \text{ y } \mathbf{c} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.94c)$$

10.8.1 Control retroalimentado basado en estado-espacio

Para un robot de múltiples DOF cuya dinámica se rige por la ecuación (10.77), la representación estado-espacio en forma de la ecuación (10.81) puede darse de la siguiente manera:

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}; \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{h} - \boldsymbol{\gamma}) \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{g} \equiv \mathbf{x}_1 \quad (10.95)$$

donde $\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\theta}$, parecido al péndulo, pero es un vector n -dimensional para el robot de n DOF, mientras que \mathbf{x} es el vector de estado de $2n$ dimensiones. Si la ecuación de movimiento se obtiene por la ecuación (10.77) y linealizada alrededor de cualquier punto operativo, entonces la ecuación (10.95) puede tener la representación estado-espacio que se muestra en la ecuación (10.82).

Si se considera cada articulación del robot como independientemente controlada, como se mencionó en la subsección 10.5.2, entonces la representación estado-espacio de cada articulación se obtiene por las ecuaciones (10.82) y (10.94b), para la que puede darse un control retroalimentado lineal mediante

$$u(t) = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} + \theta_d \quad (10.96)$$

donde cada elemento de \mathbf{k} son ganancias constantes por determinarse, y θ_d es una entrada de referencia o deseada. Al sustituir la ecuación (10.96) en la ecuación (10.94b), se obtiene

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T) \mathbf{x} + \mathbf{b}\theta_d \quad (10.97)$$

lo que demuestra que el control lineal retroalimentado tiene como efecto cambiar los polos del sistema que se determinaron por \mathbf{A} a los que se determinan por $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^T)$. En la ecuación (10.96), el control se determina como una combinación lineal de los estados del sistema que, en este caso, son la posición del motor y la velocidad. Si se compara esto con el control PD o PID, como se presenta en la subsección 10.6.2 y en la 10.6.3, respectivamente, lo que también es una función de la posición del motor y la velocidad, no se obtiene ninguna ventaja. Sin embargo, para un sistema de mayores dimensiones, por ejemplo, una articulación cuya flexibilidad se está tomando en cuenta, como se muestra en la figura 10.25, puede comprobarse que la retroalimentación estado-espacio será una ventaja.

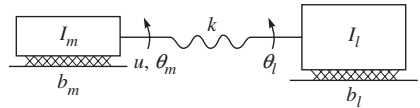


Figura 10.25 Articulación sencilla con flexibilidad

Observe que la flexibilidad de la articulación puede ocurrir por muchas razones. Por ejemplo, la flexibilidad torsional de los engranajes, el balanceo de la flecha, la deformación del cojinete, etc., pueden contribuir considerablemente a la flexibilidad en las articulaciones. Si se escribe su modelo dinámico, resultarán dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, correspondientes a sus dos DOF, es decir, θ_m y θ_l , que corresponden a las rotaciones del motor y del eslabón o de la carga, respectivamente. En este tipo de sistema, si los coeficientes de amortiguación b_m y b_l son pequeños, lo que frecuentemente es el caso en muchos robots industriales, es difícil controlar el sistema, ya que dos de los cuatro polos están situados en el origen, mientras que los otros dos se encuentran en el eje imaginario. Suponga que el control PD tradicional de la subsección 10.6.2 está implementado para controlar la articulación flexible; entonces el cómputo de sus dos ganancias dependería de que se hayan colocado los sensores de posición y velocidad en el eje motor o en el eje del eslabón, es decir, el controlador PD es una función de las variables del motor o de las variables de la carga. En este tipo de control puede demostrarse (Spong *et al.*, 2006) que el sistema es inestable para una ganancia proporcional grande. Alternativamente, si se aplica el control retroalimentado de estado de la forma dada por la ecuación (10.96), es posible lograr un rango mucho más grande de polos de lazo cerrado, lo que logra la estabilidad del sistema. Esto es posible porque hay cuatro parámetros de ganancia en la ecuación (10.96) que corresponden al vector de estado \mathbf{x} de 4 dimensiones, es decir, ángulo del motor, velocidad del motor, ángulo de la carga y velocidad

de la carga, que pueden ser medidos si se colocan sensores apropiados en los ejes del motor y de la carga. La ganancia k , a diferencia del control tradicional PD, donde las dos ganancias son funciones de la posición y velocidad del motor o de la posición y velocidad de la carga, es una función de esas cuatro dimensiones. Por lo tanto, mediante la retroalimentación de estado hay más parámetros libres para obtener la estabilidad. Sin embargo, problemas como la posibilidad de control y observación son también importantes, ya que determinan el éxito de la ley de control retroalimentado del estado.

10.9



Estabilidad

Al principio de este capítulo se determinó de forma analítica la estabilidad de un sistema de control lineal en términos del amortiguamiento, como se muestra en los ejemplos 10.1-10.3. El desempeño de estos sistemas durante el comportamiento transitorio también se presentó en la sección 10.4. Los mismos análisis son válidos para un sistema no lineal que se desacopla y linealiza por medio de un controlador basado en modelos, como se presentó en la sección 10.7, porque el sistema general nuevamente es lineal. Sin embargo, cuando no se realiza el desacoplamiento y la linealización, o si quedan incompletos o inexactos, el sistema general de lazo cerrado permanece no lineal. Para sistemas no lineales, puede realizarse el análisis de estabilidad y desempeño mediante el análisis de estabilidad de Lyapunov o segundo método de Lyapunov.



Estabilidad

Estabilidad significa que un sistema no divergirá de su posición deseada. Por ejemplo, un balón que se mantiene dentro de un cuenco es estable, pero será inestable cuando se invierta el cuenco.

10.9.1 El método de Lyapunov

Una característica interesante de este método de estabilidad es que puede concluirse sin resolver la ecuación diferencial que rige el sistema. Sin embargo, el método no proporciona ninguna información sobre la respuesta transitoria o sobre el desempeño del sistema, por ejemplo, si se sobreamortigua o subamortigua o cuánto tiempo se tardará en suprimir una perturbación. No obstante, es importante diferenciar la estabilidad del desempeño porque un sistema estable podrá tener un desempeño de control poco satisfactorio.

Para explicar el método de Lyapunov, considere el sistema no lineal que se describe mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (10.98)$$

donde \mathbf{x} es un vector de estado n -dimensional como se introdujo en la sección 10.8 y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es la función vectorial n -dimensional. Observe que cualquier ecuación diferencial de orden mayor siempre puede escribirse como un conjunto de ecuaciones de primer orden en la forma de la ecuación (10.98). Vea los ejemplos 10.9 y 10.10 para los sistemas de segundo orden. Para demostrar que un sistema es estable mediante el método de Lyapunov, se necesita lo siguiente:

1. Proponga una función de energía generalizada $v(\mathbf{x})$ que se llama función de Lyapunov, cuyas primeras derivadas parciales sean continuas y $v(\mathbf{x}) > 0$ para todos los \mathbf{x} , excepto $v(\mathbf{0}) = 0$.
2. Evalúe la primera derivada respecto al tiempo de $v(\mathbf{x})$.

3. Verifique si $\dot{v}(\mathbf{x}) \leq 0$. Aquí, $\dot{v}(\mathbf{x})$ implica el cambio de $v(\mathbf{x})$ respecto al tiempo a lo largo de todas las trayectorias del sistema.

La idea es que una función tipo energía positiva definitiva del estado demuestre que siempre disminuye o permanece constante. Por lo tanto, el sistema es estable en el sentido que el tamaño del vector de estado se limite. Cuando $\dot{v}(\mathbf{x})$ es estrictamente menos que cero, el estado converge en forma asintótica hacia el vector cero. Sin embargo, para $\dot{v}(\mathbf{x}) \leq 0$, es decir, cuando $\dot{v}(\mathbf{x})$ desaparece en algunos lugares de la trayectoria, LaSalle y Lefschetz (1961) demostraron que el sistema aún puede ser asintóticamente estable en ciertas situaciones.

Observe que el método de Lyapunov puede aplicarse igualmente a sistemas lineales. La principal dificultad de ese método, sin embargo, es la elección de la función de Lyapunov, $v(\mathbf{x})$. En muchas aplicaciones es fácil adivinar, pero obtener $v(\mathbf{x})$ para un sistema complejo es difícil, ya que no hay ningún método estándar para conformarlo.

Ejemplo 10.13

Estabilidad del bloque

Considere el bloque de la figura 10.2, cuya ecuación rectora es la ecuación (10.1), es decir,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0 \quad (10.99)$$

La energía total del sistema, incluida la energía cinética debida a la velocidad del bloque \dot{x} , más la energía potencial debida a la deflexión del resorte x , es decir,

$$v = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.100)$$

donde el primer término en la ecuación (10.100) representa a la energía cinética y el segundo a la potencial. Observe que el valor de v es siempre no negativo, como lo requiere el paso 1 del método de estabilidad de Lyapunov que se explicó arriba. La razón de cambio de v se obtiene entonces mediante la diferenciación de la ecuación (10.100), es decir,

$$\dot{v} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \quad (10.101a)$$

Si se sustituye la ecuación (10.99) para $m\ddot{x}$ en la ecuación (10.101a), se obtiene

$$\dot{v} = -b\dot{x}^2 \quad (10.101b)$$

que siempre es no positivo, ya que $b > 0$. De este modo, la energía siempre está saliendo del sistema, a menos que $\dot{x} = 0$. Esto implica que un bloque inicialmente desplazado perderá energía hasta que se detenga. Un análisis de estado estable del sistema en la posición de reposo revela que $kx = 0$, garantizando que $x = 0$. Por lo tanto, el bloque inicialmente en reposo llegará eventualmente a descansar.

Ejemplo 10.14

Estabilidad de un robot con $DOF = 1$

Para verificar la estabilidad de un brazo robótico con $DOF = 1$ como el que se presenta en la figura 10.23, con $\theta = 0$ cuando no hay ningún par de torsión externo actuando, es decir, $\tau = 0$, considere la siguiente función de Lyapunov:

$$v = \frac{1}{2}ma^2\dot{x}_2^2 + mga(1 - \cos x_1) \quad (10.102)$$

en la que x_1 y x_2 son las variables de estado definidas en el ejemplo 10.10. Además, la ecuación (10.102) representa la energía total del sistema, que siempre es más grande que cero, y que es cero cuando desaparece la variable de estado, es decir, $x_1 = x_2 = 0$. Observe que el segundo término, es decir, la energía potencial, se calcula sobre la base de una energía potencial cero en $x = a$. Luego se obtiene la derivada respecto al tiempo de la ecuación (10.102) como

$$\dot{v} = ma^2 x_2 \dot{x}_2 + mga \sin x_1 x_2 \quad (10.103)$$

La ecuación (10.103) es cero para la condición de equilibrio del eslabón, es decir, $\theta = \dot{\theta} = 0$ o, en términos de las variables estado-espacio, $x_1 = x_2 = 0$. Puesto que v no es menos que cero, la estabilidad asintótica no puede garantizarse.

Ejemplo 10.15

Estabilidad de un robot con $DOF = 1$ con control PD

Suponga que el robot con $DOF = 1$ del ejemplo 10.14 está bajo el control PD, es decir, la salida del actuador se obtiene por $\tau = -k_p x_1 - k_v x_2$. Los términos k_p y k_v son las ganancias proporcionales y derivativas, respectivamente, que siempre son positivas. Ahora vamos a definir la función de Lyapunov como

$$v = \frac{1}{2} ma^2 x_2^2 + mga(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} k_p x_1^2 \quad (10.104)$$

Mediante la diferenciación de la ecuación (10.104) respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{v} = ma^2 x_2 \dot{x}_2 + mga \sin x_1 x_2 + k_p x_1 x_2 \quad (10.105a)$$

Si se sustituye para \dot{x}_2 de la ecuación (10.89) en la ecuación (10.105a), se obtiene la expresión para \dot{v} como

$$\dot{v} = -k_v x_2^2 \quad (10.105b)$$

lo que garantiza la estabilidad asintótica, ya que $k_v > 0$.

10.9.2 Estabilidad del robot con múltiples DOF

Para un robot de múltiples DOF que sigue una trayectoria, la estabilidad puede comprobarse mediante el método de Lyapunov para un controlador PD mientras que la matriz de ganancia derivativa \mathbf{K}_v sea una definitiva positiva. Para demostrarlo, considere las ecuaciones dinámicas de movimiento para el robot de múltiples DOF dadas en la ecuación (10.77). El correspondiente control PD puede darse mediante

$$\tau = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_v \dot{\theta} + \gamma \quad (10.106)$$

donde $\mathbf{e} = \theta_d - \theta$, y \mathbf{K}_p y \mathbf{K}_v son las matrices de ganancia diagonales que son definitivas positivas. Mediante esta ley de control, se obtiene el sistema de lazo cerrado según la ecuación (10.77) como

$$\mathbf{I} \ddot{\theta} + \mathbf{h} + \mathbf{K}_v \dot{\theta} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (10.107)$$

Considere la función de Lyapunov como

$$v = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \mathbf{I} \dot{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (10.108)$$

La función v en la ecuación (10.108) siempre es positiva o cero porque la matriz de inercia del robot \mathbf{I} y la matriz de ganancia de posición \mathbf{K}_p son matrices positivas definitivas. Si se diferencia la ecuación (10.108) respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{v} = \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T \dot{\mathbf{I}} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (10.109a)$$

Usando la ecuación (10.107), la ecuación (10.109 a) se reescribe como

$$\dot{v} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{K}_v \dot{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T (\dot{\mathbf{I}} - 2\mathbf{C}) \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (10.109b)$$

donde $\mathbf{h} \equiv \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}}$ se sustituye, como se señala después de la ecuación (8.44a), $\dot{\mathbf{I}}$ es la derivada de tiempo de \mathbf{I} y \mathbf{C} es la matriz de términos de inercia convectiva. Observe que, como se muestra en el ejemplo 8.5, la matriz $\dot{\mathbf{I}} - 2\mathbf{C}$ es antisimétrica y, por lo tanto, causa que el término $\dot{\boldsymbol{\theta}}^T (\dot{\mathbf{I}} - 2\mathbf{C}) \dot{\boldsymbol{\theta}}$ desaparezca. Por ende, la ecuación (10.109b) lleva a

$$\dot{v} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{K}_v \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (10.109c)$$

que es no positiva mientras que \mathbf{K}_v sea positivo definitivo. Sin embargo, esto no garantiza de forma automática la estabilidad asintótica, aún así, LaSalle y Lefschetz (1961) demostraron que el sistema logra la estabilidad global asintótica.

10.10



Controles cartesianos y de fuerza

En los métodos de control que se presentaron anteriormente, se supuso que la trayectoria deseada eran historiales de tiempo de posiciones de articulaciones, velocidades y aceleraciones, y el esfuerzo correspondiente eran pares de torsión de las articulaciones. En un robot, sin embargo, es el efector final el que realmente realiza el trabajo o interactúa con su ambiente. Por ende, es más natural especificar el movimiento del robot en términos de la posición y orientación del efector final y sus velocidades y aceleraciones, o las correspondientes fuerzas y momentos que actúan en consecuencia. Observe aquí que el movimiento del efector final de un robot se logra mediante el control de un conjunto de movimientos de las articulaciones, como también se señalaba en el capítulo 5, porque los robots están diseñados de esta manera. Por lo tanto, las especificaciones de los movimientos de las articulaciones se usan para controlar el robot. En caso de que se desee especificar los movimientos cartesianos junto con las fuerzas y momentos que están actuando sobre el efector final, el controlador deberá tener la capacidad de hacer la transformación necesaria desde el espacio cartesiano del efector final al espacio de las articulaciones, de tal modo que se comuniquen las señales apropiadas a los actuadores de las articulaciones. En este contexto, se resumirá a continuación los métodos que se presentan en la literatura. Puesto que estos algoritmos no se usan extensamente o a veces se usan de manera muy simplificada en robots industriales, se evitarán sus detalles. Para la lectura adicional sobre estos temas se recomienda que los lectores consulten a Craig (1989), Mittal y Nagrath (2003), Ghosal (2006), Spong *et al.* (2006) y otros.

10.10.1 El control cartesiano

En este control, dada la posición y orientación cartesiana así como las primeras dos derivadas, un planteamiento es usar la cinemática inversa para posición, velocidad y aceleración con el fin de obtener la posición, velocidad y aceleración de la articulación, y usar uno de

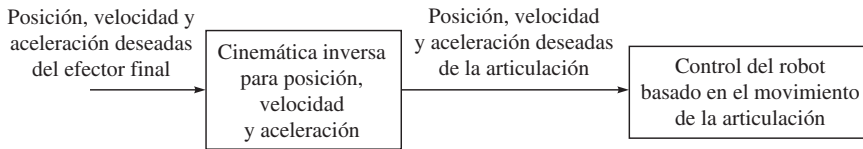


Figura 10.26 Un control cartesiano que usa la cinemática inversa y un controlador de movimiento de la articulación

los planteamientos de control de articulaciones que se presentan en las secciones 10.3, 10.6 y 10.8, respectivamente. Esto se presenta en la figura 10.26. La conversión de trayectoria es bastante compleja y consume mucho tiempo. Por lo tanto, en muchas ocasiones sólo se ejecuta la cinemática inversa para la posición para obtener los movimientos de articulación deseados, los que luego son numéricamente diferenciados para obtener las velocidades y aceleraciones de articulaciones. Esta diferenciación numérica tiende a amplificar el ruido, lo que conduce a otras dificultades del control.

Una manera alternativa de evitar las dificultades que se mencionan arriba, es decir, el ruido numérico, etc., es el uso de un algoritmo de cinemática directa, como el que se presenta en el capítulo 6, para convertir las trayectorias reales de articulaciones disponibles de los sensores de articulaciones en las trayectorias del efector final, y aplicar una ley de control para obtener las fuerzas y momentos que van a ser aplicadas al efector final. Estas fuerzas y momentos de control se transforman luego en los pares de torsión de los actuadores de articulaciones necesarios mediante la premultiplicación de las cantidades anteriores por la transposición de la matriz jacobiana calculada en el capítulo 6. La correlación entre las fuerzas y momentos del efector final se obtienen en el capítulo 7. Este método se presenta en la figura 10.27.

10.10.2 Control por fuerza

En aplicaciones donde el efector final tiene que aplicar una fuerza controlada, por ejemplo, en un vidrio que es limpiado por un robot, los métodos de posición y control que se presentaron en las secciones anteriores no serán apropiados, a menos que la herramienta en el efector final, por ejemplo, una esponja, sea suficientemente suave. Si el efector final es rígido, por ejemplo, una herramienta de rasgado, entonces cualquier incertidumbre en la posición de la superficie de vidrio o el error posicional en el efector final causará que se rompa el vidrio o que el rascador ni siquiera toque el vidrio. En tales situaciones deberá especificarse la fuerza, y no la posición, para obtener un desempeño satisfactorio del robot. De hecho, es más realista usar un contro-

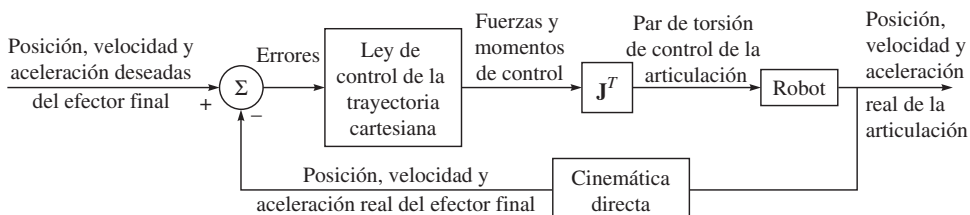


Figura 10.27 Un control cartesiano que usa la cinemática directa

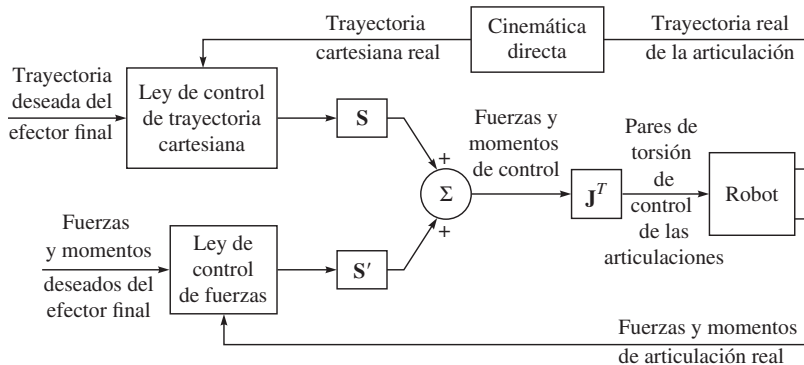


Figura 10.28 Controlador híbrido de posición/fuerza

lador híbrido de posición/fuerza donde ambos controladores de posición y fuerza se utilicen basados en los requerimientos de la tarea. Por ejemplo, un robot que depende del ancho de la esponja podrá limpiar cierta anchura del vidrio para luego tomar una posición en el vidrio con el fin de limpiar la siguiente anchura del vidrio. Mientras toma la siguiente posición, el robot se está moviendo en un espacio libre sin ninguna necesidad de aplicar fuerza. Por lo tanto, un controlador de posición será suficiente. En efecto, la tarea del robot se subdivide en varias subtareas. Una típica ilustración de un controlador híbrido de posición/fuerza se presenta en la figura 10.28, donde S y S' son matrices diagonales que actúan como modo de cambio de estado para decidir si el controlador de posición o el de fuerza está en acción.

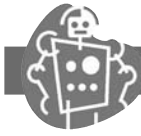
Observe que cuando el efector final del robot está en contacto con la superficie, surgen ciertas restricciones naturales. Se trata de las siguientes:

1. Cuando un robot está en contacto con una superficie, no la puede atravesar. Por ende, existe una restricción de posición natural.
2. Si la superficie que se va a contactar es sin fricción, el robot tampoco puede aplicar ninguna tangente de fuerza a la superficie. Por ende, existe una restricción de fuerza natural.

Cuando dos superficies están en contacto, las restricciones naturales arriba mencionadas pueden especificarse como la restricción de posición a lo largo de la normal a la superficie, mientras que la restricción de fuerza puede diseñarse a lo largo de la tangente a la superficie. Estos dos tipos de restricciones, fuerza y posición, segmentan los grados de libertad de posibles movimientos del efector final en dos conjuntos ortogonales que deben ser controlados según diferentes criterios. Además, cualesquiera otras variables de fuerza y posición que puedan ser controladas durante el movimiento se llaman restricciones artificiales.

RESUMEN

En este capítulo se presentan los algoritmos para el control de movimiento de robots. Se analizan controles tanto lineales como no lineales. También se presenta el aspecto de estabilidad de un algoritmo de control. Finalmente, para completar el tema, se introduce el control por trayectoria cartesiana y fuerza. Se ofrecen varios ejemplos para ilustrar diferentes conceptos en este capítulo.



EJERCICIOS

- 10.1 Para el movimiento del bloque que se presenta en la figura 10.2, si $m = 2$, $b = 6$, $k = 4$ y si está inicialmente en reposo, describa su movimiento cuando se libere de la posición $x = 1$.
- 10.2 ¿Cuáles son los polos de un sistema de control?
- 10.3 Para un sistema de segundo orden, defina la sobreoscilación y la constante de tiempo.
- 10.4 ¿Qué es el control PID? ¿Por qué es importante el término de la integral?
- 10.5 Considere un sistema de accionamiento de eslabón que consiste en un servomotor CD con una inercia total de 0.02 kg/m^2 , una fricción de cojinete de 0.5 N/s y una caja de engranajes con una relación de radios de 32. La inercia del eslabón es 5 kg/m^2 y la fricción del cojinete del eslabón es 2 N/s . Determine la inercia efectiva y el amortiguamiento efectivo para la articulación. Suponga que todas las flechas son rígidas y sin masa.
- 10.6 La función de transferencia (TF) de un sistema es $G(s) = \frac{0.2}{0.1s^2 + 0.6s + 1}$. Busque su frecuencia natural y la relación de amortiguamiento.
- 10.7 Escriba la representación estado-espacio del problema en el ejercicio 10.1.
- 10.8 Busque la TF a partir de la representación estado-espacio del ejercicio 10.6.
- 10.9 Considere el sistema no lineal
- $$\ddot{x} + 7\dot{x}^2 + x\dot{x} + x^3 = u$$
- donde u es la entrada de control. Diseñe un sistema de control conveniente basado en la ley de control particionada, de tal modo que la respuesta del error sea críticamente amortiguada. Dibuje el diagrama de bloques.
- 10.10 ¿Por qué son necesarios el control cartesiano y el control por fuerza en una aplicación de robot?
- 10.11 Explique el criterio de estabilidad de Lyapunov para sistemas no lineales.



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 10.12 Para la TF que se define en el ejercicio 10.6, obtenga la respuesta de tiempo del sistema para una entrada de paso unitaria.
- 10.13 Obtenga la respuesta de tiempo $y(t)$ para una entrada de paso unitaria si la función de transferencia de dominio de Laplace de un sistema lineal de segundo orden $G(s)$ se obtiene por $G(s) = \frac{16}{s^2 + 14s + 49}$. ¿Cuál es el tipo de amortiguamiento?
- 10.14 Busque los errores de estado estable para todos los controladores del ejemplo 10.7.



Capítulo

11

Planeación de movimientos

El objetivo de la planeación de movimientos de un robot es generar una función con la cual se moverá un robot. Esa generación de función depende de las tareas del robot, por ejemplo, recoger un objeto de un punto para depositarlo en otro o soldar dos piezas metálicas a lo largo de una curva. En el primer caso, se asigna el punto inicial y el punto final, es decir, el movimiento de punto a punto, mientras que en el segundo, tiene que especificarse una secuencia finita de puntos, es decir, un movimiento de ruta continua. Un usuario de robots normalmente especifica un número de parámetros para describir una tarea de punto a punto o de ruta continua. Luego, un algoritmo de planeación de la trayectoria calcula las entradas al controlador de movimiento del robot.

La planeación de las trayectorias puede efectuarse ya sea en el espacio de las articulaciones o articular, es decir, en términos de las posiciones articulares, velocidades y aceleraciones, o espacio cartesiano (también llamado espacio operacional). Esto es, en términos de las posiciones, del efector final, orientaciones y sus derivadas respecto al tiempo. Por lo regular se prefiere lo último, ya que permite una descripción natural de la tarea que el robot tiene que realizar. Sin embargo, la acción de control para el robot se lleva a cabo en el espacio de la articulación. Por esta razón, debe usarse un algoritmo inverso, apropiado para reconstruir la secuencia de tiempo de variables articulares correspondientes a la secuencia arriba mencionada en el espacio cartesiano.

La planeación de la trayectoria en el espacio cartesiano naturalmente permite dar cuenta de la presencia de cualquier restricción a lo largo de la ruta del efector final. Éstas tienen que ver con las regiones del espacio de trabajo en las que el robot tiene prohibido actuar, por ejemplo, por la presencia de obstáculos. Estas restricciones se describen mejor en el espacio cartesiano porque sus puntos correspondientes en el espacio articular son difíciles de



¿Por qué planeación de movimientos?

Igual que una persona decide sobre la ruta que seguirá de un lugar a otro, la ruta de un robot tiene que decidirse por medio de la planeación de movimientos.

calcular. Pero en la vecindad de configuraciones singulares, es decir, cuando no pueden calcularse variables articulares para variables del efector final determinadas por la inexistencia del inverso de la matriz de movimiento de transferencia asociada, la planeación de las trayectorias en el espacio cartesiano no es posible. En estos casos, es recomendable especificar el movimiento del efector final en términos de las variables de las articulaciones, es decir, la planeación del espacio articular. Por lo tanto, tiene que generarse una secuencia de tiempo de las variables de las articulaciones. Para redondear el tema, se presentarán ambos tipos de planeación de las trayectorias en las siguientes secciones.

11.1



Planeación de espacios articulares

En esta sección, se considerarán métodos para determinar una trayectoria deseada con variables articulares a través del tiempo. En el método del espacio articular, se supone que se conocen las posiciones iniciales y finales de la articulación correspondientes a las configuraciones iniciales y finales del efector final mediante la solución del problema de cinemática inversa de posición que se explicó en el capítulo 6. Entonces, el problema básico es cómo seleccionar una trayectoria entre una posición inicial y una final de articulación con el intervalo que se permite para el movimiento entre las dos. En la literatura, se han propuesto varios métodos para resolver el problema. Uno simple que se basa en las funciones polinomiales de tiempo. Suponga que para alguna articulación, el ángulo inicial es θ_0 en un tiempo $t = 0$ y el ángulo final es θ_f en un tiempo $t = t_f$, es decir,

$$\theta(0) = \theta_0; \text{ y } \theta(t_f) = \theta_f \quad (11.1)$$

Además, para iniciar y detener el efector final de acuerdo con cierta velocidad y aceleración deseada, tiene que cumplirse con las siguientes condiciones:

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0; \dot{\theta}(t_f) = \dot{\theta}_f \quad (11.2)$$

$$\ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}_0; \ddot{\theta}(t_f) = \ddot{\theta}_f \quad (11.3)$$

Aunque muchas funciones cómodas puedan satisfacer las restricciones determinadas por las ecuaciones (11.1)-(11.3), se eligen aquí polinomios del tiempo t por su facilidad en el cálculo y simplicidad de expresión. El orden más bajo que puede cumplir totalmente con las seis condiciones, las ecuaciones (11.1)-(11.3), es cinco, es decir,

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (11.4)$$

Realizando la derivada de la ecuación (11.4) respecto al tiempo, se obtiene

$$\dot{\theta}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + 5a_5t^4 \quad (11.5)$$

$$\ddot{\theta}(t) = 2a_2 + 6a_3t + 12a_4t^2 + 20a_5t^3 \quad (11.6)$$

Si se sustituyen las condiciones de las ecuaciones (11.1)-(11.3) en las ecuaciones (11.4)-(11.6), se obtienen seis ecuaciones con coeficientes como incógnitas, denominadas, a_0, \dots, a_5 , es decir,

$$\theta(0) = \theta_0 = a_0 \quad (11.7a)$$

$$\theta(t_f) = \theta_f = a_0 + a_1t_f + a_2t_f^2 + a_3t_f^3 + a_4t_f^4 + a_5t_f^5 \quad (11.7b)$$

$$\dot{\theta}(0) = a_1 \quad (11.7c)$$

$$\dot{\theta}(t_f) = a_1 + 2a_2t_f + 3a_3t_f^2 + 4a_4t_f^3 + 5a_5t_f^4 \quad (11.7d)$$

$$\ddot{\theta}(0) = 2a_2 \quad (11.7e)$$

$$\ddot{\theta}(t_f) = 2a_2 + 6a_3t_f + 12a_4t_f^2 + 20a_5t_f^3 \quad (11.7f)$$

Si se resuelven las ecuaciones (11.7a-f), se determinan los coeficientes (incógnitas) a_0, \dots, a_5 , que cumplen con las ecuaciones (11.1)-(11.3), como

$$a_0 = \theta_0; a_1 = \dot{\theta}_0; a_2 = \frac{1}{2} \ddot{\theta}_0 \quad (11.8a)$$

$$a_3 = \frac{1}{2t_f^3} [20(\theta_f - \theta_0) - 8(\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2] \quad (11.8b)$$

$$a_4 = \frac{1}{2t_f^4} [30(\theta_0 - \theta_f) + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2] \quad (11.8c)$$

$$a_5 = \frac{1}{2t_f^5} [12(\theta_f - \theta_0) - 6(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)t_f + (\ddot{\theta}_f - \ddot{\theta}_0)t_f^2] \quad (11.8d)$$

Observe que si las aceleraciones en el punto final desaparecen, es decir, si $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_f = 0$, y la relación que se muestra en la figura 11.1 se satisface por θ_0 , θ_f , $\dot{\theta}_0$ y $\dot{\theta}_f$, es decir, si

$$\theta_f - \theta_0 = \frac{t_f}{2} (\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_f) \quad (11.9)$$

entonces $a_5 = 0$, lo que implica que sólo se requiere un polinomio del cuarto orden para $\theta(t)$. Usando combinaciones de los polinomios del cuarto orden y líneas rectas, pueden determinarse con mucha facilidad las trayectorias para varios casos. Vamos a considerar dos de estos casos, como se explicará en las siguientes subsecciones.

11.1.1 Cuando se cuentan con los puntos iniciales y finales, θ_0 y θ_f

Como en la figura 11.2, se desarrolla la trayectoria que inicia desde el reposo en θ_0 , pasa a través de las fases de aceleración, velocidad constante y desaceleración, y finalmente llega a un alto total en θ_f . Para este propósito, primero se elige el valor del parámetro Δ que denota

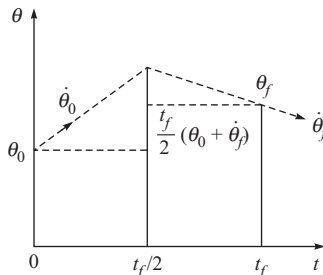


Figura 11.1 Condiciones de frontera $\ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_f$ y ecuación (11.9)

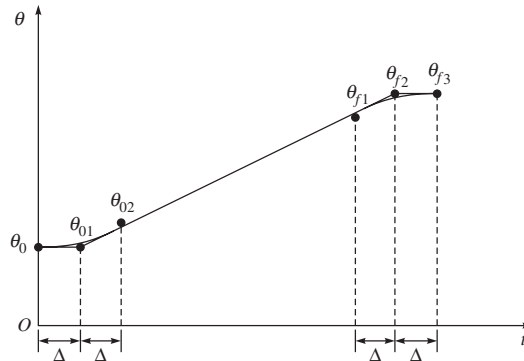


Figura 11.2 Trayectoria con aceleración, velocidad constante y desaceleración

la mitad del periodo de aceleración y desaceleración. En segundo lugar, se determinan los puntos auxiliares θ_{02} y θ_{f1} mediante el siguiente procedimiento: se toman dos puntos θ_{01} y θ_{f2} en el tiempo $t = \Delta$ y $t = t_f - \Delta$, como $\theta_{01} = \theta_0$ y $\theta_{f2} = \theta_f$. Entonces se conectan θ_{01} y θ_{f2} con una línea recta y se determinan θ_{02} y θ_{f1} como los puntos en la línea recta en los tiempos $t = 2\Delta$ y $t = t_f - 2\Delta$. Luego se determinan los segmentos de la trayectoria entre θ_0 y θ_{02} y entre θ_{f1} y θ_f mediante los polinomios de cuarto orden, de tal modo que sus velocidades coincidan con la composición de las líneas rectas que conectan a $\theta_0 - \theta_{01} - \theta_{f2} - \theta_f$ en los puntos de frontera θ_0 , θ_{02} , θ_{f1} y θ_f y sus aceleraciones son cero en estos puntos frontera. El segmento de la trayectoria entre θ_{02} y θ_{f1} se especifica por la línea recta. De este modo, se determina la trayectoria completa mediante la línea sólida en negritas de la figura 11.2.

Ejemplo 11.1

Planeación de una trayectoria para un manipulador planar de dos eslabones

Si se aplica el método arriba mencionado al manipulador planar de dos eslabones que se muestra en la figura 11.3a), se genera una trayectoria que inicia desde el reposo en la posición inicial, figura 11.3b) en 2 segundos. Suponga que elegimos $\Delta = 0.25$ seg. Entonces el primer ángulo de la articulación, θ_1 , se obtiene como sigue: primero elegimos $\theta_{01} = 90^\circ$ en tiempo, $t = 0.25$ seg y $\theta_{f2} = 60^\circ$ en $t = 1.75$ seg. Luego se obtiene la ecuación de la línea recta como

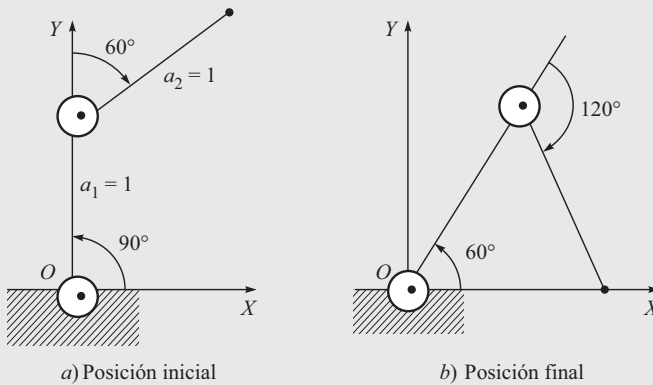
$$\theta = -20t + 95 \quad (11.10a)$$

Por lo tanto, θ_{02} en $t = 0.5$ seg y θ_{f1} en $t = 1.5$ seg se encuentran como

$$\theta_{02} = 85^\circ; \text{ y } \theta_{f1} = 65^\circ \quad (11.10b)$$

Entonces se obtienen los coeficientes del polinomio de cuarto orden entre θ_0 y θ_{02} como

$$a_0 = 90; a_1 = a_2 = 0; a_3 = -80; \text{ y } a_4 = 80 \quad (11.10c)$$

**Figura 11.3** Manipulador de dos eslabones

Observe que se utilizan condiciones de $\dot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}_f = 0$, y $\theta_f - \theta_0 = t_f/2(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)$ para encontrar los valores de coeficientes. Para el intervalo $0 < t \leq 0.5$, la trayectoria de la articulación es como sigue:

$$\theta_1 = 90 - 80t^3 + 80t^4 \quad (11.10d)$$

Para la línea recta entre θ_{02} y θ_{f1} , es decir, $0.5 < t \leq 1.5$, puede obtenerse fácilmente como

$$\theta_1 = 85 - 20(t - 0.5) \quad (11.10e)$$

Finalmente, el polinomio de cuarto orden entre θ_{f2} y θ_f , es decir, $1.5 < t \leq 2.0$ puede escribirse como

$$\theta_1(t) = a_0 + a_1(t - 1.5) + a_2(t - 1.5)^2 + a_3(t - 1.5)^3 + a_4(t - 1.5)^4 \quad (11.10f)$$

cuyos coeficientes se calculan como

$$a_0 = 65; a_1 = -20; a_3 = 80; \text{ y } a_4 = -80 \quad (11.10g)$$

Por lo tanto, la trayectoria final para θ_1 se escribe como

$$\theta_1(t) = \begin{cases} 90 - 80t^3 + 80t^4, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 85 - 20(t - 0.5), & 0.5 < t \leq 1.5 \\ 65 - 20(t - 1.5) + 80(t - 1.5)^3 - 80(t - 1.5)^4, & 1.5 < t \leq 2.0 \end{cases} \quad (11.10h)$$

De manera similar, se da el segundo ángulo de articulación θ_2 por

$$\theta_2(t) = \begin{cases} -60 - 160t^3 + 160t^4, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ -70 - 40(t - 0.5), & 0.5 < t \leq 1.5 \\ -110 - 40(t - 1.5) + 160(t - 1.5)^3 - 160(t - 1.5)^4, & 1.5 < t \leq 2.0 \end{cases} \quad (11.11)$$

La figura 11.4 muestra la trayectoria resultante del punto final.

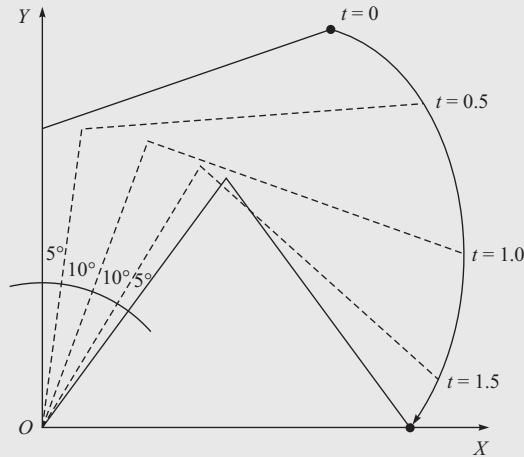


Figura 11.4 Trayectoria de punto final

11.1.2 Cuando se cuenta con el punto inicial, varios puntos intermedios y el punto final

Aquí se determina una trayectoria que empieza desde el reposo en la posición inicial θ_0 , pasa a través de las posiciones intermedias θ_1 y θ_2 y se detiene en la posición final θ_f . Primero considere el caso donde no es necesario pasar exactamente a través de θ_1 y θ_2 . En éste, sean los puntos auxiliares especificados θ_{02} , θ_{11} , θ_{12} , \dots , θ_{f1} , como en la figura 11.5. Observe que los valores en el punto θ_{01} y θ_0 son los mismos, que los valores en θ_{f2} y θ_f son los mismos y que θ_{02} y θ_{11} están en la línea recta entre θ_{01} y θ_1 . Los puntos θ_{12} , \dots , θ_{f1} se determinan de la misma manera. Entonces se determinan los segmentos de la trayectoria para (θ_0, θ_{02}) ,

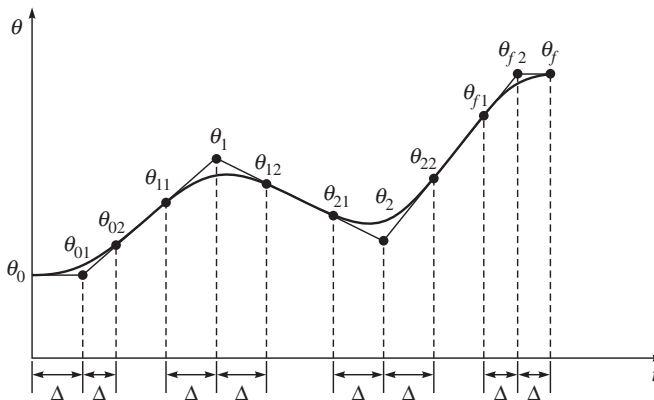


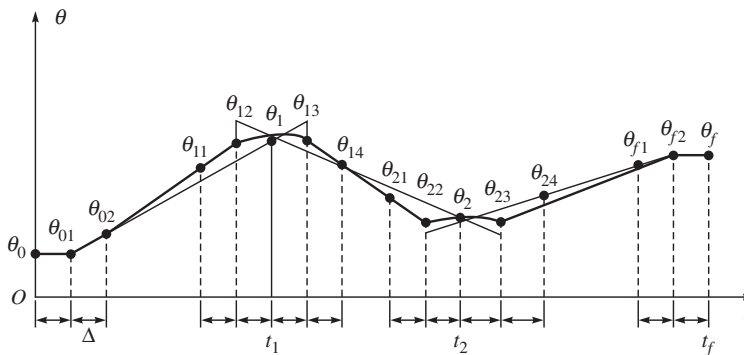
Figura 11.5 Trayectoria que pasa cerca de los puntos intermedios

$(\theta_{11}, \theta_{12}), \dots, (\theta_{f1}, \theta_f)$ mediante polinomios de cuarto orden, así como para $(\theta_{02}, \theta_{11}), (\theta_{12}, \theta_{21})$, y $(\theta_{22}, \theta_{f1})$, usando líneas rectas. La trayectoria resultante se ilustra mediante una línea en negritas en la figura 11.5.

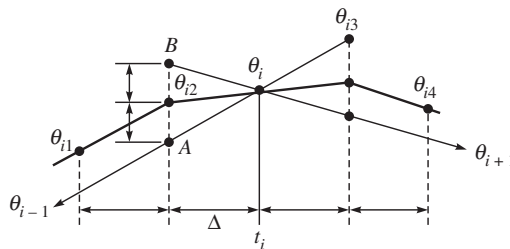
Luego considere el caso donde se requiere que la trayectoria pase exactamente a través de θ_1 y θ_2 . Este caso puede resolverse mediante el incremento del número de puntos auxiliares. Un método se presenta en la figura 11.6a). Los puntos auxiliares se determinan de la siguiente manera: Como lo muestra la figura 11.6b), θ_{i2} ($i = 1, 2$) es el punto medio entre A —la intersección de la línea de $t = t_i - \Delta$ con la línea recta entre θ_{i-1} (θ_{01} cuando $i = 1$) y θ_i — y B —la intersección de la línea de $t = t_i + \Delta$ con la línea recta entre θ_i y θ_{i+1} (θ_2 cuando $i = 1$)—. El punto θ_{i3} se determina de manera parecida. Luego se determinan los segmentos de la trayectoria para $(\theta_0, \theta_{02}), (\theta_{11}, \theta_1), (\theta_1, \theta_{14}), \dots, (\theta_{f1}, \theta_f)$ mediante polinomios del cuarto orden y para $(\theta_{02}, \theta_{11}), (\theta_{14}, \theta_{21})$ y $(\theta_{24}, \theta_{f1})$, usando líneas rectas, como en el caso anterior.

En el problema básico de conectar θ_0 y θ_f mediante un polinomio, que se mencionó al principio de esta sección, si la condición de frontera para la posición, ecuación (11.1) y la condición de la velocidad, ecuación (11.2), pero no la de la continuidad de aceleración, ecuación (11.3), se consideraron como polinomios que pueden simplificarse. De manera más específica, puede usarse un polinomio de tercer orden

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad (11.12a)$$



a) Puntos intermedios



b) Determinación de los puntos θ_{i2} y θ_{i3}

Figura 11.6 Trayectoria que pasa a través de los puntos intermedios

en lugar de un polinomio de quinto orden. Las constantes en la ecuación (11.7) son

$$a_0 = \theta_0, a_1 = \dot{\theta}_0, a_2 = \frac{1}{t_f^2} [3(\theta_f - \theta_0) - (2\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_f)t_f],$$

$$a_3 = \frac{1}{t_f^3} [-2(\theta_f - \theta_0) + (\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_0)t_f]. \quad (11.12b)$$

En particular, si θ_0 , θ_f , $\dot{\theta}_0$ y $\dot{\theta}_f$ cumplen con la ecuación (11.9), entonces $a_3 = 0$, y así $\theta(t)$ se vuelve un polinomio de segundo orden. Por lo tanto, en los casos 1 y 2 que se trataron arriba también pueden usarse polinomios de segundo orden.

11.2



Planeación del espacio cartesiano

Cuando se genera una trayectoria entre dos configuraciones del robot por medio de un método de variables articulares, como se describió en la subsección anterior, a veces es difícil pronosticar el movimiento del efector final en el espacio cartesiano. También hay casos donde se requiere alguna trayectoria específica del efector final. Por ejemplo, en la soldadura por arco, el electrodo deberá seguir con precisión a una costura. En estos casos, deseamos generar una trayectoria en términos de las variables de posición y orientación, es decir, la configuración del efector final. Hay varios modos de describir la posición y orientación, es decir, la configuración del efector final. Puesto que el efector final de un cuerpo rígido en el espacio cartesiano tridimensional tiene seis grados de libertad, se requieren seis variables para determinar la configuración del efector final. Una vez que se elija la manera, puede determinarse la trayectoria en términos de una variable de selección arbitraria, que es una secuencia de polinomios de la forma de la ecuación (11.4) o de la ecuación (11.10). La trayectoria de un efector final que se obtiene de esta manera es muy simple y fácil de visualizar. Por ejemplo, en caso que el efector final se mueva sobre la línea recta que conecta las configuraciones iniciales y finales en el espacio cartesiano tridimensional, pueden usarse las coordenadas X , Y y Z del origen del sistema de referencia del efector final respecto al sistema de referencia como las tres variables para describir la traslación.



Espacio articular vs. espacio cartesiano

En el espacio articular se utilizan ángulos articulares y desplazamientos para definir la configuración de un robot, mientras que las coordenadas cartesianas se utilizan para el mismo propósito en el espacio cartesiano.

Ejemplo 11.2

Trayectoria de un robot de dos eslabones en el espacio cartesiano

Vamos a obtener una trayectoria para el problema del ejemplo 11.1, no en términos de variables articulares, sino en términos de las variables de posición del efector final, es decir, $r \equiv [x, y]^T$. Puesto que para la longitud del eslabón $a_1 = a_2 = 1$ la posición inicial r_0 es $[\sqrt{3}/2, 3/2]^T$ y la posición final r_f es $[1, 0]^T$, la trayectoria $r(t) = [x(t), y(t)]^T$ se

obtiene, de manera similar al método de variables articulares, como en la sección 11.1.1, como

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{3/2} + 4(2 - \sqrt{3})(t^3 - t^4)/3 & 0 \leq t \leq 0.5 \\ (5\sqrt{3} + 2)/12 + (2 - \sqrt{3})(t - 0.5)/3 & 0.5 < t \leq 1.5 \\ (10 + \sqrt{3})/12 + (2 - \sqrt{3})(t - 1.5)/3 & 1.5 < t \leq 2 \end{cases} \quad (11.13a)$$

$$y(t) = \begin{cases} 3/2 - 4t^3 + 4t^4 & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 5/4 - (t - 0.5) & 0.5 < t \leq 1.5 \\ 1/4 - (t - 1.5) + 4(t - 1.5)^3 - 4(t - 1.5)^4 & 1.5 < t \leq 2.0 \end{cases} \quad (11.13b)$$

La figura 11.7 muestra la trayectoria de punto final resultante.

En cuanto a la orientación del efector final, si tomamos los ángulos de Euler o los ángulos de *roll*, *pitch* y *yaw* (balanceo, cabeceo, rotación), el efector final se mueve en una línea recta respecto a estas variables.

Sin embargo, el movimiento correspondiente al sistema de referencia es difícil de entender en forma intuitiva porque se da como una combinación de estas tres rotaciones alrededor de tres diferentes ejes de variación de tiempo. Los siguientes dos métodos son efectivos para evitar esta dificultad. El primero se basa en la representación de la orientación alrededor de un eje fijo y el segundo es la representación por rotaciones alrededor de dos ejes.

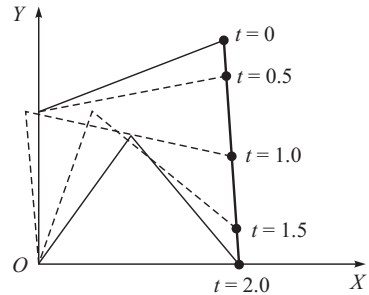


Figura 11.7 Trayectoria de punto final

11.2.1 Método de rotación de un solo eje

Una representación de la relación entre dos sistemas F_A y F_B que tienen el mismo origen se determina por el par $[\mathbf{e}, \alpha]$, donde $\mathbf{e} \equiv [e_x, e_y, e_z]^T$ es el eje de rotación equivalente y α es el ángulo de rotación equivalente. Este par se utiliza para obtener F_B de F_A mediante una sola rotación alrededor del vector unitario fijo \mathbf{e} por un ángulo α . Observe que el par $[\mathbf{e}, \alpha]$ también puede representarse mediante un vector tridimensional proporcional a \mathbf{e} que tenga la dirección \mathbf{e} y la magnitud α . Observe también que la matriz de rotación $\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \alpha)$ se determina por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \alpha) = \begin{bmatrix} e_x^2 C' \alpha + C \alpha & e_x e_y C' \alpha - e_z S \alpha & e_x e_z C' \alpha + e_y S \alpha \\ e_x e_y C' \alpha + e_z S \alpha & e_y^2 C' \alpha + C \alpha & e_y e_z C' \alpha - e_x S \alpha \\ e_x e_z C' \alpha - e_y S \alpha & e_y e_z C' \alpha + e_x S \alpha & e_z^2 C' \alpha + C \alpha \end{bmatrix} \quad (11.14)$$



Representación alterna de rotación

Se usa la dirección de los cosenos y ángulos de Euler (vea el capítulo 5).

donde $S\alpha \equiv \sin \alpha$, $C\alpha \equiv \cos \alpha$, y $C'\alpha \equiv 1 - C\alpha$. La comprobación de la ecuación (11.14) es como sigue. Primero observamos que

$$\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \alpha) = [\mathbf{i}' \ \mathbf{j}' \ \mathbf{k}']$$

donde \mathbf{i}' , \mathbf{j}' y \mathbf{k}' son los vectores unitarios en las direcciones X , Y y Z de F_B expresadas en F_A . Sean \mathbf{r}_1 el vector arbitrario en F_A y \mathbf{r}_2 el vector obtenido por girar \mathbf{r}_1 alrededor de \mathbf{e} por α , puede obtenerse la igualdad según los principios básicos de la cinemática rotacional (Ángeles, 2003) como

$$\mathbf{r}_2 = (\mathbf{e}^T \mathbf{r}_1) \mathbf{e} + C\alpha [\mathbf{r}_1 - (\mathbf{e}^T \mathbf{r}_1) \mathbf{e}] + S\alpha (\mathbf{e} \times \mathbf{r}_1) \quad (11.15a)$$

Puesto que para $\mathbf{r}_1 \equiv [1, 0, 0]^T$ implica $\mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{i}'$, y puede demostrarse según la ecuación (11.15 a) que

$$\mathbf{r}_2 \equiv [e_x^2 C'\alpha + C\alpha, e_x e_y C'\alpha + e_z S\alpha, e_x e_z C'\alpha - e_y S\alpha]^T \quad (11.15b)$$

que no es otra cosa que la primera columna de $\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \alpha)$, como se muestra en la ecuación (11.14). La segunda y tercera columnas son obtenidas de manera similar. Entonces, el método de rotación de un solo eje se determina. Suponga que la orientación \mathbf{r}_f Respecto al sistema de referencia del efector final \mathbf{r}_0 es $[\mathbf{e}_f, \alpha_f]$ cuando se expresa mediante la representación arriba mencionada $[\mathbf{e}, \alpha]$. Entonces puede darse una trayectoria desde \mathbf{r}_0 hasta \mathbf{r}_f como una para la cual α cambia de 0 a α_f alrededor del eje fijo \mathbf{e}_f . El cambio de α puede especificarse, por ejemplo, mediante la solución similar a $\theta(t)$ de la ecuación (11.4), es decir, con las siguientes condiciones de frontera:

$$\alpha(0) = 0, \alpha(t_f) = \alpha_f, \dot{\alpha}(0) = 0, \dot{\alpha}_0(t_f) = \dot{\alpha}_f, \ddot{\alpha}(0) = 0, \ddot{\alpha}_0(t_f) = \ddot{\alpha}_f$$

La trayectoria para la orientación se determina por $[\mathbf{e}_f, \alpha(t)]$, donde $0 \leq t \leq t_f$. Puesto que la trayectoria se determina por una rotación alrededor de un eje \mathbf{e}_f que se fija al sistema de referencia, es fácil de entender de manera intuitiva.

11.2.2 Método de rotación de eje doble

Suponga que la orientación final respecto a la inicial es determinada por (ϕ, θ, ψ) cuando se expresa usando los ángulos de Euler. Si se usa la ecuación (11.14) y la representación de matriz en términos de ϕ , θ y ψ , como se hizo en el capítulo 5, puede verse fácilmente que la orientación también se determina por la matriz de rotación $\mathbf{Q}(\mathbf{e}', \theta)\mathbf{Q}(\mathbf{k}', \psi + \phi)$, donde $\mathbf{e}' \equiv [-\sin \phi, \cos \phi, 0]^T$ y donde \mathbf{k}' es el eje Z después de la transferencia por $\mathbf{Q}(\mathbf{e}', \theta)$. De este modo, puede realizarse una trayectoria de inicial a final usando $\mathbf{Q}(\mathbf{e}', \theta)$, $\mathbf{Q}(\mathbf{k}', \psi + \phi)$, donde θ y $\psi + \phi$ son funciones polinomiales de tiempo especificadas por la ecuación (11.4) con condiciones de frontera apropiadas y \mathbf{k}' es el vector unitario paralelo al eje Z del tiempo t después de la transferencia por $\mathbf{Q}(\mathbf{e}, \theta)$. Expresado de manera simple, esta trayectoria es una combinación de dos rotaciones simultáneas; una alrededor del eje perpendicular a los vectores de aproximación de las configuraciones inicial y final, es decir, \mathbf{r}_0 y \mathbf{r}_f (el cual tiene una dirección constante en el sistema de referencia del efector final de \mathbf{r}_0) a través de un ángulo θ , y la otra rotación a través de un ángulo $(\psi + \phi)$ alrededor del vector de aproximación en cada instante. Ambos ejes de estas dos rotaciones son fáciles de entender. En particular, cuando la última articulación de un manipulador es rotacional o de revoluta con su eje rotacional coincidente con el vector de aproximación del efector final, esta articulación puede ejecutar la segunda rotación alrededor de \mathbf{k}' por sí misma. Aunque el método de rotación del

Ejemplo 11.3**Trayectoria para la orientación del efector final**

Suponga que quisiéramos encontrar una trayectoria que transfiere la orientación del efector final desde el reposo en la orientación inicial que se presenta en la figura 11.8a) a la orientación final que se muestra en la figura 11.8b), llegando al reposo en el tiempo $t_f = 1$. Resuelva el problema por medio de los métodos de rotación de un solo eje y del eje doble. Puede verse fácilmente, en la figura 11.8, que la matriz de rotación \mathbf{Q} que representa la orientación final respecto a la inicial es

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se compara esta matriz con la ecuación (11.14), se obtiene lo siguiente:

i) Si se suman los elementos diagonales,

$$(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)C'\alpha + 3C\alpha = 0$$

Puesto que \mathbf{e} es el vector unitario, $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$, y $1 + 2C\alpha = 0$, es decir $C\alpha = -1/2$. Por lo tanto, $\alpha = 120^\circ$.

ii) Si se restan los elementos no diagonales de la siguiente manera, proporcionará los componentes del vector unitario \mathbf{e} , es decir,

$$\frac{1}{2s\alpha} \begin{bmatrix} q_{32} - q_{23} \\ q_{13} - q_{31} \\ q_{21} - q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}$$

La expresión arriba mencionada inmediatamente da como resultado $\mathbf{e} \equiv [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T$.

Si se usa un polinomio de quinto orden para la interpolación en la forma de la ecuación (11.4), la trayectoria de esta orientación se determina por

$$[\mathbf{e}, \alpha], 0 \leq t \leq 1$$

donde

$$\alpha = 1200t^3 - 1800t^4 + 720t^5$$

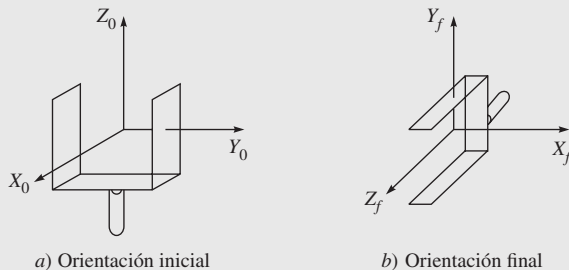


Figura 11.8 Orientación inicial y final del efector final

Un ejemplo de la matriz de rotación que representa la orientación intermedia en $t = 0.5$ de esta trayectoria es como sigue:

$$\mathbf{Q} \equiv \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Esta orientación se muestra en la figura 11.9a). Entonces el problema queda resuelto por medio del método de rotación de eje doble. Los ángulos de Euler para la orientación inicial y final son $[\phi_0, \theta_0, \psi_0]^T = [0^\circ, 0^\circ, 0^\circ]^T$, y $[\phi_f, \theta_f, \psi_f]^T = [0^\circ, 90^\circ, 90^\circ]^T$. Por lo tanto, la trayectoria se determina por

$$\mathbf{Q}(\mathbf{e}', \theta) \mathbf{Q}(\mathbf{k}', \psi + \phi), \quad 0 \leq t \leq 1$$

donde

$$\theta = \psi + \phi = 900t^3 - 1350t^4 + 540t^5$$

La matriz de rotación \mathbf{Q} para la orientación intermedia en el tiempo $t = 0.5$ para este caso se calcula según $\mathbf{e}' \equiv [0, 1, 0]^T$ y $\theta = \psi + \phi = 45^\circ$ a $t = 0.5$ como

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Esta orientación queda representada en la figura 11.9b). Si se compara esto con la figura 11.9a), vemos que el vector de aproximación siempre es perpendicular al eje Y_0 , lo que da como resultado una ruta más corta. Por otro lado, si el movimiento del efector final tiene que seguir una trayectoria prescrita de movimiento, esto tiene que ser analíticamente geométrico. Entonces será necesario referirse a los movimientos primitivos definiendo las características geométricas de las rutas y tiempos primitivos definiendo la ley de tiempo sobre la ruta misma, como se presenta a continuación.

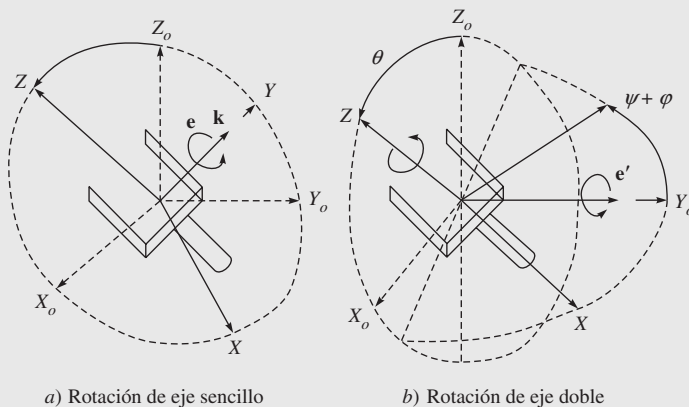


Figura 11.9 Métodos de orientación intermedia

eje doble es un poco más complejo que el método de rotación de un solo eje, es más fácil de entender el cambio del vector de aproximación.

11.3



Trayectorias de posición y orientación

Si se considera que \mathbf{x} es el vector de las variables de espacio operacional que expresa la *posición y orientación* del efector final del manipulador, generar una trayectoria en el espacio operacional representa determinar una función $\mathbf{x}(t)$, tomando el sistema del efector final desde la ubicación inicial hasta la final en un tiempo t_f a lo largo de una ruta determinada con una ley específica de tiempo de movimiento. Para ello, primero que nada considere la posición del sistema del efector final. Por consecuencia, la orientación se dará.

11.3.1 Rutas primitivas

Para la definición de *rutas primitivas*, es conveniente referirse a la descripción paramétrica rutas en el espacio. Supóngase que \mathbf{p} es el vector tridimensional y $\mathbf{f}(s)$ es una función vectorial continua definida en el intervalo $[s_i, s_f]$. Considere la ecuación

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(s) \quad (11.16)$$

con referencia a su descripción geométrica, la secuencia de valores de \mathbf{p} con s variando en $[s_i, s_f]$ se llama *ruta* en el espacio. La ecuación (11.16) define la *representación paramétrica* de la ruta Γ y el escalar s se conoce como *parámetro*. Conforme incrementa s , el punto \mathbf{p} se moverá sobre la ruta a una dirección dada. Se dice que esta dirección está inducida en Γ por la representación paramétrica (11.16). Una ruta es cerrada cuando $\mathbf{p}(s_f) = \mathbf{p}(s_i)$; de otra forma, es abierta. Si \mathbf{p}_i es un punto en la ruta abierta Γ en el cual se haya fijado una dirección, la *coordenada de la ruta* del punto genérico \mathbf{p} es la longitud del arco de Γ con los extremos \mathbf{p} y \mathbf{p}_i si \mathbf{p} le sigue a \mathbf{p}_i , lo contrario de esta longitud si \mathbf{p} precede a \mathbf{p}_i . Se dice que el punto \mathbf{p}_i es el origen de la coordenada de la ruta ($s = 0$). De la presentación señalada anteriormente se establece que para cada valor de s le corresponde un punto perfectamente determinado y entonces la coordenada de la ruta puede usarse como un parámetro en una representación paramétrica diferente de la ruta Γ , es decir,

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(s) \quad (11.17)$$

El rango de variación del parámetro s será la secuencia de las coordenadas de la ruta asociada con los puntos de Γ . Considere una ruta Γ representada por la ecuación (11.17). Suponga que \mathbf{p} es un punto correspondiente en la coordenada de la ruta s . Excepto en casos especiales, \mathbf{p} permite la definición de tres vectores unitarios que caracterizan la ruta. La orientación de estos vectores depende exclusivamente de la geometría de la ruta, mientras que su dirección depende también de la dirección incluida por la ruta. El primero de estos vectores unitarios es el *vector unitario de tangente* denotado por \mathbf{t} . Este vector se orienta a lo largo de la dirección incluida en la ruta por s .

El segundo vector unitario es el *vector unitario normal* denotado por \mathbf{n} . Este vector se orienta a lo largo de la línea que cruza a \mathbf{p} con un ángulo recto con \mathbf{t} y que se encuentra en el llamado plano Φ (figura 11.10). Este plano es la posición límite del plano que contiene el vector unitario \mathbf{t} y un punto $\mathbf{p}' \in \Gamma$ cuando \mathbf{p}' tiende a \mathbf{p} a lo largo de la ruta. La dirección de \mathbf{n} es tal que la ruta Γ , en la vecindad de \mathbf{p} respecto al plano que contiene \mathbf{t} y la normal a \mathbf{n} ,

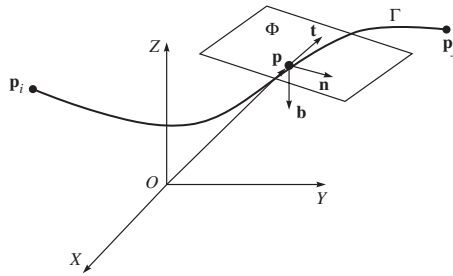


Figura 11.10 Representación paramétrica de una ruta en el espacio

se encuentra en el mismo lado de \mathbf{n} . El tercer vector unitario es el *vector unitario binormal* denotado por \mathbf{b} . Este vector es de esta forma para que el sistema de referencia $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ es derecho (acorde a la regla de la mano derecha) (figura 11.10). Observe que no siempre será posible definir uno de estos sistemas en forma única. Puede demostrarse que los tres vectores unitarios señalados anteriormente están vinculados por relaciones simples con la representación de la ruta Γ como función de la coordenada de la ruta. En particular, ellos son

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}; \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2}; \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (11.18)$$

A continuación se presentarán típicas representaciones paramétricas de la rutas que son útiles para la generación de rutas en el espacio operacional.

Ejemplo 11.4

Segmento lineal en el espacio

Considere el segmento lineal en el espacio que conecta el punto \mathbf{p}_i con el punto \mathbf{p}_f . La representación paramétrica de esta ruta es

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\delta_p\|} \delta_p \quad (11.19)$$

donde $\delta_p \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. Observe que $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_i$ y $\mathbf{p}(\|\delta_p\|) = \mathbf{p}_f$. Por ende, la dirección inducida en Γ por la representación paramétrica de la ecuación (11.19) va de \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_f . Al derivar la ecuación (11.19) respecto a s se obtiene

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{\delta_p}{\|\delta_p\|}; \quad \text{y} \quad \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{0} \quad (11.20)$$

En este caso no es posible definir el sistema $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ de forma única.

Ejemplo 11.5

Círculo en el espacio

Considere un círculo Γ en el espacio. Antes de obtener su representación paramétrica es necesario introducir sus parámetros significativos. Suponga que el círculo se especifica asignando (ecuación 11.11):

- el vector unitario del eje del círculo \mathbf{r}
- el vector posicional \mathbf{d} de un punto a lo largo del eje
- el vector posicional \mathbf{p}_i de un punto sobre el círculo

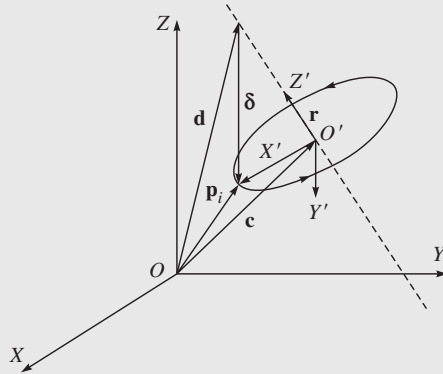


Figura 11.11 Representación paramétrica de un círculo en el espacio

Mediante estos parámetros puede encontrarse el vector posicional \mathbf{c} del centro del círculo. Si $\delta = \mathbf{p}_i - \mathbf{d}$, para que \mathbf{p}_i no sea el eje, es decir, para que el círculo no degenera en un punto, debe ser $|\delta^T \mathbf{r}| < \|\delta\|$. En este caso es

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} + (\delta^T \mathbf{r}) \mathbf{r} \quad (11.21)$$

Luego se desea encontrar una representación paramétrica del círculo como función de la coordenada de la ruta. Observe que esta representación es muy simple para una opción conveniente del sistema de referencia. Para ver esto, considere el sistema de referencia $O'-X'Y'Z'$, donde O' coincide con el centro del círculo, el eje X' se orienta a lo largo de la dirección del vector $\mathbf{p}_i - \mathbf{c}$; el eje Z se orienta a lo largo de \mathbf{r} y el eje Y' se orienta de tal modo que completa un sistema derecho. Cuando se expresa en este sistema de referencia, la representación paramétrica del círculo es

$$\mathbf{p}'(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.22)$$

donde $\rho = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}\|$ es el radio del círculo y el punto \mathbf{p}_i ha sido asumido como el origen de la coordenada de la ruta. Para un sistema de referencia diferente, la representación de la ruta se vuelve

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{p}'(s) \quad (11.23a)$$

donde \mathbf{c} se expresa en el sistema de referencia O -XYZ y \mathbf{Q} es la matriz de rotación del sistema de referencia O' - $X'Y'Z'$ respecto al sistema de referencia O -XYZ, que puede escribirse como

$$\mathbf{Q} \equiv [\mathbf{x}' \ \mathbf{y}' \ \mathbf{z}'] \quad (11.23b)$$

en la que \mathbf{x}' , \mathbf{y}' , \mathbf{z}' indican los vectores unitarios del sistema de referencia expresado en el sistema de referencia O -XYZ. La diferenciación de la ecuación (11.23a) respecto a s da como resultado

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ y } \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho}\cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho}\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.24)$$

11.3.2 Posición

Si $\mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$ es el vector tridimensional de la representación paramétrica de la ruta Γ como una función de la coordenada de la ruta s , el origen del sistema de referencia del efector final se mueve de \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_f en un tiempo t_f . Por motivos de simplicidad, suponga que el origen de la coordenada de la ruta esté en \mathbf{p}_i y que la dirección inducida en Γ se va de \mathbf{p}_i a \mathbf{p}_f . La coordenada de la ruta se va entonces del valor $s = 0$ en $t = 0$ al valor $s = s_f$ (longitud de la ruta) en $t = t_f$. La ley de tiempo a lo largo de la ruta se describe mediante la función $s(t)$. Para encontrar una expresión analítica para $s(t)$, puede emplearse cualquiera de los métodos para la generación de las trayectorias articulares que se describen arriba. En particular, puede elegirse un polinomio cúbico o una secuencia de segmentos lineales con mezclas parabólicas para $s(t)$. Vale la pena hacer algunos comentarios sobre la evolución de tiempo de \mathbf{p} en Γ para una ley de tiempo determinada $s(t)$. La velocidad del punto \mathbf{p} se define por la derivada del tiempo de \mathbf{p}

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{s} \mathbf{t} \quad (11.25)$$

donde \mathbf{t} es el vector tangente a la ruta en el punto \mathbf{p} en la ecuación (11.17). Entonces, \dot{s} representa la magnitud del vector de velocidad relativa al punto \mathbf{p} , tomado con el signo positivo o negativo, dependiendo de la dirección de $\dot{\mathbf{p}}$ a lo largo de \mathbf{t} . La magnitud de $\dot{\mathbf{p}}$ inicia desde cero en $t = 0$, luego varía con un perfil parabólico o trapezoidal según cualquiera de las opciones antes mencionadas para $s(t)$ y finalmente regresa a cero en $t = t_f$.

Ejemplo 11.6

Velocidad y aceleración para un segmento lineal

Considere el segmento del ejemplo 11.4 que conecta el punto \mathbf{p}_i con el punto \mathbf{p}_f . La representación paramétrica de esta ruta se determina por la ecuación (11.19). La

velocidad y aceleración de \mathbf{p} puede calcularse fácilmente recordando la regla de diferenciación de funciones compuestas, es decir,

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\dot{s}}{\|\delta_p\|} \delta_p = \dot{s} \mathbf{t}; \text{ y } \ddot{\mathbf{p}} = \frac{\ddot{s}}{\|\delta_p\|} \delta_p = \ddot{s} \mathbf{t} \quad (11.26)$$

donde el vector δ_p se define según la ecuación (11.19).

Ejemplo 11.7

Velocidad y aceleración para un círculo

Aquí, considere un círculo Γ en el espacio. Según la representación paramétrica que se derivó en la ecuación (11.24), la velocidad y la aceleración del punto \mathbf{p} en el círculo son:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ \dot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix}; \text{ y } \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} \dot{s}^2 \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) - \ddot{s} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ -\frac{1}{\rho} \dot{s}^2 \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) + \ddot{s} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.27)$$

Observe que el vector de velocidad se alinea con \mathbf{t} y el vector de aceleración se determina por dos contribuciones: la primera se alinea con \mathbf{n} y representa la aceleración centrípeta, mientras que la segunda se alinea con \mathbf{t} y representa la aceleración tangencial.

11.3.3 Orientación

Considere ahora la orientación del efector final. Normalmente esto se especifica en términos de la matriz de rotación del sistema de referencia del efector final (con variación del tiempo) respecto al sistema de referencia de base. Como bien se sabe, las tres columnas de la matriz de rotación representan los tres vectores unitarios del sistema de referencia del efector final (\mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{a}) expresados en el sistema de referencia de base. Para generar una trayectoria, sin embargo, no es conveniente referirse a la matriz de rotación para caracterizar la orientación. Por ejemplo, una interpolación lineal sobre los vectores unitarios \mathbf{n} , \mathbf{s} , \mathbf{a} que describen la orientación inicial y final no garantiza la ortonormalidad de los vectores mencionados en cada instante de tiempo. En vista de la dificultad mencionada, la orientación se describe para propósitos de generación de las trayectorias en términos del ángulo triple $\phi \equiv [\phi, \theta, \psi]^T$; es decir, los ángulos de Euler ZYZ, para los cuales puede especificarse una ley de tiempo. Usualmente, ϕ se mueve a lo largo del segmento que conecta su valor inicial ϕ_i a su valor final ϕ_f . En este caso, también es conveniente elegir un polinomio cúbico o un segmento lineal con la ley de tiempo de combinaciones parabólicas. Para ϕ_i y ϕ_f determinados, los perfiles de posición, velocidad y aceleración son:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_i + \frac{s}{\|\delta_\phi\|} \delta_\phi; \dot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\dot{s}}{\|\delta_\phi\|} \delta_\phi \text{ y } \ddot{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\ddot{s}}{\|\delta_\phi\|} \delta_\phi \quad (11.28)$$

donde $\delta_\phi \equiv \phi_f - \phi_i$, y la ley de tiempo para s tiene que especificarse. Los tres vectores unitarios del sistema de referencia del efector final pueden calcularse —con referencia a los ángulos de Euler ZYZ— como en la ecuación (5.31e), la velocidad angular del sistema de referencia del efector final como en la ecuación (6.39) y la aceleración angular mediante la diferenciación de la propia ecuación (6.39). Una forma alternativa para generar una trayectoria para la orientación de una interpretación más clara en el espacio cartesiano puede derivarse cuando se recurre al método del eje equivalente de rotación que se presentó en la sección 11.2. Determinados dos sistemas de coordenadas en el espacio cartesiano con el mismo origen y diferente orientación, siempre es posible determinar un vector unitario \mathbf{e} , de tal modo que el segundo sistema puede obtenerse a partir del primer sistema mediante la rotación de la magnitud α alrededor del eje de este vector unitario. Si \mathbf{Q}_i y \mathbf{Q}_f denotan, respectivamente, las matrices de rotación del sistema de referencia inicial $O_i-X_iY_iZ_i$ y el sistema final $O_f-X_fY_fZ_f$, ambos respecto al sistema de referencia base, la matriz de rotación entre las dos sistemas puede calcularse si se recuerda que $\mathbf{Q}_f = \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}$, la ecuación (5.19), permite escribir

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_i^T \mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

Si la matriz $\tilde{\mathbf{Q}}$ se define para describir la transición de \mathbf{Q}_i a \mathbf{Q}_f , debe ser $\tilde{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{1}$ y $\tilde{\mathbf{Q}}(t_f) = \mathbf{Q}_f$. Por lo tanto, la matriz \mathbf{Q} puede expresarse como la matriz de rotación alrededor de un eje fijo en el espacio; el vector unitario \mathbf{e} del eje y el ángulo de rotación α pueden calcularse usando el ejemplo 11.3, es decir,

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{q_{11} + q_{22} + q_{33} - 1}{2} \right), \text{ y } \mathbf{e} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \begin{bmatrix} q_{32} - q_{23} \\ q_{13} - q_{31} \\ q_{21} - q_{12} \end{bmatrix} \quad (11.29)$$

para $\sin \alpha \neq 0$. La matriz $\tilde{\mathbf{Q}}$ puede interpretarse como una matriz $\mathbf{Q}(\alpha)$ y puede calcularse mediante la ecuación (11.14). Luego es suficiente asignar una ley de tiempo a α , del tipo de las que se presentan para la articulación sencilla con $\alpha(0) = 0$ y $\alpha(t_f) = \alpha$, y el cálculo de los componentes e_x, e_y, e_z del vector unitario del eje fijo según la ecuación (11.29). Por ende,

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_i \mathbf{Q}(\alpha)$$

representa la matriz de rotación que describe la orientación del efector final como una función de tiempo respecto al sistema de referencia base. Una vez que se hayan especificado una ruta y una trayectoria en el espacio operacional en términos de \mathbf{p} y ϕ o $\tilde{\mathbf{Q}}$, pueden usarse técnicas de cinemática inversa para encontrar las trayectorias correspondientes en el espacio articular θ .

11.4



Planeación de punto a punto

En el *movimiento de punto a punto*, el manipulador tiene que moverse desde la configuración articular inicial hasta la final dentro de un tiempo determinado t_f . En este caso, la

ruta real del efector final no es importante. El algoritmo deberá generar una trayectoria que, respecto a los requerimientos generales mencionados, también será capaz de optimizar algún índice de desempeño cuando se mueve la articulación de una posición a otra. Una sugerencia para la selección de la primitiva de movimiento podrá derivarse del análisis de un problema de movimiento incremental. Si I es el momento de inercia para un cuerpo rígido alrededor de su eje de rotación, se requiere tomar el ángulo desde un valor inicial θ_i hasta un valor final θ_f en el tiempo t_f . Es obvio que existen soluciones infinitas para este problema. Suponiendo que la rotación se ejecute mediante un par de torsión τ proporcionado por un motor, puede encontrarse una solución que minimiza la energía disipada por el motor. Este problema de optimización puede formalizarse como sigue: colocar $\dot{\theta} = \omega$ determina la solución para la ecuación diferencial

$$I\dot{\omega} = \tau \quad (11.30a)$$

sujeta a la condición

$$\int_0^{t_f} \omega(t) dt = \theta_f - \theta_i \quad (11.30b)$$

de tal modo que se minimice el índice de desempeño

$$\int_0^{t_f} \tau^2(t) dt \quad (11.30c)$$

Puede demostrarse que la solución resultante es del tipo

$$\omega(t) = at^2 + bt + c \quad (11.30d)$$

Aunque la dinámica de articulaciones o articular no puede describirse de la manera simple mencionada, la elección de una función polinomial de tercer orden para generar una trayectoria de articulación representa una solución válida para el problema en estudio. Por lo tanto, a fin de determinar un movimiento de articulación, puede elegirse el polinomio cúbico

$$\theta(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad (11.31a)$$

que da como resultado perfiles de velocidad parabólica y aceleración lineal, a saber,

$$\dot{\theta}(t) = 3a_3 t^2 + 2a_2 t + a_1; \text{ y } \ddot{\theta}(t) = 6a_3 t + 2a_2 \quad (11.31b)$$

Puesto que cuatro coeficientes están disponibles, es posible imponer, aparte de los valores de posición de articulación inicial y final θ_i y θ_f , también los valores de velocidad de articulación inicial y final $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\theta}_f$ que usualmente se ponen en cero. La determinación de una trayectoria específica se determina por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

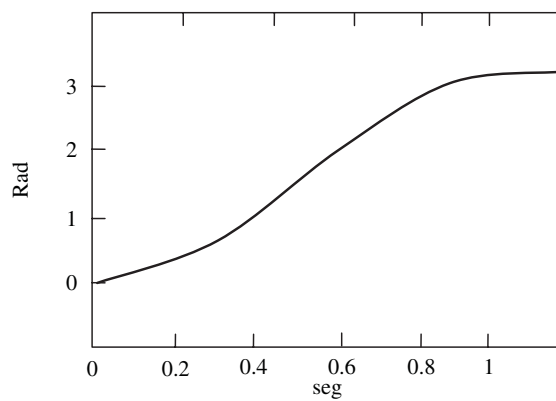
$$a_0 = \theta_i; a_1 = \dot{\theta}_i; a_3 t_f^3 + a_2 t_f^2 + a_1 t_f + a_0 = \theta_f; \text{ y } 3a_3 t_f^2 + 2a_2 t_f + a_1 = \dot{\theta}_f \quad (11.31c)$$

que permite calcular el resultado de los coeficientes del polinomio en una ecuación (11.31a). La figura 11.12 ilustra la ley de tiempo obtenida por medio de los siguientes datos: $\theta_i = 0$,

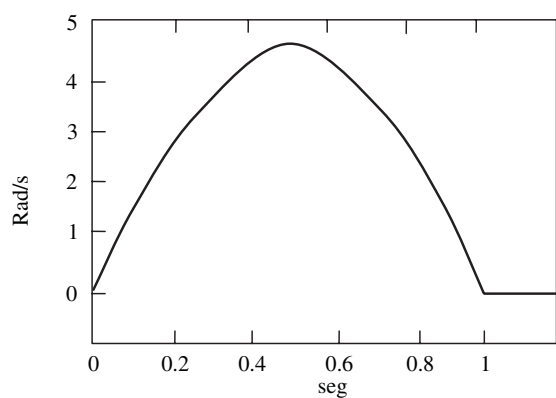


Aplicación de movimiento PTP

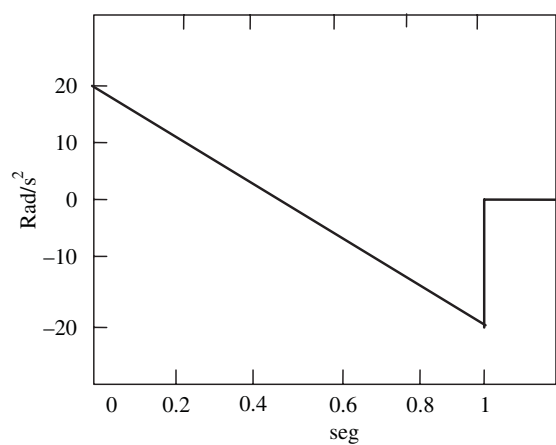
Aquella donde se requieren operaciones de recoger y colocar, por ejemplo, tomar una pieza de trabajo de una banda transportadora y colocarla sobre una mesa de maquinado para su procesamiento.



a) Posición



b) Velocidad



c) Aceleración

Figura 11.12 Historiales de tiempo con un polinomio cúbico

$\theta_f = \pi$, $t_f = 1$ y $\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_f = 0$. Como se esperaba, la velocidad tiene un perfil parabólico, mientras que la aceleración tiene un perfil lineal con discontinuidad inicial y final. Si se desea asignar también los valores iniciales y finales de aceleración, tienen que cumplirse seis restricciones y luego se necesita un polinomio de por lo menos *quinto* orden, como se obtiene en la sección 11.1. Un planteamiento alternativo con leyes de tiempo del tipo polinomial mixto se adopta frecuentemente en la práctica industrial, lo que permite la verificación directa si las velocidades y aceleraciones resultantes pueden soportarse por el manipulador mecánico polinomial.

En este caso, se asigna un perfil de velocidad trapezoidal que impone una aceleración constante en la fase de arranque, una velocidad y una desaceleración constantes en la fase de llegada. La trayectoria resultante se forma por un segmento lineal conectado por dos segmentos parabólicos en su posición inicial y final. Como puede verse en los perfiles de velocidad de la figura 11.13, se supone que tanto la velocidad inicial como la final son nulas y los segmentos con aceleraciones constantes tienen la misma duración de tiempo; esto implica una magnitud igual $\ddot{\theta}_c$ en los dos segmentos. Observe también que la elección de arriba conduce a una trayectoria simétrica con respecto al punto promedio $\theta_m = (\theta_f + \theta_i)/2$ en $t_m = t_f/2$. La trayectoria deberá cumplir con algunas restricciones con el fin de asegurar

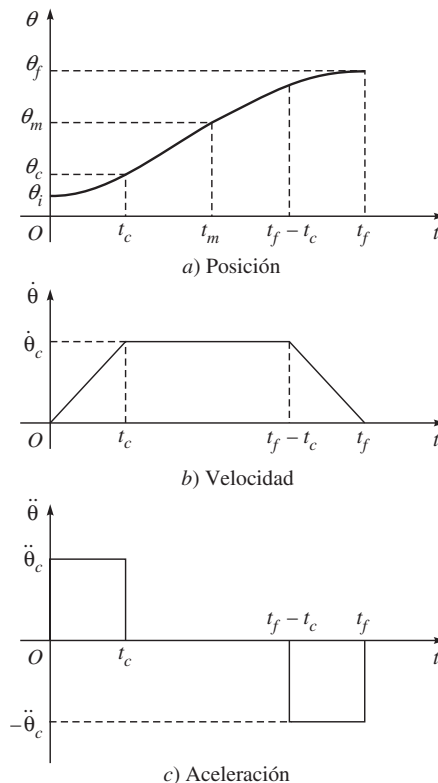


Figura 11.13 Ley de tiempo con un perfil de velocidad trapezoidal

la transición de θ_i a θ_f en el tiempo t_f . La velocidad al final del segmento parabólico debe ser igual a la velocidad (constante) del segmento lineal, es decir,

$$\ddot{\theta}_c t_c = \frac{\theta_m - \theta_c}{t_m - t_c} \quad (11.32a)$$

donde θ_c es el valor alcanzado por la variable articular al final del segmento parabólico al tiempo t_c con la aceleración constante $\ddot{\theta}_c$ (observe que $\dot{\theta}(0) = 0$). Es entonces

$$\theta_c = \theta_i + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_c t_c^2 \quad (11.32b)$$

La combinación de las ecuaciones (11.32 a y b) proporciona

$$\ddot{\theta}_c t_c^2 - \ddot{\theta}_c t_f t_c + \theta_f - \theta_i = 0 \quad (11.32c)$$

Usualmente, $\ddot{\theta}_c$ se especifica y entonces, para t_f , θ_i y θ_f determinado, la solución para t_c se calcula, según la ecuación (11.32c), como ($t_c \leq t_f/2$)

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{\theta}_c - 4(\theta_f - \theta_i)}{\ddot{\theta}_c}} \quad (11.33)$$

La aceleración se sujeta entonces a la constante

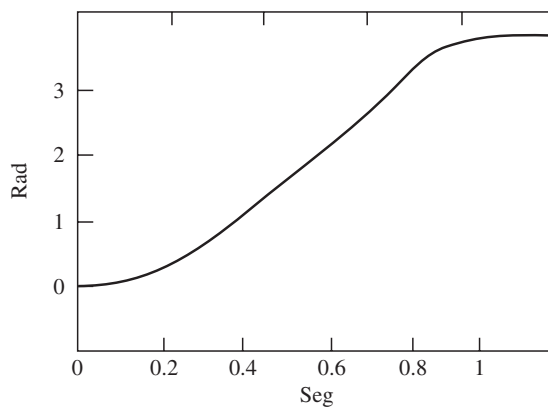
$$|\ddot{\theta}_c| \geq \frac{4|\theta_f - \theta_i|}{t_f^2} \quad (11.34)$$

Cuando la aceleración $\ddot{\theta}_c$ se elige de tal modo que cumple con la ecuación (11.34) con el signo de igualdad, la trayectoria resultante ya no ostenta el segmento de velocidad constante y solamente tiene los segmentos de aceleración y desaceleración (perfil *triangular*). Determinados θ_i , θ_f y t_f y por ende también una velocidad de transición promedio, la ecuación (11.34) permite la imposición de un valor de aceleración consistente con la trayectoria. Luego t_c se calcula según la ecuación (11.33) y se genera la siguiente secuencia de polinomios:

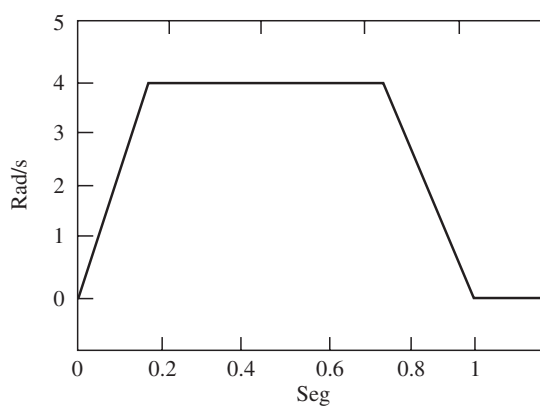
$$\theta(t) = \begin{cases} \theta_i + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ \theta_i + \ddot{\theta}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ \theta_f + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases} \quad (11.35)$$

La figura 11.14 muestra una representación de la ley de tiempo de movimiento obtenida por imponer los datos $\theta_i = 0$, $\theta_f = \pi$, $t_f = 1$, y $|\ddot{\theta}_c| = 6\pi$. La especificación de la aceleración en el segmento parabólico no es la única manera de determinar trayectorias con un perfil de velocidad trapezoidal. Aparte de θ_i , θ_f y t_c , también puede especificarse la velocidad de cruce $\dot{\theta}_c$, que se sujeta a la restricción

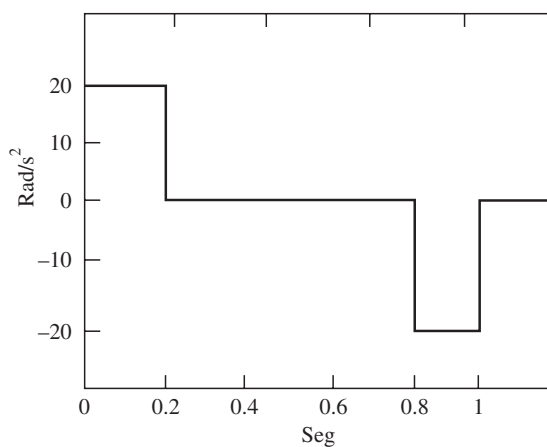
$$\frac{|\theta_f - \theta_i|}{t_f} < |\dot{\theta}_c| \leq \frac{2|\theta_f - \theta_i|}{t_f} \quad (11.36)$$



a) Posición



b) Velocidad



c) Aceleración

Figura 11.14 Historiales de tiempo con el perfil de ley de tiempo de velocidad trapezoidal

Si se reconoce que $\dot{\theta}_c = \ddot{\theta}_c t_c$, la ecuación (11.32) permite que se calcule t_c como

$$t_c = \frac{\theta_i - \theta_f + \dot{\theta}_c t_f}{\dot{\theta}_c} \quad (11.37)$$

y por ende la aceleración resultante es

$$\ddot{\theta}_c = \frac{\dot{\theta}_c^2}{\theta_i - \theta_f + \dot{\theta}_c t_f} \quad (11.38)$$

Los valores calculados de t_c y $\ddot{\theta}_c$ como en las ecuaciones (11.37) y (11.38) permiten la generación de la secuencia de polinomios como queda expresado en la ecuación (11.35). La adopción de un perfil de velocidad trapezoidal da como resultado un peor índice de desempeño en comparación con el polinomio cúbico. La disminución, sin embargo, se limita; el término $\int_0^{t_f} \tau^2 dt$ se incrementa en 12.5% respecto al caso óptimo.

11.5



Generación de ruta continua



Aplicación del movimiento de ruta continua

Donde es necesario el movimiento continuo del efector final a lo largo de una ruta, por ejemplo, al soldar dos tubos.

En varias aplicaciones, la ruta se describe en términos de un número de puntos mayores a dos. Por ejemplo, incluso para el simple movimiento de punto a punto de una tarea de recoger y colocar, podrá valer la pena asignar dos puntos intermedios entre el punto inicial y el punto final. Pueden configurarse posiciones convenientes para levantar y bajar el objeto, por lo que se obtienen velocidades reducidas respecto a la transferencia directa del objeto.

Para aplicaciones más complejas, puede ser conveniente asignar una *secuencia de puntos* con el fin de garantizar un mejor monitoreo de las trayectorias ejecutadas; los puntos deben especificarse con mayor densidad en aquellos segmentos de la ruta donde tienen que evitarse obstáculos o donde se espera una curvatura de ruta alta. No debe olvidarse que las variables articulares correspondientes se calcularon con configuraciones del espacio cartesiano. Por lo tanto, el problema es generar una trayectoria donde N puntos, llamados puntos de ruta, se especifican y el manipulador tiene que alcanzarlos en ciertos instantes de tiempo. Para cada variable articular

- No es posible asignar las velocidades iniciales y finales.
- Conforme aumenta el orden de un polinomio, se incrementa su comportamiento oscilatorio, y esto podrá llevar a trayectorias que no son naturales para el manipulador.
- La precisión numérica para la computación de coeficientes polinómicos disminuye conforme se incrementa el orden.
- El sistema resultante de ecuaciones de restricción es difícil de resolver.
- Los coeficientes polinomiales dependen de todos los puntos asignados; entonces, si se desea cambiar un punto, tienen que volverse a calcular todos.

Estos inconvenientes pueden superarse si se considera un número adecuado de *polinomios de interpolación* de bajo orden, continuos en los puntos de ruta, en lugar de un solo polinomio de orden alto. De acuerdo con la sección anterior, el polinomio de interpolación del orden más bajo es el polinomio cúbico, puesto que permite imponer la continuidad de velocidades en los puntos de ruta. En la variable de una articulación sencilla, se busca una función $\theta(t)$, formada por una secuencia de $N - 1$ polinomios cúbicos $\theta_k(t)$, para $k = 1, \dots, N - 1$, continuo con las primeras derivadas. La función $\theta(t)$ alcanza los valores θ_k para $t = t_k$ ($k = 1, \dots, N$), y $\theta_1 = \theta_0$ en $t_1 = 0$; y $\theta_N = \theta_f$ en $t_N = t_f$; los θ_k representan los puntos de ruta que describen la trayectoria deseada en $t = t_k$, como se muestra en la figura 11.15. Pueden considerarse las siguientes situaciones:

- Valores arbitrarios de $\dot{\theta}(t)$ se imponen en los puntos de ruta.
- Los valores de $\dot{\theta}(t)$ en los puntos de ruta se asignan de acuerdo con ciertos criterios.
- La aceleración $\ddot{\theta}(t)$ será continua en los puntos de ruta.

Para simplificar el problema, también es posible encontrar polinomios de interpolación de un orden menor de tres que determinan trayectorias que pasan junto a los puntos de ruta en los instantes determinados de tiempo.

11.5.1 Polinomios de interpolación con restricciones de velocidad en puntos de ruta

Esta solución requiere que el usuario sea capaz de especificar la velocidad deseada en cada punto de la ruta; la solución no tiene ninguna novedad respecto a los conceptos que se mencionan arriba. El sistema de ecuaciones que permite el cálculo del coeficiente de los $N - 1$ polinomios cúbicos que interpola los N puntos se obtiene mediante la imposición de las siguientes condiciones sobre el polinomio genérico $\rho_k(t)$, interpolando θ_k y θ_{k+1} para $k = 1, \dots, N - 1$:

$$\rho_k(t_k) = \theta_k; \rho_k(t_{k+1}) = \theta_{k+1}; \rho_k(t_k) = \dot{\theta}_k; \rho_k(t_{k+1}) = \dot{\theta}_{k+1} \quad (11.39)$$

El resultado es $N - 1$ sistemas de cuatro ecuaciones en los cuatro coeficientes desconocidos del polinomio genérico; éstos pueden resolverse uno independiente del otro. Las

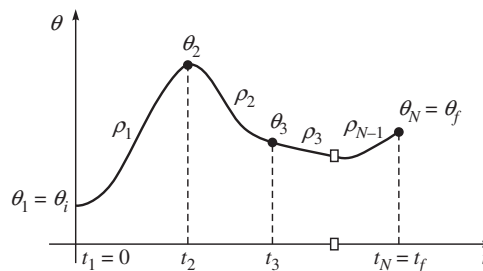


Figura 11.15 Una trayectoria sobre una ruta dada, obtenida por medio de polinomios de interpolación

velocidades iniciales y finales de la trayectoria se ponen normalmente en cero ($\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_N = 0$) y la continuidad de velocidad en los puntos ruta se asegura al poner

$$\dot{\rho}_k(t_{k+1}) = \dot{\rho}_{k+1}(t_{k+1}), \text{ para } k = 1, \dots, N-2 \quad (11.40)$$

La figura 11.6 presenta el historial de tiempo de posición, velocidad y aceleración obtenidas mediante los datos: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, $\theta_3 = \pi/2$, $\theta_4 = \pi$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 5$, $\dot{\theta}_1 = 0$, $\dot{\theta}_2 = \pi$, $\dot{\theta}_3 = -\pi$, y $\dot{\theta}_4 = 0$. Observe la discontinuidad resultante en la aceleración, puesto que sólo se garantiza la continuidad de la velocidad.

11.5.2 Polinomios de interpolación con velocidades calculadas en puntos de ruta

En este caso, tiene que computarse la velocidad de la articulación en una ruta, de acuerdo con ciertos criterios. Mediante la interpolación de los puntos de la ruta con segmentos lineales, pueden calcularse las velocidades relativas conforme a las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= 0 \\ \dot{\theta}_k &= \begin{cases} 0 & \text{sgn}(v_k) \neq \text{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \text{sgn}(v_k) = \text{sgn}(v_{k+1}) \end{cases} \\ \dot{\theta}_N &= 0 \end{aligned} \quad (11.41)$$

donde $v_k = (\theta_k - \theta_{k-1})/(t_k - t_{k-1})$ proporciona la pendiente del segmento en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$. Con la configuración de arriba, la determinación de los polinomios de interpolación se reduce al caso anterior. La figura 11.17 presenta el historial de tiempo de posición, velocidad y aceleración que se obtienen mediante los siguientes datos: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$, $\theta_3 = \pi/2$, $\theta_4 = \pi$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 5$, $\dot{\theta}_1 = 0$, y $\dot{\theta}_4 = 0$. Es fácil darse cuenta que la secuencia impuesta por puntos ruta conduce a tener cero velocidad en los puntos intermedios.

11.5.3 Polinomios de interpolación con aceleración continua en puntos de ruta (*splines*)



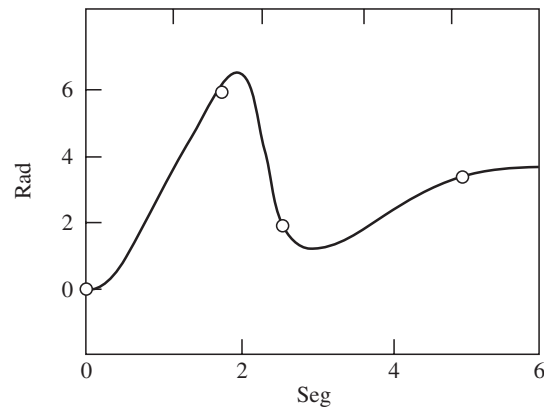
Spline

El término *spline* (*función de empuje suave*) proviene de los bosquejos generados en dibujo, donde los *splines* eran tiras flexibles guiadas por puntos en un papel y que se usaban para dibujar curvas.

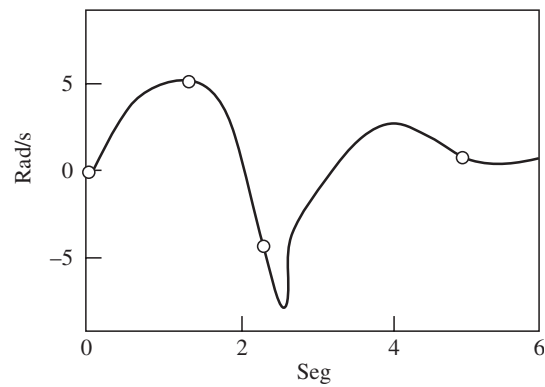
Ninguna de las dos soluciones mencionadas asegura la continuidad de aceleración en los puntos de la ruta. Dada una secuencia de N puntos de ruta, también la aceleración es continua en cada t_k si se imponen cuatro restricciones; a decir: dos restricciones de posición para cada uno de los cúbiclos adyacentes, y dos restricciones que garanticen la continuidad de velocidad y aceleración. Entonces tiene que cumplirse con las siguientes ecuaciones:

$$\rho_{k-1}(t_k) = \theta_k; \rho_{k-1}(t_k) = \rho_k(t_k); \dot{\rho}_{k-1}(t_k) = \dot{\rho}_k(t_k); \text{ y } \ddot{\rho}_{k-1}(t_k) = \ddot{\rho}_k(t_k) \quad 11.42$$

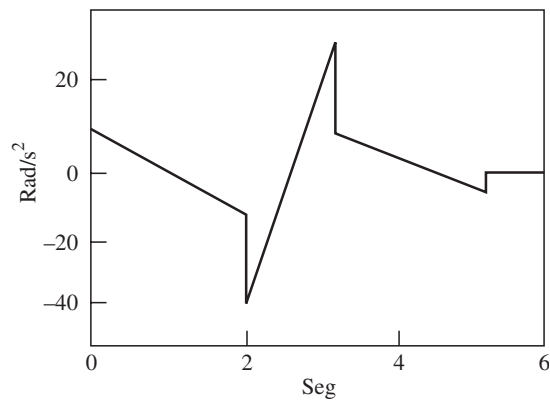
El sistema resultante para los N puntos de la ruta, incluidos los puntos iniciales y finales, no puede resolverse. De hecho, se forma por $4(N-2)$ ecuaciones para los puntos intermedios



a) Posición



b) Velocidad



c) Aceleración

Figura 11.16 Polinomios de interpolación con restricciones de velocidad en puntos de ruta

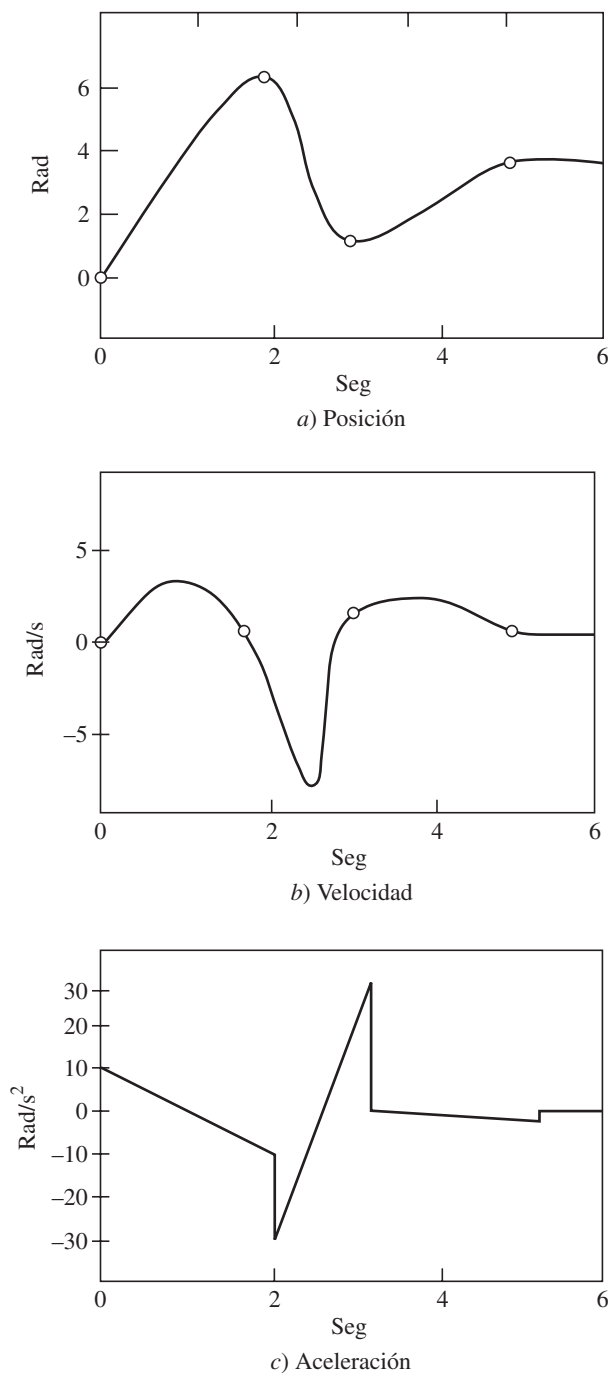


Figura 11.17 Polinomios de interpolación con velocidades calculadas en puntos de ruta

y seis ecuaciones para los puntos externos; las restricciones de posición para los polinomios $\rho_0(t_1) = \theta_i$ y $\rho_N(t_f) = \theta_f$ no deben contarse como polinomios, ya que simplemente son los valores impuestos de las velocidades y aceleraciones iniciales y finales. En suma, se tienen $4N - 2$ ecuaciones en $4(N - 1)$ incógnitas. Sólo puede resolverse el sistema si se eliminan las dos ecuaciones que permiten la asignación arbitraria de los valores de aceleración inicial y final. Deberán usarse polinomios del cuarto orden para incluir esta posibilidad para el primero y último segmentos. Por otro lado, si solamente se han de usar polinomios del tercer orden, puede realizarse el siguiente engaño. Se introducen dos *puntos virtuales* para los cuales pueden imponerse restricciones de continuidad sobre posición, velocidad y aceleración, aunque sin especificar las posiciones reales. Cabe señalar que la ubicación efectiva de estos puntos es relevante, pues sus restricciones de posición se refieren únicamente a la continuidad. Por lo tanto, la introducción de dos puntos virtuales implica la determinación de $N + 1$ polinomios cúbicos. Considere $N + 2$ instantes de tiempo t_k , donde t_2 y t_{N+1} convencionalmente se refieren a los puntos virtuales. El sistema de ecuaciones para determinar los $N + 1$ polinomios cúbicos puede encontrarse si se toman las $4(N - 2)$ ecuaciones:

$$\rho_{k-1}(t_k) = \theta_k; \rho_{k-1}(t_k) = \theta_k(t_k); \dot{\rho}_{k-1}(t_k) = \dot{\theta}_k(t_k); \text{ y } \ddot{\rho}_{k-1}(t_k) = \ddot{\theta}_k(t_k) \quad (11.43)$$

para $k = 3, \dots, N$, escrito para los $N - 2$ puntos de ruta intermedios, las 6 ecuaciones

$$\rho_1(t_1) = \theta_i; \dot{\rho}_1(t_1) = \dot{\theta}_i; \text{ y } \ddot{\rho}_1(t_1) = \ddot{\theta}_i \quad (11.44a)$$

$$\rho_{N+1}(t_{N+2}) = \theta_f; \dot{\rho}_{N+1}(t_{N+2}) = \dot{\theta}_f; \text{ y } \ddot{\rho}_{N+1}(t_{N+2}) = \ddot{\theta}_f \quad (11.44b)$$

escritas para los puntos iniciales y finales y las 6 ecuaciones:

$$\rho_{k-1}(t_k) = \rho_k(t_k); \dot{\rho}_{k-1}(t_k) = \dot{\rho}_k(t_k); \text{ y } \ddot{\rho}_{k-1}(t_k) = \ddot{\rho}_k(t_k) \quad (11.45)$$

para $k = 2, N + 1$, escritas para los dos puntos virtuales. El sistema resultante tiene $4(N + 1)$ ecuaciones en $4(N + 1)$ desconocidas, que son los coeficientes de los $N + 1$ polinomios cúbicos. La solución para el sistema es computacionalmente demandante, incluso para valores bajos de N . No obstante, el problema puede proyectarse en forma conveniente con el fin de resolver el sistema de ecuaciones resultante mediante un algoritmo computacionalmente eficiente. Puesto que el polinomio genérico $\rho_k(t)$ es cúbico, su segunda derivada debe ser una función lineal de tiempo que luego puede escribirse como

$$\ddot{\rho}_k(t) = \frac{\ddot{\rho}_k(t_k)}{\Delta t_k} (t_{k+1} - t) + \frac{\ddot{\rho}_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} (t - t_k) \quad k = 1, \dots, N + 1 \quad (11.46)$$

donde $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ indica el intervalo por alcanzar θ_{k+1} a partir de θ_k . Mediante la doble integración de la ecuación (11.46) a través del tiempo, puede escribirse el polinomio genérico como

$$\begin{aligned} \rho_k(t) = & \frac{\ddot{\rho}_k(t_k)}{6\Delta t_k} (t_{k+1} - t)^3 + \frac{\ddot{\rho}_k(t_{k+1})}{6\Delta t_k} (t - t_k)^3 + \left(\frac{\rho_k(t_{k+1})}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\rho}_k(t_{k+1})}{6} \right) (t - t_k) \\ & + \left(\frac{\rho_k(t_k)}{\Delta t_k} - \frac{\Delta t_k \ddot{\rho}_k(t_k)}{6} \right) (t_{k+1} - t) \end{aligned} \quad (11.47)$$

para $k = 1, \dots, N + 1$ que depende de las 4 incógnitas $\rho_k(t_k)$, $\rho_k(t_{k+1})$, $\ddot{\rho}_k(t_k)$ y $\ddot{\rho}_k(t_{k+1})$. Observe que las N variables θ_k para $k \neq 2, N + 1$ se determinan mediante la ecuación (11.39), mientras se impone continuidad para θ_2 y θ_{N+1} por medio de la ecuación (11.42). Usando las ecuaciones (11.42) y (11.44), se reducen las incógnitas en $N + 1$ ecuación (11.47) a $2(N + 2)$. Por medio de la observación de que la ecuación (11.44) depende de θ_2 y θ_{N+1} y que $\dot{\theta}_i$ y $\dot{\theta}_f$ se determinan, θ_2 y θ_{N+1} pueden computarse como una función de $\ddot{\rho}_1(t_1)$ y $\ddot{\rho}_{N+1}(t_{N+2})$, respectivamente. Por lo tanto, queda un número de $2(N + 1)$ incógnitas. Tomando en cuenta las ecuaciones (11.42) y (11.45) y sin tomar en cuenta que en la ecuación (11.44) $\ddot{\theta}_i$ y $\ddot{\theta}_f$ se determinan, las incógnitas se reducen a N . En este punto pueden utilizarse las ecuaciones (11.42) y (11.45) para escribir el sistema de N ecuaciones en N incógnitas:

$$\dot{\rho}_1(t_2) = \dot{\rho}_2(t_2); \dots; \dot{\rho}_N(t_{N+1}) = \dot{\rho}_{N+1}(t_{N+1}) \quad (11.48)$$

La diferenciación del tiempo de la ecuación (11.47) da tanto $\dot{\rho}_k(t_{k+1})$ como $\dot{\rho}_{k+1}(t_{k+1})$ para $k = 1, \dots, N$ y, por lo tanto, es posible escribir un sistema de ecuaciones lineales del tipo

$$\mathbf{A}[\ddot{\rho}_2(t_2) \dots \ddot{\rho}_{N+1}(t_{N+1})]^T = \mathbf{b} \quad (11.49)$$

que presenta un vector \mathbf{b} de términos conocidos y una matriz de coeficiente no singular \mathbf{A} ; la solución para este sistema siempre existe y es única. Puede demostrarse que la matriz \mathbf{A} tiene una estructura de banda tridiagonal del tipo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{23} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (11.50)$$

que simplifica la solución para el sistema. Esta matriz es la misma para todas las articulaciones, ya que depende solamente de los intervalos Δt_k especificados. Existe un eficiente algoritmo de solución para el mencionado sistema, que se determina por un cálculo *directo* seguido por un cálculo *inverso*. Según la primera ecuación, $\ddot{\rho}_2(t_2)$ puede calcularse como función de $\ddot{\rho}_3(t_3)$ y luego se sustituye en la segunda ecuación que entonces se vuelve una ecuación de las incógnitas $\ddot{\rho}_3(t_3)$ y $\ddot{\rho}_4(t_4)$. Esto se realiza en forma directa mediante la transformación de todas las ecuaciones a ecuaciones con dos incógnitas, excepto la última que tendrá a $\ddot{\rho}_{N+1}(t_{N+1})$ como única incógnita. En este punto pueden determinarse todas las incógnitas paso a paso por medio de un cálculo inverso. La secuencia arriba mencionada de polinomios cúbicos se llama *spline* para indicar las funciones continuas que interpolan una secuencia de puntos determinados, asegurando la continuidad de la función y sus derivadas.

La figura 11.18 ilustra el historial de tiempo de posición, velocidad y aceleración obtenido mediante los datos $\theta_1 = 0$, $\theta_3 = 2\pi$, $\theta_4 = \pi/2$, $\theta_6 = \pi$, $t_1 = 0$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_6 = 5$, $\dot{\theta}_1$ y $\dot{\theta}_6 = 0$. Dos diferentes pares de puntos virtuales fueron considerados en los instantes de tiempo: $t_2 = 0.5$, $t_5 = 4.5$ (la línea continua en la figura) y $t_2 = 1.5$, $t_5 = 3.5$ (la línea punteada en la figura), respectivamente. Observe el perfil de velocidad parabólica y el perfil de aceleración lineal. Además, para el segundo par, se obtienen valores de aceleración más grandes, ya que los instantes de tiempo relativos son más cercanos a los dos puntos intermedios.

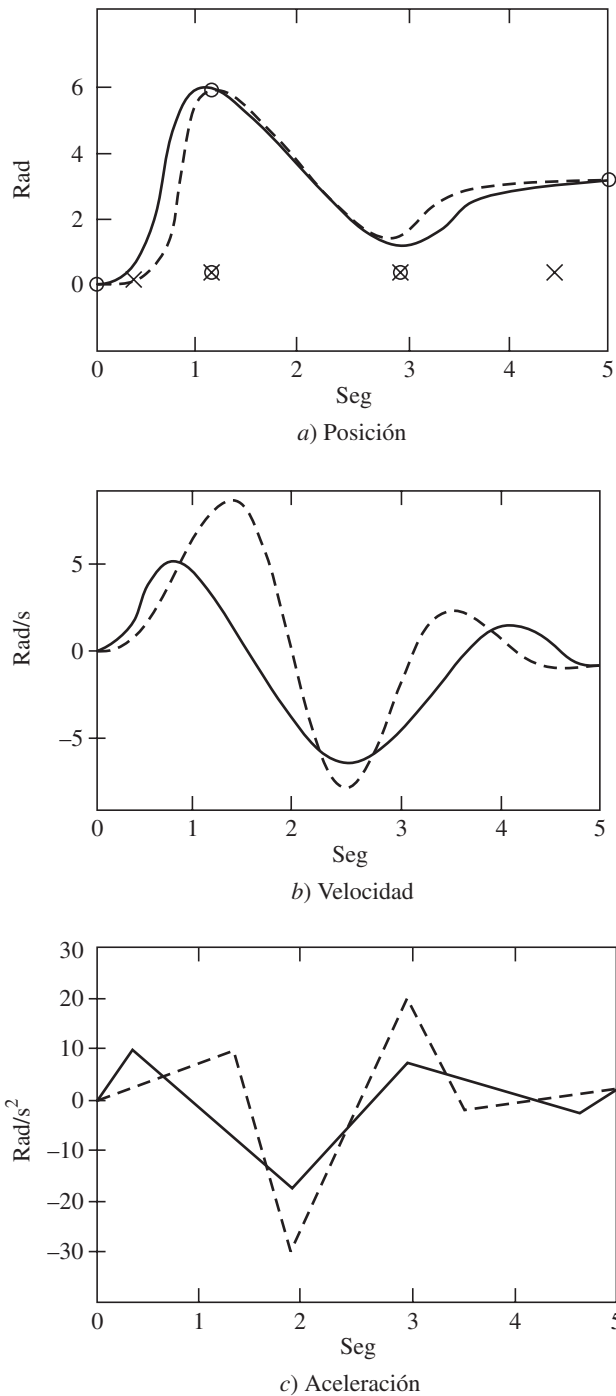


Figura 11.18 Splines cúbicos para dos diferentes pares de puntos virtuales

RESUMEN

En este capítulo se presentan varias técnicas de planeación de movimientos. También se analizan trayectorias del espacio articulares y del espacio cartesiano que pueden seguirse por los actuadores articulares y por el efector final, respectivamente. Aparte de las operaciones de levantar y colocar, también se presenta la planeación de movimiento continuo en aplicaciones como la soldadura o el evitar obstáculos.



EJERCICIOS

- 11.1 Se desea que se mueva la primera articulación de un robot de seis ejes desde la posición inicial $\theta_0 = 15^\circ$ hasta la posición final $\theta_f = 75^\circ$ en 3 segundos usando un polinomio cúbico.
- Determine la trayectoria.
 - Calcule el ángulo articular a 2 segundos.
 - Comente acerca de sus velocidades y aceleraciones del punto final.
 - Compare el resultado presente con los que se obtuvieron en el ejemplo 11.1.
- 11.2 Repita el problema del ejercicio 11.1, pero esta vez con la aceleración inicial y la desaceleración final especificados como $5^\circ/\text{s}^2$.
- 11.3 Un robot planar de dos grados de libertad debe seguir una línea recta entre los puntos de inicio (3.10) cm y final (8.15) cm del segmento de movimiento. Busque la variable de articulación para el robot si la ruta se divide en 5 segmentos. Suponga que cada eslabón tiene una longitud de 10 cm.
- 11.4 Busque los coeficientes de dos polinomios cúbicos que están conectados en un *spline* de dos segmentos con aceleración continua en los puntos de vía intermedios.
- 11.5 Una sola trayectoria cúbica se determina por

$$\theta(t) = 10 + 90t^2 - 60t^3$$

que se utiliza entre $t = 0$ y 1 seg. ¿Cuáles son las posiciones, velocidades y aceleraciones iniciales y finales?

- 11.6 Busque los coeficientes de un polinomio cúbico

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$$

cuando $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\ddot{\theta}(0)$, y $\theta(t_f)$ se especifican.

- 11.7 Una articulación giratoria se mueve desde -150° hasta $+450^\circ$ en 4 segundos. Determine una trayectoria polinómica continua si las velocidades y aceleraciones iniciales y finales son cero. ¿Cuál es el orden del polinomio?
- 11.8 Para un manipulador de 3 grados de libertad, diseñe una combinación con una trayectoria lineal y con una trayectoria parabólica. La orientación inicial y final

del efector final, denotada por \mathbf{Q}_i y \mathbf{Q}_f , respectivamente, se especifica mediante las siguientes matrices:

$$\mathbf{Q}_i \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{Q}_f \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 11.9 El perfil de velocidad de una trayectoria es trapezoidal con un segmento de aceleración constante para 0.5 segundos y una velocidad constante de $10^\circ/\text{seg}$. Determine los parámetros de la trayectoria continua para interpolar la secuencia de tiempo de la posición con este tipo de trayectoria.



EJERCICIOS BASADOS EN MATLAB

- 11.10 Grafique posiciones, velocidades y aceleraciones para la trayectoria determinada en el ejercicio 11.5. Utilice 100 pasos entre $t = 0$ y 1 seg.
- 11.11 Para el ejercicio 11.6, busque los valores numéricos de los coeficientes mediante la formulación del problema como una ecuación algebraica lineal en la forma de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{x} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T$. Grafique $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, $\ddot{\theta}(0) = 0$, $\theta(t_f) = 30^\circ$ y $t_f = 5$ seg. Grafique $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.
- 11.12 Determine los coeficientes de un polinomio de quinto grado, formulando el problema como una ecuación algebraica lineal en la forma de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{x} \equiv [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5]^T$, y $\theta(0) = 0$, $\theta(t_f) = 30^\circ$, $\dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(t_f) = \ddot{\theta}(t_f) = 0$, $t_f = 5$ seg. Grafique $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\ddot{\theta}(t)$.
- 11.13 Grafique los diagramas de posición, velocidad y aceleración del ejercicio 11.9.



Capítulo

12

Computadoras para robots

En este capítulo se analizará la interfaz entre el usuario (humano) y el robot. Normalmente, es por medio de la interfaz de la computadora como el usuario aprovecha todos los algoritmos de mecánica y control. En los capítulos anteriores se presentó un número de algoritmos asociados con cinemática, dinámica y control del sistema robótico. Muchos de estos cálculos tienen restricciones de tiempo real porque deben completarse dentro de un corto periodo (por decir, 15 milisegundos). Adicionalmente, estos cálculos son a menudo complejos e involucran la evaluación de funciones trigonométricas, la multiplicación o inversión de matrices o el procesamiento de grandes cantidades de datos, como los de una fotografía.

12.1



Velocidad de computación

Existe un número de algoritmos para controlar los diferentes aspectos de los movimientos de un robot, para los cuales se demostrará cómo pueden ejecutarse los cálculos complejos en estos algoritmos dentro de un tiempo corto. También se presentarán maneras de organizar el software y el hardware para cumplir con los objetivos.

12.1.1 Agilización de software

En esta subsección se abordarán técnicas para aumentar la velocidad de cálculo en una computadora convencional. Estas técnicas aprovechan las propiedades únicas de muchos cálculos que son necesarios para el control de robots.

i) El uso de la aritmética de números enteros Aquí los números serán representados como enteros y se evitará el uso de representación de puntos flotantes (“reales”). Esto puede lograrse mediante una técnica que se conoce como escalamiento, donde un número fraccional, por ejemplo 22.75, se representa por un número entero 2275, multiplicado o escalado por una constante 1/100. Se descubre que si el escalamiento es constante, puede obtenerse una ventaja considerable de velocidad sobre el punto flotante. Aun con la introducción de procesadores flotantes de alta velocidad, la aritmética de números enteros es normalmente 5 a 10 veces más rápida que la del punto flotante. Además, usando pura aritmética de números enteros, todavía pueden manejarse valores fraccionarios. Antes de usar esta técnica, tiene que asegurarse de que la pérdida de precisión inherente al escalamiento no impactará seriamente el desempeño del robot.



El requerimiento de velocidad de computación

La velocidad de computación deberá ser menor que la capacidad de velocidad de un robot.

ii) La computación de funciones trigonométricas En los sistemas de computación comercial, las funciones trigonométricas se evalúan por medio de varias técnicas, incluidas funciones racionales o polinomios de Chebychev. La aritmética involucrada se hace usualmente con punto flotante, lo que resulta en alta precisión y baja velocidad. En aplicaciones robóticas, sin embargo, el mecanismo más apropiado para computar funciones trigonométricas es mediante la consulta de tablas. Por ejemplo, los valores de $\sin \theta$ se guardan simplemente en una tabla para $\theta = 0 \dots 89$ grados. Esta tabla de 90 palabras proporciona al instante el valor del seno de un ángulo con una precisión de 1° . De hecho, las 90 palabras requieren de menos memoria que la que necesita un programa para computar la función en forma explícita. Si se requiere una precisión más alta que el grado más cercano, existen dos opciones. La primera es la interpolación lineal entre las entradas de la tabla. Puesto que las funciones de seno y coseno son bastante lineales entre intervalos de 1° , la interpolación rinde excelentes resultados. Otra técnica de interpolación hace uso de la identidad trigonométrica para el seno de dos ángulos sumados, es decir,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (12.1)$$

El ángulo se segmenta en dos partes, un número entero α y una fracción β . Luego se aplica la ecuación (12.1). La evaluación exacta de la ecuación (12.1) requiere después cuatro consultas de tabla para los valores de $\sin \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \alpha$ y $\sin \beta$, dos multiplicaciones y una suma. Una evaluación aproximada puede obtenerse aún más rápido. Para ello, el ángulo se escala de tal manera que la parte fraccionaria es muy pequeña. Supongamos que β es la parte fraccionaria, entonces

$$\cos \beta = 1, \text{ y } \sin \beta = \beta \quad (12.2)$$

Esto queda numéricamente ilustrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.1

El valor de $\sin(0.8034)$

Suponga que los valores de la función de seno son tabulados en incrementos de 0.01 rad, es decir, que los valores de $\sin(0.80)$ y $\sin(0.81)$, etc., son conocidos, entonces puede escribirse

$$0.8034 \text{ rad} = 0.8 \text{ rad} + 0.0034 \text{ rad} \quad (12.3a)$$

Luego, usando la ecuación (12.3a), puede escribirse la ecuación (12.1) como

$$\sin(0.8034) = \sin(0.80) \cos(0.0034) + \cos(0.80) \sin(0.0034) \quad (12.3b)$$

Para el ángulo muy pequeño de 0.0034 rad, $\cos(0.0034) = 1$ y $\sin(0.0034) = 0.0034$. Por ende,

$$\sin(0.8034) = \sin(0.80) + 0.0034 \cos(0.80) \quad (12.3c)$$

donde $\sin(0.80)$ y $\cos(0.80)$ están disponibles en los resultados tabulados. Esta técnica de interpolación requiere solamente dos consultas de tabla, una multiplicación y una suma. Observe que en la implementación real para un sistema robótico, el cálculo de funciones trigonométricas es de los más rápidos.

iii) Operaciones de matriz En el control de robots, por lo general no se requiere la inversión de una matriz en forma explícita, sino, más bien, se resuelve un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales, lo que se realiza en forma numérica. En caso de que tenga que computarse una inversión explícita, esto se hace en forma numérica mediante la resolución de una serie de ecuaciones algebraicas lineales cuyos lados derechos son las columnas de una matriz identidad mientras que las incógnitas correspondientes son la columna de la inversa deseada. Por ejemplo, si una matriz \mathbf{X} de $n \times n$ es la inversa de la matriz \mathbf{J} de $n \times n$, es decir, $\mathbf{X} = \mathbf{J}^{-1}$, entonces sólo tienen que resolverse n ecuaciones algebraicas lineales n veces basados en el hecho de que $\mathbf{JX} = \mathbf{1} - \mathbf{1}$ es la matriz de identidad de $n \times n$. Las ecuaciones algebraicas para $i = 1, \dots, n$ son

$$\mathbf{Jx}_i = \mathbf{e}_i, \text{ donde } \mathbf{X} \equiv [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \text{ y } \mathbf{1} \equiv [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n] \quad (12.4)$$

Además, los vectores $\mathbf{x}_j \equiv [x_{1j}, \dots, x_{nj}]^T$ y $\mathbf{e}_j \equiv [e_{ij}]^T$ para $i = 1, \dots, n$ contienen n elementos escalares. Adicionalmente, $e_{ij} = 1$ cuando $i = j$, de otra manera $e_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$. En la literatura del análisis numérico, alta precisión y estabilidad o solidez son importantes, mientras que en la robótica, la velocidad es esencial, mientras que la precisión, aunque sea importante, no es tan difícil de mantener. De este modo, en muchas instancias los métodos simples y rápidos se prefieren ante la complejidad y la alta precisión.

12.1.2 Consideraciones de hardware

La computación distribuida, es decir, el uso de varias computadoras que interactúan en tiempo real para proporcionar la velocidad y potencia computacional requerida, tiene una aplicación inmediata en la robótica. La literatura sobre la computación distribuida es diversa y abundante. Hasta aquí, se ha supuesto que cualquier computación se está realizando mediante una sola computadora de propósito general. Aquí se mostrará cómo utilizar la computación distribuida para realizar dos funciones simples, tales como, la lectura de encoders para obtener información sobre las posiciones así como el cómputo de las señales de servo-error en las articulaciones.

i) Lectura de encoders La velocidad con la que los datos vienen de un encoder depende de la velocidad rotacional de la articulación, de la resolución del encoder y del algoritmo que se usa para el análisis de las señales. Si se supone una codificación de cuadratura (un nuevo conteo para cada uno de los cuatro estados de un encoder incremental), un encoder de 2 500 conteos/revolución y una velocidad máxima de la articulación de una

rev/seg, se encuentra un nuevo pulso de datos en cada 100 μ s. Usando interrupciones, el conjunto mínimo absoluto de instrucciones en cualquier software asociado con la interfaz de la computadora con los encoders sería

```
REGISTER SAVE
BIT TEST
JUMP
INCREMENT (OR DECREMENT)
REGISTER RESTORE
RETURN
```

Este proceso normalmente requeriría aproximadamente 5 a 10 μ s en cualquier computadora. Si la velocidad del procesador se toma como 5 μ s y tienen que controlarse seis articulaciones con máxima velocidad, entonces tan sólo para mantenerse al tanto de las posiciones se requeriría $5 \times 6 = 30 \mu$ s, es decir, 30% de los recursos de la computadora.

ii) La computación de señales de servo-error Por medio de un controlador PD (proporcional-derivativo) tiene que computarse

$$\tau = K_p(\theta_d - \theta) - K_v \dot{\theta} \quad (12.5)$$

donde τ es el vector de los pares de torsión deseados, y θ_d y θ son los ángulos deseado y real de la articulación, respectivamente, mientras que $\dot{\theta}$ es la velocidad real de la articulación. Además, los términos K_p y K_v son las matrices de las ganancias proporcional y derivativa, respectivamente. El programa para implementar este tipo de cálculo es

```
LOAD  $\theta_d$ 
LOAD  $\theta$ 
SUBTRACT
MULTIPLY ( $\theta_d - \theta$ ) BY  $K_p$ 
LOAD  $\dot{\theta}$ 
MULTIPLY  $\dot{\theta}$  BY  $K_v$ 
SUBTRACT
OUTPUT
RETURN
```

De manera optimista, este programa tardaría 15 μ s. Por razones de estabilidad, el servo de la articulación tiene que calcularse aproximadamente cada 2 ms. Este número varía considerablemente según las resonancias estructurales del manipulador. Por lo tanto, el cálculo del servo de articulación para las seis articulaciones andará por el orden de

$$\frac{6 \times 15 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-3}} = 45 \times 10^{-3}$$

es decir, 4.5% de los recursos de la computadora. Estas estimaciones varían tremendamente según los detalles de implementación. La cuestión es, sin embargo, que una cantidad significativa de la computación involucrada en la robótica es sencilla, localizada y fácilmente distribuable entre los elementos de procesamiento.

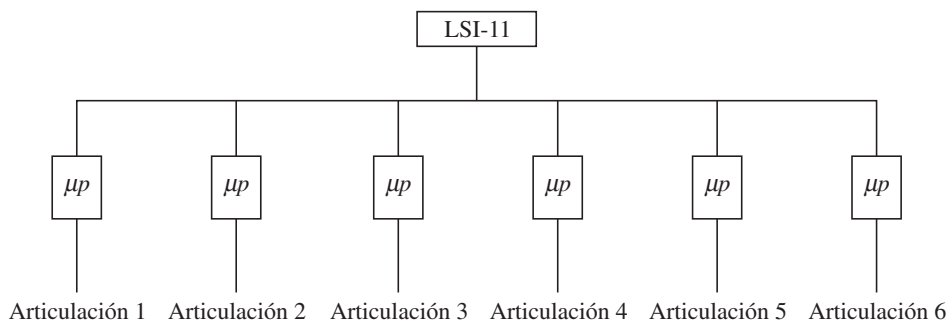


Figura 12.1 Arquitectura PUMA

12.2



Requerimientos de hardware

La arquitectura Unimate PUMA ejemplifica el concepto de distribución por articulación. Esta arquitectura se presenta en la figura 12.1. Se adjunta un procesador separado a los transductores de entrada y salida de cada articulación. Este procesador mantiene la posición angular y la velocidad actual de esta articulación, y la lleva mediante servo hacia el punto de referencia proporcionado por el procesador central. Éste lee la posición angular de los procesadores de las articulaciones, computa las transformaciones cinemáticas y proporciona puntos de referencia a los procesadores de articulaciones.

Debido a que se realiza toda la cinemática en el mismo procesador, la arquitectura proporciona simplicidad de diseño y programación, mientras que descarga el control simultáneo de

las articulaciones a procesadores paralelos. El sistema que se muestra en la figura 12.2 presenta una filosofía arquitectónica alternativa de distribución de computación por función. Tal como el PUMA, este sistema asocia un procesador a cada articulación. Sin embargo, el cálculo de la cinemática también se distribuye. Cada procesador mantiene la posición y velocidad de su articulación, así como también las diferentes funciones trigonométricas de estos parámetros. Estas cantidades



¿Qué es hardware?

El hardware son las cosas físicas, como los circuitos integrados en la forma de chips electrónicos, circuitos eléctricos en tarjetas impresas, etc., que se sienten duros cuando se tocan.

se guardan en una memoria multipuertos y por ende están inmediatamente disponibles para los demás procesadores. El cálculo de los demás términos cinemáticos se distribuye uniformemente entre los procesadores. Este método distribuye la carga computacional de manera más uniforme a costa de una pieza compleja de hardware (la memoria multipuertos 9511) y de software más complejo. Una extensión inmediata y una mejora de esta arquitectura serían como se muestra en la figura 12.3, desasociando el servo-cálculo de la cinemática. La figura 12.3 es, de hecho, la arquitectura PUMA con el único procesador central sustituido por un arreglo de procesadores y memorias comunes. El rápido desarrollo de dispositivos con Integraciones de Gran Escala (LSI) e Integraciones de Muy Gran Escala (VLSI) puede ofrecer aumentos tremendos de rendimiento cuando se combina convenientemente con la computación general. Por ejemplo, el chip AMD 9511 ofrece una capacidad de punto flotante

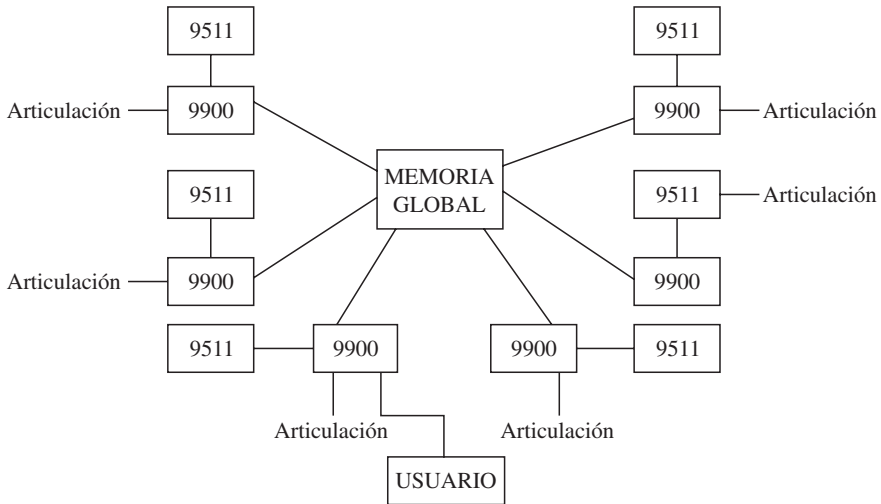


Figura 12.2 Un control de robot distribuido por función y por articulación

te completa de 32 bits y se diseña para una fácil interfaz con el microprocesador de 8 bits. El Intel 8087 ofrece una aritmética de alta velocidad y acoplamiento directo al bus 8086. Empresas como TRW y AMD anuncian chips multiplicadores que realizan multiplicaciones de números enteros de 16 bits en tan sólo unos nanosegundos.

La tecnología de punta cambia tan rápidamente que es una posibilidad real pensar en chips para transformación de coordenadas y un chip que compute el jacobiano e incluso el jacobiano inverso en tiempo real. Estos chips tienen las siguientes características:

- i) Cálculos rápidos y repetitivos (normalmente aquellos que no requieren ramas condicionales).

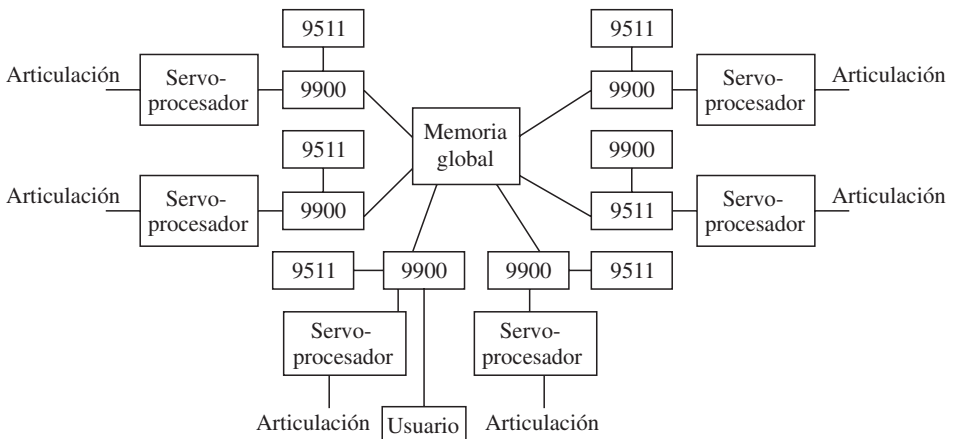


Figura 12.3 Una arquitectura propuesta para desacoplar los servo-cálculos

- ii) Fácil interfaz con un sistema de bus de un procesador universal.
- iii) Control directo por uno de estos procesadores.

12.3



Consideraciones de control

El *sistema de control* para supervisar las actividades de un sistema robótico deberá ser dotado de un número de herramientas que ofrecen las siguientes funciones:

- La capacidad de mover objetos físicos en el ámbito de trabajo, es decir, la habilidad de *manipulación*.
- La capacidad de obtener información sobre el estado del sistema y el ámbito de trabajo, es decir, la habilidad *sensorial*.
- La capacidad de explotar la información para modificar el comportamiento del sistema de manera programada, es decir, la habilidad de comportamiento *inteligente*.
- La capacidad de almacenar, elaborar y proporcionar datos sobre la actividad del sistema, es decir, la habilidad del *procesamiento de datos*.

Una implementación efectiva de estas funciones puede obtenerse por medio de una *arquitectura funcional*, considerando ésta como la supervisión de varios *niveles de actividad* dispuestos en una *estructura jerárquica*. Quizá la mejor manera de entender el término jerárquico es mediante la estructura de mando militar, en la que los generales pasan órdenes a los oficiales, los cuales pasan órdenes a los sargentos quienes pasan órdenes a las tropas. En este tipo de jerarquía, se supone que el control fluye desde arriba hacia abajo, y los reportes supuestamente fluyen desde abajo hacia arriba. Los niveles bajos de la estructura están orientados para la ejecución de movimientos físicos, mientras que los niveles más altos están orientados hacia la planeación lógica de acciones. Los niveles están conectados por el flujo de datos; aquéllos dirigidos hacia los niveles más altos se refieren a mediciones o resultados de acciones, mientras que los que están dirigidos hacia los niveles más bajos se enfocan en la transmisión de directrices.

En cuanto a las funciones del sistema de control que implementan el manejo de las actividades de sistema que se enumeraron arriba, en general, conviene asignar tres *modelos funcionales* a cada nivel. El primer módulo se dedica a la gestión de datos sensoriales (módulo sensorial). El segundo se dedica a proporcionar información relevante del entorno (módulo de modelado). El tercer módulo se dedica a decidir la política de la acción (módulo de decisión). De manera más específica, los *módulos sensoriales* adquieren, elaboran, correlacionan e integran datos sensoriales en tiempo y espacio, con el fin de reconocer y medir los datos del sistema y las características del ambiente. Queda claro que las funciones de cada módulo están orientadas al manejo de los datos sensoriales relevantes de su nivel. Por otro lado, los *módulos de modelado* contienen modelos derivados con base en conocimientos *a priori* del sistema y el ambiente. Estos modelos se actualizan mediante la información que proviene de los módulos sensoriales, mientras que la activación de las funciones requeridas se encarga a los módulos de decisión. Finalmente, los *módulos de decisión* realizan la descomposición de tareas de alto nivel en acciones de nivel bajo. Esta descomposición de tareas tiene que ver tanto con la descomposición en tiempo de acciones secuenciales como con la descomposición en el espacio de acciones simultáneas. Cada módulo de decisión queda encargado de las funciones referentes a la gestión de asignaciones de acción elemental, a la

planeación y a la ejecución de tareas. Las funciones de un módulo de decisión caracterizan el nivel de la jerarquía y determinan las funciones necesarias para los módulos de modelado y sensoriales que operan en el mismo nivel. Esto implica que los contenidos de estos dos módulos no permiten la determinación privilegiada del nivel jerárquico, ya que la misma función podrá estar presente en varios niveles, dependiendo de las necesidades de los módulos de decisión en los niveles de alivio. La arquitectura funcional necesita una *interfaz de operario* en cada nivel de la jerarquía, de tal modo que se permita que un operario realice funciones de supervisión e intervención en el sistema robótico.

Una descomposición jerárquica de una tarea de control, particularmente en la robótica, tiene el mismo sentido. Un ejemplo de este tipo de jerarquía en el control del robot PUMA se vio anteriormente. En este sistema, un procesador central computaba la cinemática y proporcionaba puntos de referencia para los servos de las articulaciones. Algunos diseñadores de sistemas robóticos han planteado sus tareas de manera parecida. Aunque la mayoría de los investigadores estaría de acuerdo con la filosofía básica del control jerárquico, existe una diferencia considerable en los métodos que se usan para implementar la jerarquía. Por ejemplo, el control de un sistema multivariante podrá considerarse en una forma rigurosamente matemática y podrán tratarse de encontrar técnicas óptimas o subóptimas para controlar el sistema entero. Si estas técnicas están correctamente estructuradas, podrán implementarse en una disposición jerárquicamente estructurada de procesadores. Estas descomposiciones matemáticas son el tema de gran parte de la investigación actual en la teoría de control y optimización.

Un sistema robótico avanzado podrá segmentarse en tres módulos distintos, como se muestra en la figura 12.4. El módulo de programa acepta entradas del usuario, de manera interactiva o en la forma de un programa del robot. Esta descripción de tarea se traduce en un conjunto de comandos de nivel inferior, tal vez incluidas ramas condicionales, parecido a la tarea de un compilador que convierte de FORTRAN a un lenguaje máquina. El módulo de ubicación sirve para relacionar nombres y ubicaciones simbólicas, por ejemplo, mordaza, a descripciones cartesianas de puntos en el espacio de trabajo. El módulo de sistema de control es responsable de controlar los movimientos del robot para que pueda lograr las tareas descritas por el módulo de programa en las ubicaciones descritas por el módulo de ubicación. El módulo del sistema de control tiene un requerimiento de tiempo real y tiene que descomponerse más. La figura 12.5 representa una descomposición jerárquica de las funciones de control en tiempo real. El número exacto de niveles en esta descomposición, como también las responsabilidades exactas de cada nivel, son detalles que se ubican en la preocupación del diseñador del sistema y no son importantes en este momento. Sin embargo, existen observaciones muy importantes que tienen que hacerse respecto a la estructura general de la figura 12.5. Primero que nada, en los niveles más altos, las funciones de control son independientes de la geometría del brazo. Esto quiere decir que la determinación de la trayectoria se realiza en coordenadas cartesianas relativas a las restricciones, por lo tanto podrá ser necesario especificar ubicaciones en un sistema coordinado móvil, por ejemplo, en un transportador (lo que significa que el módulo de ubicación debe ser capaz de actualizaciones en tiempo real). Puesto que la descripción de la tarea no requiere el conocimiento de la geometría del robot en esta fase, podrán usarse los mismos algoritmos y software para muchos robots diferentes, tal como FORTRAN puede usarse en cualquier tipo de computadora. En los niveles inferiores de la jerarquía de control, los detalles de los algoritmos se vuelven estrechamente relacionados con la geometría del brazo. Una vez que se hayan realizado las transformaciones cinemáticas,

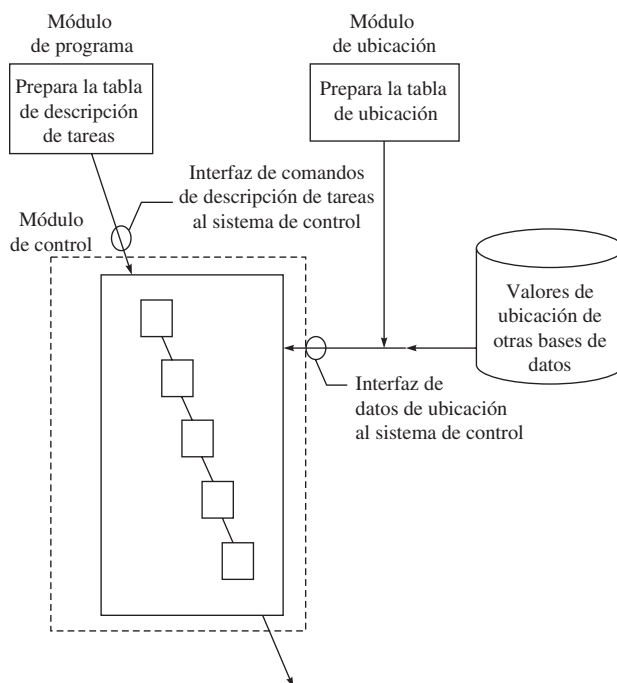


Figura 12.4 Módulos de control jerárquico

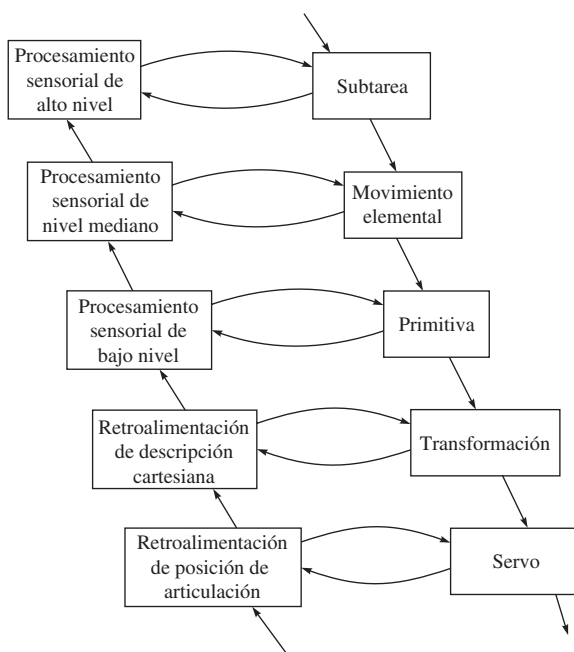


Figura 12.5 Descomposición jerárquica

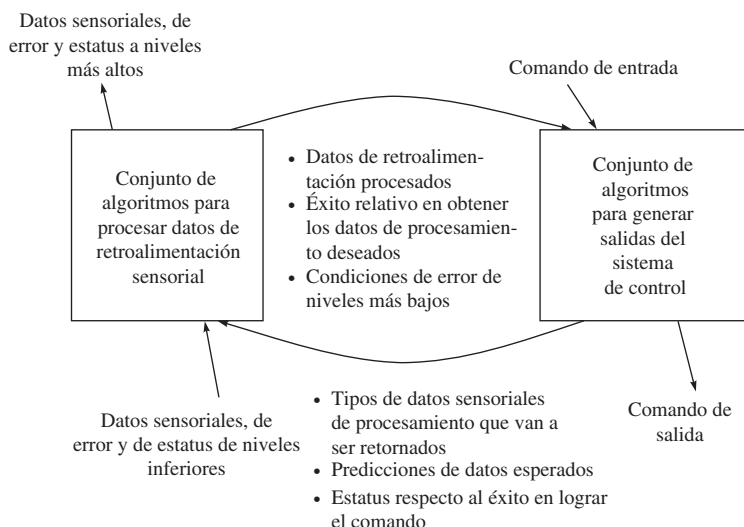


Figura 12.6 Detalles de un solo nivel

el algoritmo de control podrá variar de un robot a otro. Esto se observa en los dos niveles inferiores de la figura 12.5. El nivel más bajo compara puntos de referencia (proporcionados por el nivel siguiente) con posiciones de la articulación (proporcionadas por sensores) y mueve la articulación para reducir el error. El siguiente nivel computa las transformaciones cinemáticas y proporciona estos puntos de referencia al nivel más bajo. En la figura 12.5 puede observarse que en realidad hay dos jerarquías involucradas: una de control desde arriba hacia abajo y otra de estatus desde abajo hacia arriba. La figura 12.6 muestra esto en forma más clara porque detalla un solo nivel en la estructura. Puesto que cada nivel en la jerarquía se define bien, funcionalmente, la tarea de control del robot puede dividirse en módulos de procesamiento en los que cada módulo tiene entradas y salidas bien definidas y, por ende, puede asociarse con un elemento de procesamiento independiente.

12.4



Programación de robots

La ventaja más grande en la aplicación de robots industriales es su flexibilidad, su habilidad de reprogramación para nuevas producciones y su gran rango de movimientos. Sin embargo, un obstáculo mayor en el uso de manipuladores como máquinas de ensamble universales es la falta de una comunicación adecuada y eficiente entre el usuario y el sistema robótico, de tal modo que el usuario pueda dirigir el manipulador para realizar una determinada tarea. La utilización de la flexibilidad del robot presupone la programación efectiva. El sistema de cómputo que controla al manipulador tiene que estar programado para enseñar al robot la secuencia



Software

El significado de software es un conjunto de programas que hacen que el hardware funcione adecuadamente.

particular de movimientos y otras acciones que tengan que ejecutarse con el fin de lograr su tarea. Hay varias maneras de programación de robots industriales, a saber, online y offline.

12.4.1 Programación online

La programación online se lleva a cabo en el propio lugar de producción e involucra la celda de trabajo. El robot se programa mediante una caja de prácticas. La programación online tiene las siguientes ventajas y desventajas en comparación con la programación offline:

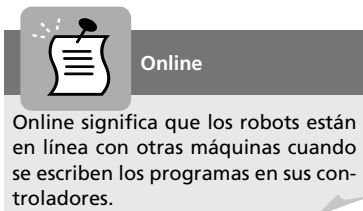
Ventajas

- Fácil acceso
- En concordancia con la posición real de equipo y piezas
- Sencillez de programación, así que incluso un operario prácticamente sin capacitación puede realizarla

Desventajas

- Movimiento lento del robot durante la programación
- La lógica de programa y cálculos son difíciles de programar
- Dificultad para incorporar datos de sensores
- Suspensión de la producción durante la programación
- El costo es equivalente al valor de producción
- Mala documentación

En la programación online, los usuarios mueven al propio robot a cada punto de avance por medio de algún tipo de dispositivo en el espacio de trabajo real. En la práctica, la programación online es la que se utiliza, por mucho, con más frecuencia. En la programación online



se coloca una pieza real en el espacio de trabajo, exactamente como en la producción, y la programación se basa en enseñar al robot las trayectorias que tenga que seguir. Esta enseñanza se lleva a cabo guiando el brazo del robot a través de una serie de movimientos y grabando estos movimientos, para que posteriormente puedan repetirse en forma automática. Durante este proceso, el brazo puede propulsarse en forma manual

(es decir, el operario usa sus músculos para cambiar el brazo de una posición a otra) o por sus accionamientos (es decir, el operario utiliza las palancas de mando, el teclado de un dispositivo portátil de enseñanza o una réplica de tamaño reducido del manipulador para ordenar los accionamientos a las posiciones apropiadas). Independientemente de la manera de propulsar el brazo durante el proceso, hay dos maneras de grabar la trayectoria de un movimiento del brazo. En el método PTP (*Point to point*, de punto a punto), el brazo se transfiere a cada punto característico de la trayectoria, se detiene allí y, mediante un botón especial que hay en el panel de control, se memoriza esta posición en el sistema de control. Durante la reproducción, el brazo del robot pasa a través de estos puntos usando una forma de interpolación entre ellos. En el método de CP (*Continuous path*, recorrido continuo), conforme se transfiere el brazo, las posiciones se registran en forma automática en intervalos constantes. Puesto que los puntos están muy cercanos entre sí, no se necesitan rutinas especiales de interpolación.

Además, los movimientos pueden reproducirse con diferentes velocidades, cambiando la base de tiempo (el intervalo permitido para alcanzar al siguiente punto). A pesar de que los sistemas online generan código de programación de procedimiento, los usuarios pueden crear puntos de avance sin editar este código y, como resultado, esto se considera como menos intimidante y más intuitivo que la programación offline. Observe, sin embargo, que si no puede completarse la reprogramación durante el tiempo muerto normal, como en fines de semana, entonces la empresa incurrirá en gastos en la forma de producción perdida. Por ende, el conjunto de tareas viables para la programación en línea se restringe por el tiempo de programación. Aunque los usuarios usualmente ven la programación online como menos intimidante, sí pasan demasiado tiempo simplemente moviendo el robot entre puntos de avance en vez de transferir conocimientos reales. Además, debido al difícil proceso de posicionamiento del robot, los usuarios tienden a descartar su trabajo anterior y a crear puntos de referencia desde el principio cada vez. Esto representa un derroche muy grande, ya que los programas de robots suelen contener subtareas repetidas, y los diseños de productos contienen muchas similitudes con diseños previos.

La programación dirigida Un método de programación online se conoce como programación dirigida. Esto también se conoce como enseñar y reproducir, o de guía, y es el método más comúnmente usado en los robots industriales hoy en día. Este método involucra la enseñanza del robot para llevarlo a través de los movimientos que el usuario desea. La enseñanza y reproducción se logra normalmente mediante los siguientes pasos:

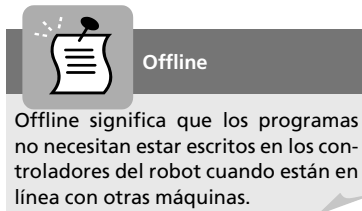
- i) Llevar al robot en movimiento lento, usando el control manual, a través de toda la tarea de ensamble, y registrar los ángulos de las articulaciones del robot en las ubicaciones apropiadas con el fin de reproducir el movimiento;
- ii) Editar y reproducir el movimiento enseñado;
- iii) Si el movimiento es correcto, entonces el robot se opera con la velocidad correcta en modo repetitivo.

Guiar el robot en movimiento lento normalmente puede lograrse en diferentes formas, usando una palanca de control, un juego de botones (uno para cada articulación) o un sistema de manipulador amo/esclavo. En la actualidad, el sistema de uso más común es una caja manual con botones. Mediante este método, el usuario mueve el robot manualmente a través del espacio y presiona un botón para registrar cualquier posición angular del manipulador. El conjunto de posiciones angulares se registra a partir de los puntos de referencia de la trayectoria que el manipulador haya atravesado. Estos puntos de referencia de posición se interpolan luego por métodos numéricos, y el robot se desplaza a lo largo de la trayectoria suavizada. En el modo edición-reproducción, el usuario puede cambiar las posiciones angulares registradas y asegurar que el robot no colisionará con ningún obstáculo mientras realiza la tarea deseada. En el modo de ejecución el robot se moverá repetitivamente conforme a la trayectoria suavizada que se editó. Si la tarea cambia, entonces se repiten los tres pasos que arriba se mencionaron. Las ventajas de este método son que sólo requiere un espacio relativamente pequeño de memoria para registrar posiciones angulares y que es sencillo de aprender. La principal desventaja es la dificultad para utilizar este método con el fin de integrar información de retroalimentación sensorial al sistema de control. Aplicaciones basadas en posición y trayectorias de recorrido, tales como la soldadura de arco y la carga de máquinas, normalmente emplean la enseñanza de pasos o enseñanza dirigida. En la enseñanza dirigida,

el usuario ejecuta los movimientos requeridos en forma manual, sosteniendo a la vez algún dispositivo (el manipulador mismo o una réplica a escala) para registrar el recorrido.

La programación paso a paso En contraste con la programación dirigida, el usuario especifica los puntos intermedios mediante un dispositivo portátil de enseñanza que se conecta al controlador del robot para dirigirlo y programarlo. El dispositivo portátil de enseñanza tiene un diseño, peso, botones y secuencias de comandos completamente diferentes dependiendo del fabricante. La interacción es normalmente difícil incluso para los profesionales. Conocimientos acerca de soldadura, pintura y manipulación en robots industriales también son muy importantes para automatizar una tarea. Más allá de los conocimientos comunes de robots, el programador necesita conocer el proceso automatizado para generar verdaderos beneficios en la calidad de productos, la durabilidad del equipo y la reducción del tiempo de fabricación.

12.4.2 La programación offline



La programación offline se lleva a cabo en una computadora y en modelos de la celda de trabajo con el robot, en piezas de trabajo y en el ambiente. Los programas del robot pueden crearse en la mayoría de los casos por la reutilización de datos CAD existentes, de tal modo que la programación será rápida y efectiva. Las ventajas y desventajas de la programación offline son las siguientes:

Ventajas

- No ocupa equipos de producción; de esta manera, la producción puede continuar durante el proceso de programación.
- Programación efectiva de lógica y cálculos con instalaciones de depuración de vanguardia.
- Las ubicaciones se construyen de acuerdo con modelos y esto puede significar que los programadores tendrán que poner a punto programas en línea o utilizar sensores.
- Programación efectiva de ubicaciones.
- Verificaciones del programa mediante simulación y visualización.
- Buena documentación por medio del modelo de simulación con programas adecuados.
- Reutilización de datos CAD existentes.
- Es independiente del costo de la producción. La producción puede continuar durante la programación.
- Herramientas de soporte de proceso para la selección de parámetros de soldadura.

Desventajas

- Se necesitan usuarios expertos.
- Demanda una inversión en un sistema de programación offline.

La programación offline requiere lenguajes de programación de alto nivel que ofrecen un planteamiento general para resolver el problema de comunicación humano/robot. En la década pasada, se usaron robots en forma exitosa en áreas como la soldadura por arco y

la pintura por espray usando guías o patrones. La programación de robots es significativamente distinta de la programación tradicional de computadoras. Programar un sistema robótico requiere la definición de un ambiente de programación sustentado en lenguajes apropiados, lo que le permite al operario asignar las direcciones de tareas que el robot debe ejecutar. El ambiente de programación se encarga no sólo de revisar la ejecución de la traducción de instrucciones mediante un lenguaje adecuado, sino también de revisar la ejecución correcta de una tarea ejecutada por el robot. Por lo tanto, los ambientes de programación de robots, aparte de tener más características en común con los ambientes de la programación de computadoras, presentan un número importante de asuntos relacionados con la observación que la ejecución de programas produce sobre el entorno físico. En otras palabras, aun si existe una descripción muy exacta de la realidad física en el ambiente de programación, ocurrirá de manera inevitable un número de situaciones que no han sido ni pueden ser previstas. En consecuencia, un ambiente de programación de robots debe dotarse con las siguientes características:

- un sistema de operación en tiempo real
- modelado del entorno
- control de movimiento
- entrada/salida
- lectura de datos proveniente de los sensores
- interacción con el sistema físico
- capacidad de detección de errores
- recuperación de las funciones operativas correctas
- una estructura específica de lenguaje

Pueden identificarse varias consideraciones que deben manejarse por cualquier método de programación de robots. Para ilustrarlas, considere los comandos de control de movimiento que se usan para dirigir el robot con el fin de que mueva su manipulador hacia una posición definida en el espacio. Por ejemplo, la instrucción “mover P1” podría usarse para dirigir el robot a un punto en el espacio llamado P1. Se emplean comandos de entrada/salida para controlar la recepción de señales de sensores y otros dispositivos en la celda de trabajo y para iniciar señales de control a otras piezas de equipo en la celda. Por ejemplo, la instrucción “señal 3 encendida” podría usarse para encender un motor en la celda, donde el motor se conecta con la línea de salida 3 en el controlador del robot. Los objetos que van a manipularse por un robot son tridimensionales y tienen una variedad de propiedades físicas. Los robots operan en un ambiente espacial complejo. La descripción y representación de objetos tridimensionales en una computadora son imprecisas y la información sensorial tiene que monitorearse, manipularse y utilizarse correctamente.

La programación offline se basa en medios externos para expresar la tarea que el sistema robótico tendrá que realizar. La tarea se expresa en un *lenguaje de programación de robots* (*Robot Programming Language RPL*). Esto puede ser un lenguaje específicamente definido para robots o un *lenguaje de programación de computadoras* universal (CPL). La ventaja de usar RPL se asocia con hacer que el robot sea más productivo, con la facilidad de utilización de datos de sensores y con la creación de la documentación del programa. Para lograr que un robot sea más productivo, la fase en la que se requiere la programación debe ser lo más corta posible. En otras palabras, la programación de robots tiene que hacerse independiente del robot. El programa se desarrolla offline, y solamente más tarde se carga al sistema de control

para su ejecución. El problema de este planteamiento es que, a pesar de que los robots que se fabrican actualmente tienen una alta repetitividad, demuestran baja precisión. Esto requiere la calibración del programa que se crea offline.

Los planteamientos actuales para la programación offline pueden clasificarse en dos categorías principales: la *programación orientada al robot* y la *programación orientada al objeto* o *programación basada en las tareas*. En la programación orientada al robot, se describe explícitamente una tarea de ensamble como una secuencia de movimientos del robot. El robot se guía y controla por el programa a través de toda la tarea, donde cada instrucción del programa corresponde aproximadamente a una acción del robot. Por el otro lado, la programación basada en las tareas describe la tarea de ensamble como una secuencia de metas posicionales de los objetos más que los movimientos del robot que se necesitan para alcanzar estas metas y, por lo tanto, no se especifica ningún movimiento explícito del robot. Estos planteamientos se analizarán a continuación.

La programación orientada al robot Los lenguajes orientados al robot son lenguajes de *programación estructurada* que incorporan instrucciones de alto nivel y tienen la característica de un lenguaje interpretado con el fin de obtener un ambiente interactivo que permite que el programador revise la ejecución de cada instrucción del programa fuente antes de proceder a la siguiente. Las propiedades comunes de estos lenguajes son las siguientes:

- editor de texto
- estructuras complejas de representación de datos
- uso extenso de variables de estado predefinidas
- ejecución de operaciones de matriz algebraica
- uso extensivo de representaciones simbólicas para los sistemas de coordenadas
- posibilidad de especificar el movimiento coordinado de más sistemas coordinados rígidamente unidos a objetos por medio de un solo sistema de coordenadas
- inclusión de subrutinas con intercambio de datos y parámetros
- uso de acondicionamiento lógico y puesta en secuencia por medio de banderas
- capacidad de computación paralela
- funciones de un controlador lógico programable (PLC)

El planteamiento más común para el diseño de un lenguaje en el nivel de un robot es el de extender un lenguaje de alto nivel existente para que cumpla con los requerimientos de la programación de robots. Hasta cierto grado, este planteamiento es *ad hoc* y no hay lineamientos de cómo implementar la extensión. Pueden reconocerse fácilmente varias características clave que son comunes de todos los lenguajes orientados a robots si se examinan los pasos involucrados en el desarrollo de un programa de robot. Considere la tarea de insertar un perno en un orificio, como se muestra en la figura 12.7. Esto requiere mover el robot al alimentador, recoger el perno, moverlo al soporte e insertar el perno en uno de los orificios. Normalmente, los pasos para desarrollar el programa son los siguientes:

- a) Se establece el espacio de trabajo y se fijan las partes mediante el uso de sujetadores y alimentadores.
- b) La configuración (orientación y posición) de las partes (alimentador, soportes, etc.) y sus características (barreno del soporte, agarre del perno, etc.) se definen usando las estructuras de datos proporcionados por el lenguaje.

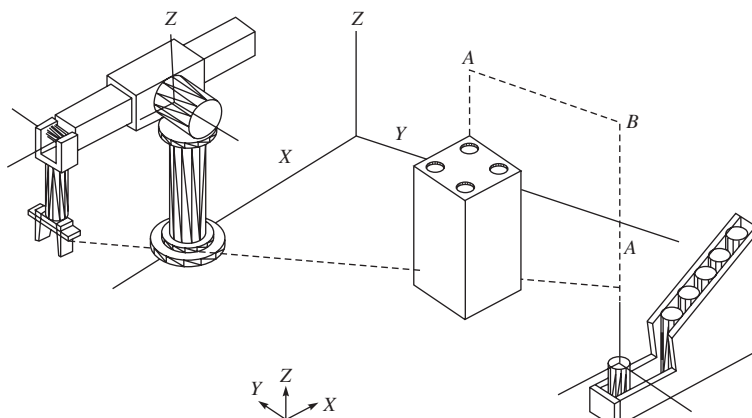


Figura 12.7 Una tarea simple de inserción

- c) La tarea de ensamble se segmenta en una secuencia de acciones, tales como mover el robot, recoger objetos y ejecutar una inserción.
- d) Se agregan comandos sensoriales para detectar situaciones anormales (como la incapacidad de localizar el perno al agarrar) y monitorear el progreso de la tarea de ensamble.
- e) El programa se depura y refina mediante la repetición de los pasos del b) al d).

Las características importantes son la especificación de posición, paso b), la especificación de movimiento, paso c), y la detección, paso d), lo que puede programarse usando los lenguajes de robots AL, AML y otros. Observe que AL fue desarrollado por la universidad de Stanford, mientras que AML fue desarrollado por IBM.

Ejemplo 12.2

Definiciones de AL y AML para sistemas coordenados de base

AL:

```
base ← FRAME (nilrot, VECTOR (20, 0, 15)*inches);
beam ← FRAME (ROT(A, 90*deg), VECTOR (20, 15, 0)*inches);
feeder ← FRAME (nilrot, VECTOR (25, 20, 0)*inches);
```

Observe: nilrot es un sistema predefinido que tiene el valor ROT(Z, 0*deg). El símbolo “←” es el operador de asignación en AL. Un punto y coma termina una instrucción. El símbolo “*” es un operador de multiplicación dependiente del tipo. Aquí se utiliza para adjuntar unidades a los elementos del vector.

AML:

```
base = << 20, 0, 15 >, EULERROT (< 0, 0, 0 >) >;
beam = << 20, 15, 0 >, EULERROT (< 0, 0, 90 >) >;
feeder = << 25, 20, 0 >, EULERROT (< 0, 0, 0 >) >;
```

Nota: EULERROT es una subrutina que forma la matriz de rotación dados los ángulos.

Ejemplo 12.3**Instrucciones de movimiento de AL y AML****AL:**

```
{Move arm from rest to frame A and then to bolt-grasp}
MOVE barm TO A;
MOVE barm TO bolt-grasp;
{Another way of specifying the above statement}
MOVE barm TO bolt-grasp VIA A;
{Move along the current Z axis by 1 inch, i.e., move relative}
MOVE barm TO ⊗ - 1*Z*inches;
```

Notas: Refiérase a la figura 12.7 para el punto A, eje Z, etc. Además, *barm* es el nombre del brazo del robot. El símbolo “⊗” indica la ubicación actual del brazo que es equivalente a *base * T6 * E*. Instrucciones entre claves { ... } son comentarios.

AML:

```
— Move joint 1 and 4 to 10 inches and 20 degrees, respectively (absolute move)
MOVE (< 1, 4 >, <10, 20 >);
— Move joints 1, 3 and 6 by 1 inch 2 inches, and 5 degrees, respectively (relative move)
DMOVE (<1, 3, 6 >, <1, 2, 5 >);
```

Nota: Instrucciones precedidas por “—” son comentarios.

Programación basada en las tareas Un planteamiento completamente diferente en la programación de robots se hace mediante la programación basada en las tareas. La manera natural de describir una tarea de ensamble es en términos de los objetos que van a manipularse en lugar de mediante los movimientos del robot. El lenguaje basado en las tareas se aprovecha de este hecho y simplifica la tarea de programación. Un sistema de programación basado en las tareas permite que el usuario describa la tarea en un lenguaje de alto nivel (especificación de tarea). Un planeador de tareas consultará entonces una base de datos (modelos del entorno) y transformará la especificación de la tarea en un programa de nivel del robot que ejecutará la tarea (síntesis del programa del robot). Basándose en esta descripción, puede conceptualmente dividirse la planeación de tareas en tres fases: modelado del entorno, especificación de tareas y síntesis del programa. Cabe mencionar que estas tres fases no son completamente independientes; de hecho, se relacionan computacionalmente. La figura 12.8 presenta una arquitectura posible para el planeador de tareas. La especificación de la tarea se descompone en una secuencia de subtareas por el fragmentador de tareas y se extrae información tal como el estado inicial, estado final, posición de agarre, operando, especificaciones y relaciones de sujeción. Luego se pasan las subtareas a través del planeador de subtareas, que genera el programa de robot requerido. El concepto de planeación de tareas es bastante parecido a la idea de la generación automática de programas en la inteligencia artificial. El usuario provee los requerimientos de entrada/salida de un programa deseado, y el generador de programas generará un programa que producirá el comportamiento deseado de entrada/salida.

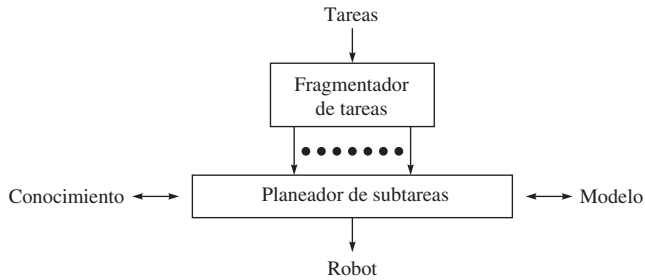


Figura 12.8 Planeador de tareas

Algunas de las dificultades y las soluciones correspondientes en la programación en el nivel de tareas son las siguientes:

a) Modelos geométricos y físicos Para que el planeador de tareas pueda generar un programa de robot que ejecute una determinada tarea, deberá tener información sobre los objetos y sobre el propio robot. Éstas incluyen las propiedades geométricas y físicas de los objetos que pueden representarse por modelos. Un modelo geométrico proporciona la información espacial (dimensión, volumen, forma) de los objetos en el espacio de trabajo. Existen numerosas técnicas para modelar los objetos tridimensionales. El planteamiento más común es la geometría sólida constructiva (*Constructive Solid Geometry* CSG), donde los objetos se definen como construcciones o combinaciones, usando operaciones de conjuntos regularizadas (tales como unión, intersección) de objetos primitivos (tales como cubos o cilindros). El primitivo puede representarse de varias maneras:

- i) Un conjunto de bordes y puntos
- ii) Un conjunto de superficies
- iii) Cilindros generalizados
- iv) Descomposición de celdas

Las propiedades físicas, como inercia, masa y coeficiente de fricción, podrán limitar el tipo de movimiento que el robot pueda ejecutar. En lugar de guardar cada una de las propiedades en forma explícita, pueden derivarse del modelo de objeto. Sin embargo, ningún modelo puede ser 100 por ciento preciso, y piezas idénticas podrán tener ligeras diferencias en sus propiedades físicas. Para tratar con éstas deben introducirse tolerancias en el modelo.

b) Representación de estados del entorno El planeador de tareas debe ser capaz de estimular los pasos de ensamble con el fin de generar el programa del robot. Cada paso de ensamble puede representarse de forma sucinta por el estado actual del entorno. Una manera de representar estos estados es el uso de configuraciones de todos los objetos en el espacio de trabajo. AL ofrece una relación de sujeción llamada AFFIX que permite que se unan los sistemas coordinados unos con otros. Esto es equivalente a unir físicamente una parte a otra parte, y si una de las partes se mueve, todos los demás también se moverán. AL automáticamente actualiza las ubicaciones de los sistemas coordinados mediante la multiplicación de las transformaciones apropiadas. Por ejemplo,

```

AFFIX beam_bore TO beam RIGIDLY;
beam_bore = FRAME(nilrot, VECTOR (1, 0, 0)*inches);
  
```

12.4.3 Programación por simulación

Entre las tecnologías más recientes disponibles para la programación se encuentran aquellas que usan la simulación virtual. Las simulaciones mediante el uso de modelos virtuales del ambiente de trabajo y de los propios robots pueden ofrecer ventajas tanto para la empresa como para el programador. Por medio de una simulación, pueden programarse robots offline, lo que no causa ningún tiempo muerto para una línea de ensamble que podrá depender considerablemente de estos robots. Las acciones del robot y las piezas de ensamble pueden visualizarse en un ambiente tridimensional virtual meses antes de que se produzcan incluso los prototipos. La figura 12.9 ilustra uno de estos ambientes. Tampoco se requiere que los programadores tengan mucha destreza técnica en la escritura de código. Mientras que el paso hacia la simulación virtual para la programación de robots es un paso hacia adelante en el diseño de interfaces de usuarios, muchos de los diseños todavía tienen un camino largo por delante.

12.5



La arquitectura de hardware

La estructura jerárquica de la arquitectura funcional que se adopta como modelo de referencia para el sistema de control de un robot industrial, junto con su articulación en diferentes módulos, sugiere una implementación de hardware que explote recursos computacionales distribuidos interconectados por medio de canales de comunicación adecuados. Para este fin, vale la pena recordar que las funciones implementadas en los sistemas de control actuales toman en cuenta los tres niveles desde el servo hasta la acción, que normalmente limitan el desarrollo de las funciones implementadas en el nivel de acción. En los niveles de servo y

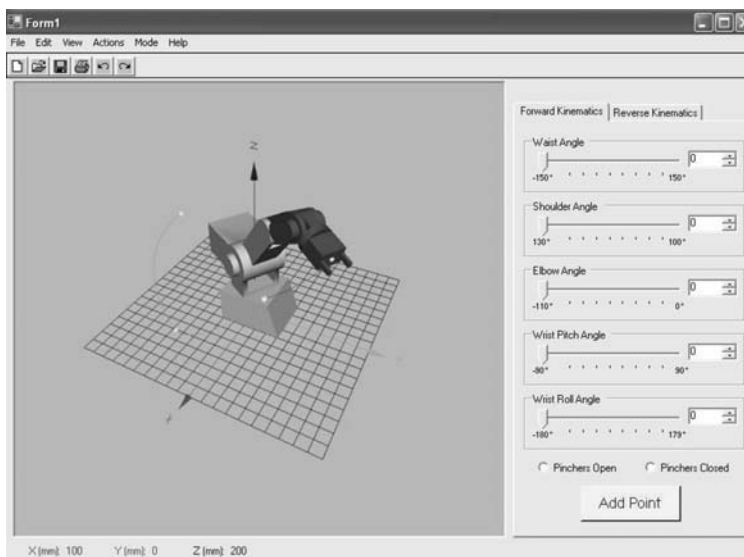


Figura 12.9 Ambiente de simulación

Cortesía de: <http://www.public.iastate.edu/rterlemei/FinalPaper.pdf>

primitivo, las capacidades computacionales se requieren con restricciones de tiempo real demandantes. Un modelo generalizado de la *arquitectura de hardware* para el sistema de control de un robot industrial se presenta en la figura 12.10. Las tarjetas están conectadas con un *bus*, por ejemplo, un bus VME que permite el flujo de datos de soporte de comunicación; el ancho de banda del bus debe ser suficientemente ancho para cumplir con los requerimientos por restricciones de tiempo real. La tarjeta del *sistema* es normalmente un CPU equipado con

- un microprocesador con coprocesador matemático
- una memoria EPROM de secuencia de arranque
- una memoria RAM local
- una memoria RAM compartida con las otras tarjetas mediante el bus
- un número de puertos seriales y paralelos con interfaz al bus y al entorno externo
- contadores, registros y temporizadores
- un sistema de interrupción

Las siguientes funciones deberán implementarse en la tarjeta del sistema:

- Interfaz del operario por medio de dispositivo portátil de enseñanza, teclado, video e impresora
- Interfaz con una memoria externa (disco duro) que se usa para almacenar datos y programas de aplicación
- Interfaz con estaciones de trabajo y otros sistemas de control por medio de una red local de comunicación, por ejemplo, Ethernet

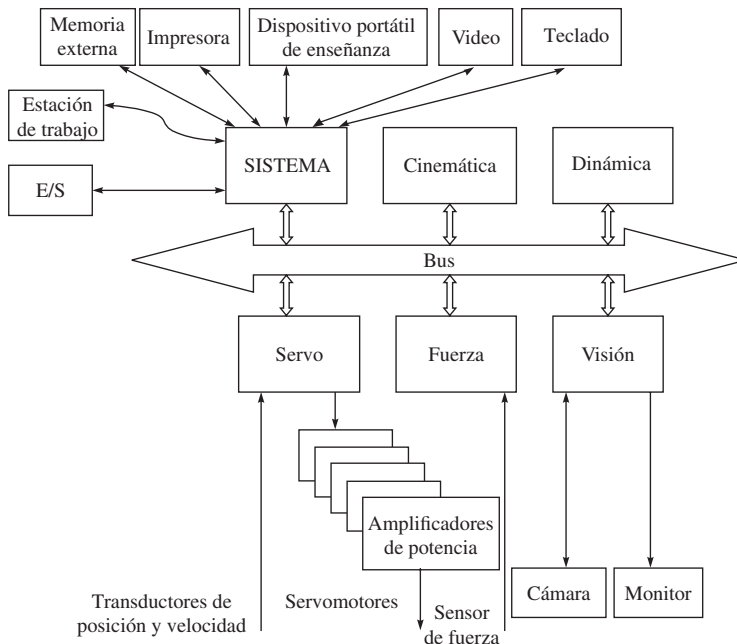


Figura 12.10 Modelo general de la arquitectura de hardware para robots industriales

- Interfaz de E/S con dispositivos periféricos en el área de trabajo, por ejemplo, alimentadores, transportadores y sensores de ENC./APAG.
- Secuencia de arranque del sistema
- Intérprete del lenguaje de programación
- Árbitro del bus

Las otras tarjetas que hay frente al bus podrán equiparse, aparte de los componentes básicos de la tarjeta del sistema, con un procesador complementario o alternativo (DSP, transputadora) para la implementación de funciones computacionalmente demandantes o dedicadas. En la arquitectura de la figura 12.10, se implementan las siguientes funciones en la tarjeta de *cinemática*:

- Computación de movimiento de los primitivos
- Computación de cinemática directa, cinemática inversa y el jacobiano
- Prueba de viabilidad de trayectoria
- manejo de redundancia cinemática

La tarjeta de *dinámica* se dedica a

- La computación de la dinámica inversa

La tarjeta de *servo* tiene las funciones de

- Microinterpolación de referencias
- Computación del algoritmo de control
- Conversión de digital a análogo e interfaz con los amplificadores de potencia
- Gestión de datos de transductores de posición y velocidad
- Interrupción de movimiento en caso de fallas

Las restantes tarjetas de la figura se consideraron para ilustrar cómo el uso de sensores podrá precisar capacidades de procesamiento local para recuperar informaciones significativas de los datos que puedan usarse efectivamente en el sistema sensorial. La tarjeta de *fuerza* realiza las siguientes operaciones:

- Acondicionamiento de datos proporcionados por el sensor de fuerza
- Representación de fuerzas en un determinado sistema de coordenadas

La tarjeta de *visión* está a cargo de

- Procesamiento de datos proporcionados por la cámara
- Extracción de características geométricas de la escena
- Localización de objetos en un determinado sistema de coordenadas

Aunque las tarjetas se conectan al mismo bus, la frecuencia con la que se intercambien datos no tiene que ser la misma para cada tarjeta. Aquellas que están conectadas a los sensores ciertamente tienen la necesidad de intercambiar datos con el robot en la máxima frecuencia posible (de 100 a 1 000 Hz) con el fin de asegurar un desempeño dinámico alto para el control de movimientos como también para relevar el contacto del efector final en un tiempo muy breve. Por otro lado, las tarjetas de cinemática y dinámica implementan funciones de modelado y, como tales, no requieren la actualización de datos con una velocidad tan alta como la de la tarjeta de servo. De hecho, la configuración del manipulador no varía de forma apreciable en un tiempo muy corto, por lo menos respecto a las velocidades o aceleraciones operacionales normales de los robots industriales de la actualidad. Las frecuencias de

muestreo comunes están en el rango de 10-100 Hz. La tarjeta de visión tampoco requiere una velocidad alta de actualización porque la escena es por lo general casi estática y porque las funciones interpretativas son normalmente complejas. Por lo regular, las frecuencias están en el rango de 1-10 Hz. En suma, el acceso de tarjetas al bus de comunicación de la arquitectura de control del hardware podrá realizarse de acuerdo con una lógica de velocidades múltiples, lo que permite resolver problemas de saturación de datos en el bus.

RESUMEN

En este capítulo se explican los requerimientos de software y hardware para el control de robots. También se presentan las metodologías de programación online y offline. Se mencionan las ventajas y desventajas de ambos tipos de programación.



EJERCICIOS

- 12.1 ¿Cuáles son los requerimientos de hardware y software para un controlador de robot?
- 12.2 Describe la programación online.
- 12.3 ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de la programación online?
- 12.4 ¿Cuáles son los tipos de programación online?
- 12.5 ¿Cuál es la diferencia entre la programación dirigida y la paso a paso?
- 12.6 ¿Cuáles son los tipos de programación offline?
- 12.7 ¿Cuáles son las características que deben tener los ambientes de la programación offline?
- 12.8 ¿Cuándo deberá preferirse la programación online frente a la programación offline?
- 12.9 ¿Qué es programación por simulación?
- 12.10 ¿Por qué es difícil la programación basada en las tareas?
- 12.11 Explique “programa por simulación”.
- 12.12 ¿Cuáles serían las limitaciones de “programa por simulación”?



EJERCICIOS BASADOS EN LA WEB

- 12.13 ¿Cuáles son los tipos de programación de robots que utilizan los fabricantes en el ejercicio 1.11?
- 12.14 Mencione algunos softwares de simulación de robots.
- 12.15 Mencione algunos métodos de programación de robots que ofrecen los fabricantes de robots.
- 12.16 Averigüe por lo menos dos nombres de empresas que ofrezcan la característica de “programa por simulación” en sus robots.



Apéndice



Principios básicos matemáticos

En este libro se supone que el lector se halla familiarizado con las definiciones matemáticas de las áreas de álgebra lineal, trigonometría y otros campos relacionados. Algunas de ellas se introducirán en este apéndice para lograr que el lector entienda rápidamente las derivaciones y notaciones que se usan en diferentes capítulos de este libro.

A.1



La función “Atan2”

La función usual arco tangente inversa denotada por $\text{Atan}(z)$, donde $z = y/x$, devuelve un ángulo en el rango de $(-\pi/2, \pi/2)$. Con el fin de expresar el rango completo de ángulos, es útil definir la llamada función de arco-tangente de dos argumentos denotada por $\text{Atan2}(y, x)$ que devuelve el ángulo en el rango completo, es decir, $(-\pi, \pi)$. Esta función se define para todos los $(x, y) \neq 0$ y es igual al ángulo único θ , de tal manera que

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ y } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{A.1})$$

La función usa los signos de x y y para seleccionar el cuadrante adecuado para el ángulo θ , como se explica en la tabla A.1.

En la tabla A.1, $z = y/x$ y $\text{Sgn}(\cdot)$ denotan el usual signo de la función de signo, es decir, su valor es $-1, 0$ o 1 , dependiendo de los valores positivo, cero y negativo de y , respectivamente. Sin embargo, si tanto x como y son ceros, “Atan2” queda indefinido. Entonces, mediante

Tabla A.1 Evaluación de la función "Atan2"

x	$Atan2(y, x)$
+ve	$Atan(z)$
0	$Sgn(y) \pi/2$
-ve	$Atan(z) + Sgn(y)\pi$

la tabla $Atan2(-1, 1) = \pi/4$ y $Atan2(1, -1) = 3\pi/4$, mientras que $Atan(-1)$ devuelve $-\pi/4$ en ambos casos.

A.2 Vectores



Mientras no se señale algo diferente, los vectores serán definidos como vectores de columna y denotados con letras minúsculas en negrillas. Por ende, un vector \mathbf{a} n -dimensional se define como

$$\mathbf{a} \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

donde a_1, \dots, a_n son los elementos del vector \mathbf{a} . El vector \mathbf{a} también puede representarse como

$$\mathbf{a} \equiv [a_1, \dots, a_n]^T \quad (\text{A.3})$$

donde el superíndice T denota transposición. La magnitud, longitud o norma del vector \mathbf{a} , denotada con letras itálicas, se determina por

$$a = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \quad (\text{A.4})$$

A.2.1 Vectores unitarios

Un vector unitario se define como un vector con magnitud igual a 1. Por tanto, el vector unitario a lo largo del vector \mathbf{a} , denotado con $\bar{\mathbf{a}}$, puede definirse como

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{a} \quad (\text{A.5})$$

donde a se determina por la ecuación (A.4). Por ende, la magnitud del vector unitario $\bar{\mathbf{a}}$ es $\bar{a} = 1$. Ahora, si \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} denotan los vectores unitarios a lo largo de los ejes X , Y y Z , respectivamente, del sistema de coordenadas como se presenta en la figura A.1, cualquier vector cartesiano tridimensional que se muestra en la figura A.1, por decir, $\mathbf{a} \equiv [a_1, a_2, a_3]^T$, puede expresarse como

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad (\text{A.6})$$

en la que los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} tienen las siguientes representaciones:

$$\mathbf{i} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \mathbf{k} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

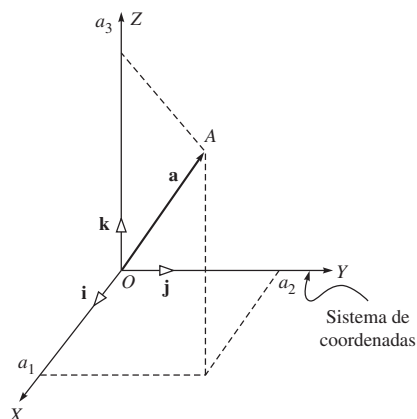


Figura A.1 Sistema de coordenadas y vectores unitarios

Observe que en la ecuación (A.6), las magnitudes de los vectores unitarios que usan las ecuaciones (A.4) y (A.7) son uno.

A.2.2 Productos escalares y productos punto

El producto escalar de dos vectores n -dimensionales \mathbf{a} y \mathbf{b} , aquí denotados como $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$, es un número escalar definido por

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \quad (\text{A.8})$$

El producto escalar es conmutativo, es decir,

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} \quad (\text{A.9})$$

Ahora bien, para vectores cartesianos bidimensionales y tridimensionales que representan cantidades físicas, como posición de un punto o fuerza en un punto, etc., el producto escalar también se llama producto punto, lo que se determina por

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = ab \cos \theta \quad (\text{A.10})$$

donde θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , como se muestra en la figura A.2. La interpretación física del producto punto es que el vector \mathbf{b} se proyecta al vector \mathbf{a} , como lo indica OA en la figura A.1, y se multiplica por la magnitud de \mathbf{a} . Alternativamente, puede interpretarse como la proyección de \mathbf{a} al vector \mathbf{b} cuyo resultado se multiplica por la magnitud del último. Entonces, si estos dos vectores son ortogonales entre sí, es decir, si $\theta = 90^\circ$, el producto punto desaparecerá, a saber, $\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$.

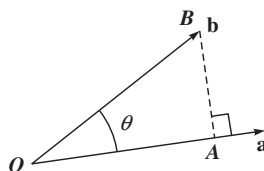


Figura A.2 Producto punto de dos vectores cartesianos

A.2.3 Producto vectorial o producto cruz

Un producto vectorial o cruz entre dos vectores cartesianos, por decir, \mathbf{a} y \mathbf{b} , denotado por \mathbf{c} , se define como

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k} \quad (\text{A.11a})$$

donde “ \times ” denota el símbolo para el producto cruz. El resultado del producto cruz es también un vector, es decir, \mathbf{c} , que es ortogonal a los dos vectores originales \mathbf{a} y \mathbf{b} . La magnitud del vector \mathbf{c} se denota como c y se determina por

$$c = ab \sin \theta \quad (\text{A.11b})$$

donde el ángulo θ es el ángulo entre los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} , como se muestra en la figura A.3. Con el fin de obtener la dirección del vector resultante \mathbf{c} , se aplica la regla de la mano derecha, es decir, si la palma de una mano derecha se coloca a lo largo del vector \mathbf{a} y luego se gira hacia el vector \mathbf{b} , el pulgar señala la dirección del vector \mathbf{c} .

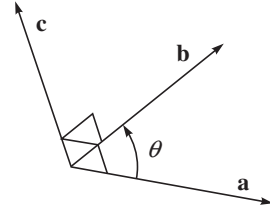


Figura A.3 Producto cruz de dos vectores cartesianos

El producto cruz tiene las siguientes propiedades:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}; \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})\mathbf{c}; \text{ y } \mathbf{a}^T (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}| \quad (\text{A.12})$$

A.2.4 Matriz de producto cruz

Una matriz de producto cruz siempre se asocia con un vector cartesiano tridimensional, por decir, \mathbf{a} , el cual, cuando se pre-multiplica por otro vector cartesiano tridimensional, por ejemplo, \mathbf{b} , da como resultado el producto cruz entre los dos vectores, como se muestra en la subsección A.2.3. Si $\mathbf{a} \times \mathbf{1}$ denota la matriz de producto cruz asociada con el vector \mathbf{a} , entonces

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{1})\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (\text{A.13a})$$

La matriz de 3×3 ($\mathbf{a} \times \mathbf{1}$) es antisimétrica y singular. Su representación en términos de los componentes del vector, $\mathbf{a} \equiv [a_1, a_2, a_3]^T$, se determina por

$$\mathbf{a} \times \mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13b})$$

Entonces es una cuestión sencilla verificar la ecuación (A.13b) según el resultado de la ecuación (A.11a).

A.2.5 Diferenciación de vectores

Si el vector $\mathbf{a} \equiv [a_1 \dots a_n]^T$ es la función vectorial n -dimensional de tiempo, entonces su derivada de tiempo, denotada por $\dot{\mathbf{a}}$, se define como

$$\dot{\mathbf{a}} \equiv [\dot{a}_1 \quad \dots \quad \dot{a}_n]^T \quad (\text{A.14})$$

Los productos escalares y vectoriales cumplen con las siguientes reglas de productos para la diferenciación, parecidas a la regla de productos para la diferenciación de funciones escalares ordinarias:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}^T \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}}^T \mathbf{b} + \mathbf{a}^T \dot{\mathbf{b}}; \text{ y } \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} \quad (\text{A.15})$$

Instrucciones similares también se aplican para la integración de vectores.

A.2.6 Independencia lineal

Para un conjunto de vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, se dice que es linealmente independiente si y sólo si

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \text{ implica que } \alpha_i = 0 \text{ para toda } i \quad (\text{A.16})$$

A.3



Matrices

Una matriz se define como un arreglo ordenado de números reales. Una matriz de $m \times n$, por ejemplo, \mathbf{A} , con m hileras y n columnas tiene mn elementos denotados como a_{ij} para $i = 1, \dots, m$ y para $j = 1, \dots, n$. Si cada columna de la matriz \mathbf{A} se representa por el vector m -dimensional $\mathbf{a}_j \equiv [a_{1j} \dots a_{mj}]^T$ para $j = 1, \dots, n$, entonces la matriz \mathbf{A} tiene la siguiente representación:

$$\mathbf{A} \equiv [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n] \quad (\text{A.17a})$$

De manera similar, puede definirse cada hilera como el vector n -dimensional $\mathbf{a}_i \equiv [a_{i1} \dots a_{in}]^T$ para $i = 1, \dots, m$, y puede representarse la matriz \mathbf{A} como

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^T \end{bmatrix} \quad (\text{A.17b})$$

donde $\mathbf{a}_i^T \equiv [a_{i1}, \dots, a_{in}]$. Observe que ambas ecuaciones (A.17a-b) representan la misma matriz. En función de los requerimientos, una podrá elegirse sobre la otra.

A.3.1 El determinante de una matriz

El determinante de una matriz sólo se define para matrices cuadradas. Para una matriz \mathbf{A} de $n \times n$, el determinante es el escalar denotado por $\det(\mathbf{A})$ o $|\mathbf{A}|$ y se determina por

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{A}_{ij}) \quad (\text{A.18})$$

donde $\det(\mathbf{A}_{ij})$ es el determinante de la matriz $(n-1) \times (n-1)$ \mathbf{A}_{ij} , obtenido por borrar la i -ésima hilera y la j -ésima columna de la matriz \mathbf{A} . Como ejemplo, el determinante de la matriz \mathbf{A} de 3×3 se calcula a continuación:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Con respecto al determinante de una matriz \mathbf{A} , las siguientes propiedades son útiles:

- Si todos los elementos de una hilera o columna de la matriz son cero, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$.
- Los determinantes de \mathbf{A} y su transpuesta \mathbf{A}^T son iguales, es decir, $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.
- Para dos matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} , $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.
- Si \mathbf{A} es una matriz de identidad, es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, entonces su determinante es la unidad, es decir, $\det(\mathbf{A}) = 1$.
- Si dos hileras o columnas son dependientes, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$. Estas matrices se llaman singulares.
- Si todas las hileras o columnas son independientes, entonces $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Estas matrices se llaman no singulares.

A.3.2 La inversa de una matriz

Nuevamente, la inversa de una matriz sólo se define para matrices cuadradas. Para una matriz \mathbf{A} de $n \times n$, se define como

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A}) \quad (\text{A.20a})$$

donde $\text{Adj}(\mathbf{A})$ se define como sigue:

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = [(-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{ji})]^T \quad (\text{A.20b})$$

Observe aquí que para resolver un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ se requiere de la inversa de la matriz \mathbf{A} , a saber, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Pueden usarse las ecuaciones (A.20a-b) para obtener \mathbf{x} . Sin embargo, con el fin de lograr eficiencia computacional, se sugiere usar la descomposición de la matriz, así como sustituciones directas e indirectas (Strang, 1980). Algunas propiedades de la matriz inversa son las siguientes:

- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} es una matriz de identidad.
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ y $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

A.3.3 Valores propios y vectores propios

Los valores propios de una matriz \mathbf{A} son las soluciones en s de la siguiente ecuación:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (\text{A.21a})$$

donde \mathbf{I} es la matriz de identidad de dimensión igual que la matriz \mathbf{A} . La función $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es un polinomio en s y se llama polinomio característico de \mathbf{A} . Si s_e es un valor propio de \mathbf{A} , un vector propio de \mathbf{A} correspondiente a s_e es un vector \mathbf{x}_e de no cero que cumple con el sistema de ecuaciones lineales que se determina por

$$(s_e\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_e = 0 \quad (\text{A.21b})$$

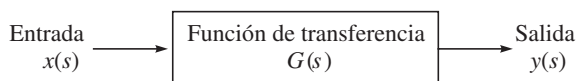


Figura A.4 Descripción de entrada/salida de un sistema

A.4



Función de transferencia

Una función de transferencia (Mohan, 1997; Onwubolu, 2005; Dorf, 1992) relaciona en forma algebraica la salida de un sistema con su entrada. Esta función permite la separación de la entrada, el sistema y la salida en tres partes separadas y distintas, como se muestra en la figura A.4. La relación de la transformada de Laplace¹ de la salida $y(s)$, dividida entre la transformada de Laplace de la entrada $x(s)$, da la función de transferencia $G(s)$, es decir,

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \quad (\text{A.22})$$

donde $x(s)$ y $y(s)$ son por lo general polinomios en la variable compleja s . En la ecuación (A.22) el denominador polinómico $x(s)$ se llama polinomio característico, cuyas raíces se llaman polos, mientras que las raíces del polinomio del numerador $y(s)$ se llaman ceros.

Como ejemplo, considere el sistema amortiguado de masa-resorte que se presenta en la figura 10.6. Sus ecuaciones de movimiento dadas en la ecuación (10.30 a) se reproducen aquí como

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \quad (\text{A.23})$$

Tomando la transformada de Laplace de todos los términos de la ecuación (A.23), en la suposición de condiciones iniciales cero, se obtiene

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s) \quad (\text{A.24})$$

La resolución para $x(s)$ según la ecuación antecedente proporciona

$$x(s) = \frac{f(s)}{ms^2 + bs + k} \quad (\text{A.25})$$

Por lo tanto, la función de transferencia $G(s)$ del sistema amortiguado de masa-resorte se determina por

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} \quad (\text{A.26a})$$

En forma alternativa, si se usa la ecuación diferencial de la forma dada por la ecuación (10.30b), entonces la ecuación (A.26a) puede expresarse también como sigue:

$$G(s) = \frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.26b})$$

donde ω_n y ζ son la relación de frecuencia natural y amortiguamiento del sistema, respectivamente, y están definidas en la ecuación (10.30c). Según la ecuación (A.26a-b), los dos polos del sistema amortiguado masa-resorte se determinan entonces por

¹ La transformada de Laplace convierte la representación de un sistema físico por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales en un conjunto de ecuaciones algebraicas.

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (\text{A.27})$$

lo que determina la forma de la respuesta natural del sistema en cuestión, mientras que los polos y ceros juntos afectan los picos y amplitudes tanto de la respuesta forzada como de la natural.

RESUMEN

En este apéndice se presentan algunos aspectos básicos del álgebra lineal y de las teorías de control, lo que ayudará al lector a entender los conceptos que se aplican en este libro, principalmente en los capítulos 5-10.



Apéndice



El uso de MATLAB y RIDIM

En este apéndice, se explican los pasos que hay que seguir para usar el software comercial MATLAB y el programa RIDIM, desarrollado por el autor y su grupo de estudiantes.

B.1



El uso de MATLAB

MATLAB es un software comercial de MathWorks Inc, USA. Tiene un gran número de operadores y comandos que pueden ejecutar una amplia gama de análisis, por ejemplo, operaciones de matriz, soluciones de ecuaciones algebraicas y diferenciales, optimizaciones, experimentos de control, etcétera.

B.1.1 Inicializar MATLAB

MATLAB debe instalarse en la computadora donde el usuario realizará computaciones. Si un ícono está disponible en el escritorio, el usuario tiene que dar un doble clic en él mediante el botón izquierdo del mouse. Alternativamente, puede dar un clic izquierdo, en secuencia, sobre los botones/menús que se despliegan: Start -> All Programs -> Matlab -> MATLAB.

B.1.2 ¿Cómo usar MATLAB?

Cuando arranca el software MATLAB, aparece la pantalla de MATLAB con el mensaje ">>". Esta ventana se llama ventana de comando MATLAB. Aquí se muestran algunas

operaciones básicas. Para una descripción detallada, pueden consultarse los libros disponibles sobre MATLAB, por ejemplo, Pratap (2002), y usar los demos y el menú de ayuda del software.

B.1.2.1 Vectores en MATLAB

Para cualquier vector columna, o para lo que en este libro simplemente se llama vector, por ejemplo, $\mathbf{a} \equiv [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$, se utilizan los siguientes comandos:

```
>> syms a1 a2 a3
>> av = [a1; a2; a3]
av =
[a1]
[a2]
[a3]
```

donde “syms” es un comando de MATLAB para definir la variable como simbólica en lugar de numérica. Además, “av” es un nombre de variable definido por el usuario para el vector **a**. En contraste, un vector renglón, por ejemplo, $\mathbf{a} \equiv [a_1 \ a_2 \ a_3]$, puede generarse como

```
>> syms a1 a2 a3
>> av = [a1 a2 a3]
av =
[a1, a2, a3]
```

Si los elementos del vector renglón son números, por ejemplo, $\mathbf{a} \equiv [2 \ 1 \ 5]$, entonces

```
>> av = [2 1 5]
av =
2 1 5
```

La suma de dos vectores, por ejemplo, $\mathbf{a} \equiv [2 \ 1 \ 5]^T$ y $\mathbf{b} \equiv [1 \ 4 \ 2]^T$, se obtienen como

```
>> av = [2; 1; 3];
>> bv = [1; 4; 2];
>> cv = av + bv
cv =
3
5
5
```

El producto escalar de los dos vectores arriba mencionados como **a** y **b** se obtiene como

```
>> av = [2; 1; 3];
>> bv = [1; 4; 2];
>> av'*bv
ans =
12
```

Observe arriba que si ninguna variable se asigna a la izquierda de la operación, se considera como “ans”.

B.1.2.2 Matrices en MATLAB

Suponga que dos matrices, **A** y **B**, se determinan por

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}; \text{ y } \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 8 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La representación de estas matrices en MATLAB es como sigue:

```
>> am = [2 3 1; 3 5 2; 5 1 6]
am =
     2     3     1
     3     5     2
     5     1     6
>> bm = [1 2 3; 2 3 5; 8 2 9]
bm =
     1     2     3
     2     3     5
     8     2     9
```

La suma de las dos matrices **A** y **B** se determina por

```
>> am+bm
ans =
     3     5     4
     5     8     7
    13     3    15
```

mientras que la multiplicación de **A** y **B**, **AB**, se determina por

```
>> am*bm
ans =
    16    15    30
    29    25    52
    55    25    74
```

Aparte de operaciones algebraicas, pueden encontrarse también las propiedades de las matrices, como el determinante, valores propios, etc. Por ejemplo, el determinante de **A** se calcula como

```
>> det(am)
ans =
    10
```

mientras que los valores propios de **A** son

```
>> eig(am)
ans =
    9.2085
    0.3121
    3.4794
```

Adicionalmente la matriz inversa de **A** puede obtenerse mediante

```
>> inv(am)
ans =
    2.8000   -1.7000    0.1000
   -0.8000    0.7000   -0.1000
   -2.2000    1.3000    0.1000
```

Finalmente, la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas escrito en la forma de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, se determina por $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. En MATLAB, el vector \mathbf{x} se obtiene como

```
>> xv = am\bv
xv =
-3.8000
 1.8000
 3.2000
```

donde el vector \mathbf{b} es el que se usaba en la subsección B.1.2.1. Ahora puede verificarse la multiplicación de la matriz \mathbf{A} y del vector \mathbf{x} como

```
>> am*xv
ans =
 1.0000
 4.0000
 2.0000
```

que se verifica como vector \mathbf{b} .

Cabe señalar aquí que, sea lo que fuere lo que se hizo arriba en la ventana de comandos de MATLAB, también puede teclearse en un archivo .m, por ejemplo, “soln.m”, lo que luego puede ejecutarse desde la ventana de MATLAB o haciendo clic sobre “Debug->Run” en el editor de archivos. En este caso, posiblemente el software pida la configuración de ruta de MATLAB. El usuario deberá especificar la ruta donde se guardó “soln.m”. En todo caso, los resultados aparecerán en la ventana de comandos de MATLAB.

B.2



El uso de RIDIM

RIDIM es el acrónimo de *Recursive Inverse Dynamics for Industrial Manipulators* (Dinámica Inversa Recursiva para Manipuladores Industriales). Su programa de interfaz VC++ fue desarrollado para los usuarios de MS-Windows con el fin de combinar dos programas de C++, uno para resolver el problema de cinemática inversa formulado en Marothiyya y Saha (2003); el otro es el algoritmo de dinámica inversa recursiva propuesto en Saha (1999). Tanto los aspectos de la cinemática inversa como los de la dinámica inversa se analizan también en los capítulos 6 y 9 de este libro. El programa requiere de las siguientes entradas:

- Los parámetros de Denavit y Hartenberg (DH) del manipulador robótico definidos en el capítulo 5. Estos parámetros DH se guardan en un archivo.
- La configuración inicial y final del robot. Esto puede aportarse en coordenadas de nivel de la articulación o en coordenadas cartesianas.
- El tiempo que se desea utilizar para moverse desde la posición inicial hasta la final.
- El número de pasos.

Basándose en las entradas que se mencionan, el programa calcula la trayectoria por seguir y la guarda en otro archivo. Luego existe la opción de realizar la dinámica inversa, usando RIDIM para la trayectoria calculada, cuya salida (fuerzas/pares de torsión de la articulación) también se guarda en un archivo. Los resultados guardados en los archivos están disponibles para graficar u otros análisis.

B.2.1 Instalación de RIDIM

Para instalar RIDIM, baje “ridim.zip” de <http://web.iitd.ac.in/saha> o del sitio web del libro. Observe que el sistema de cómputo del usuario debe tener los siguientes dos archivos en C:\windows\system:

MFC42D.DLL
MSVRTD.DLL

Si no existen los dos archivos mencionados, hay que tomarlos del

RIDIM\SYSTEM-FILES

directorio de folders descomprimidos.

Luego, instale RIDIM siguiendo los pasos que se indican a continuación:

1. Descomprímalo en el directorio “C:\”. Es decir, durante la descompresión, seleccione “fólder diferente” y give/choose “C:\”.
2. Váyase al fólde “C:\”. Haga un clic derecho en el fólde RIDIM; luego haga clic en “propiedades” y después en “sólo lectura” (esto quitará la palomita si es que existe). Aplique y cierre la ventana.
3. Haga doble clic en “RIDIM” para entrar en el fólde. Luego, en “seleccionar todo”. Lleve la flecha del cursor sobre cualquier ícono de archivo. Haga clic derecho, luego en “propiedades”, después en “sólo lectura” (esto quitará la palomita si es que existe). Aplique y cierre la ventana.
4. Haga doble clic en el fólde “depurar”. Jale el archivo “proj” (el archivo de aplicación donde el ícono de RIDIM aparece) al escritorio.
5. Haga doble clic sobre el ícono “RIDIM”.
6. Ingrese a la entrada que desea.
7. Grafique usando MS-EXCEL o MATLAB.

Si las instrucciones mencionadas no funcionan, lo más probable es que usted no tenga acceso de escritura en el drive “C”. Pida permiso al administrador del sistema o envíe un correo electrónico al administrador del sitio web del libro.

B.2.2 ¿Cómo usar RIDIM?

1. Haga doble clic en el ícono de RIDIM (nombre del archivo: proj1) que está en el escritorio. Aparecerá una ventana con instrucciones acerca del software. Haga clic en “Next” para proceder o en “Cancel” para cerrar el programa.
Aparecerá una ventana que pedirá el número de grados de libertad. Ingrese el número de grados de libertad, por ejemplo DOF 6 ↵
donde el usuario deberá especificar cantidades subrayadas y ↵ significa “Press Next” o “Press Return Button”.
2. Después, dependiendo de la elección del usuario, el programa pedirá los parámetros DH y las propiedades del eslabón. Por ejemplo, los parámetros DH y los parámetros del eslabón se dan en la tabla B.1. Consulte los capítulos 5-9 para revisar el significado de los términos.
Todos los valores mencionados arriba deberán ingresarse para un eslabón tras otro, empezando con el eslabón 1. Después de haber ingresado todos los datos, aparecerá una ventana que indica el almacenamiento de los parámetros en un archivo “dhpara.r”. Haga clic en “Next”.

Tabla B.1 Datos de muestra que usa RIDIM (guardados en "dhpara.r")

Núm.	Jt.	a_i	b_i	α	θ_i	m_i	x_{cm}	y_{cm}	z_{cm}	I_{xx}	I_{xy}	I_{xz}	I_{yy}	I_{yz}	I_{zz}
1	R	1	0	-90	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	R	2	5	180	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	R	3	3	-90	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	R	0	7	90	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	R	0	0	90	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	R	1	2	90	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. Para la planeación de trayectorias, se piden 2 parámetros:

a) Tiempo total: por ejemplo,

Total time: 15 ↵

b) Núm. de pasos: Esto sirve para decidir sobre la precisión de los cálculos. Entre mayor sea el número de pasos, más grande será la precisión de la planeación de trayectorias. Estos datos son importantes para calcular los resultados en varias posiciones. Por ejemplo:

Núm. de pasos: 30 ↵

4. Aparecerá una ventana en la que se tendrá que hacer clic sobre la opción "Run Ikin. cpp" para la cinemática inversa y la planeación de trayectorias. Primero que nada, el programa preguntará si el usuario desea ingresar los datos en coordenadas del nivel de articulación o en coordenadas de nivel cartesiano:

Deberá especificarse cómo se desea ingresar las posiciones:

¿En coordenadas del nivel de articulación (presione 1) o en coordenadas de nivel cartesiano (presione 2)? 1 ↵

i) Si se ingresa 1, se piden los ángulos de articulación de la siguiente manera, tanto para la posición inicial como para la final:

Entrar trayectoria: Nivel de articulación (1) o nivel cartesiano (2) ↵

Entre las coordenadas iniciales y finales de articulación

[Ángulo para el par revoluto y longitud para el par prismático]

Valor inicial (grados o metros) para la articulación 1: 10 ↵

Valor inicial (grados o metros) para la articulación 2: 60 ↵

Valor inicial (grados o metros) para la articulación 3: 45 ↵

Valor inicial (grados o metros) para la articulación 4: 30 ↵

Valor inicial (grados o metros) para la articulación 5: 90 ↵

Valor inicial (grados o metros) para la articulación 6: 100 ↵

y de manera similar para la configuración final.

ii) Si se presiona 2, aparecerá una ventana donde deberán proporcionarse los siguientes datos:

Se pide la configuración inicial, por ejemplo:

1. Entre la posición del efector final

Entre (P1 P2 P3) 6 1 5 ↵

2. Entre la matriz de rotación del efector final: (Q)

Entre Q11 12 13: 0 1 0 ↵

Entre Q21 22 23: -1 0 0 ↵

Entre Q31 32 33: 0 1 0 ↵

5. Las posibles soluciones de cinemática inversa se generan y muestran, y se pide que el usuario dé un número particular de solución que deba usarse para los cálculos. Si el usuario no está seguro de cuál deba seleccionar, puede presionar cualquier tecla. En este caso, se seleccionará el número de solución por default (que actualmente es 1). Por ejemplo,

Ingrese el núm. de solución que se va a revisar: (Presione cualquier tecla para default, por ejemplo, 1): 3 ↵

Se sigue un procedimiento similar para obtener la configuración final.

(Observe que, para el caso planar de $\text{DOF} = 2$, antes de pedir la posición inicial y final, se le pregunta al usuario si necesita la solución del brazo inferior o del superior. La ventana que aparecerá tendrá el siguiente aspecto:

¿Desea usted la solución del brazo inferior (1) o superior (2)? 1 ↵

6. Después de ingresar todos los datos, las soluciones de cinemática inversa se guardan en un archivo. Luego,

TECLEAR “ok” Y LUEGO ENTER PARA CONTINUAR ok ↵

7. Aparecerá una ventana indicando que las computaciones de trayectoria se efectuaron y que los datos generados se guardaron en un archivo “ikin.r”. Se pide “RUN Idyn.cpp”. Presione “ok”.
8. Nuevamente aparecerá una ventana con las opciones “Ikin.cpp” e “Idyn.cpp”. Haga clic en la segunda opción.
9. Aparecerá una ventana para Idyn.cpp que pregunta por el vector de gravedad. Por ejemplo,

¿Vector de gravedad en el 1er sistema coordenado (g_x g_y g_z)? 0 0 -1 ↵

10. Los resultados de dinámica inversa se guardan en un archivo y el programa sale automáticamente. Aparecerá una ventana más que indica que el par de torsión de la articulación o los valores de fuerza están guardados en el archivo “Idyn.xls” en el folder de RIDIM en el directorio C: que puede graficarse.
11. Para cerrar el programa, haga clic en el ícono “X” en el lado derecho de la pantalla.

Con el fin de usar el módulo de “cinemática directa” de RIDIM para verificar los resultados de cinemática inversa arriba mencionados, pueden seguirse los siguientes pasos:

1. Haga un doble clic en “forwardkin.exe” en el folder “C:\debug” o en una ventana por medio del ícono de RIDIM.
2. Aparecerá una ventana donde se pregunta si el usuario desea usar los parámetros DH guardados en el archivo “dhpara.r” o si desea ingresar nuevos valores, por ejemplo, Valores de parámetros DH
¿Desea leer el archivo dhpara.r? (Presione 1)
¿O desea crear uno? (presione 2) 2 ↵
3. Si se ingresa 1, se tomarán los valores ingresados por medio del software de RIDIM. Si se presiona 2, se solicitarán primero los grados de libertad y después los parámetros de la articulación, por ejemplo:
Ingrese el núm. de grados de libertad: 3 ↵
Ingrese los parámetros DH

Longitud del eslabón (a[i]) Longitud del offset (b[1]) Ángulo de giro en grados (alfa[i]):

eslabón 1 1 2 90 ↵

eslabón 2 3 4 45 ↵

eslabón 3 1 1 0 ↵

4. Después de ingresar los datos, se pide que el usuario elija si desea revisar las soluciones guardadas en "ikinsoln.r" o si quiere ingresar nuevos valores de articulación (θ). Desea revisar los valores de articulaciones guardados en ikindsoln.r (presione 1) O desea ingresar sus propios valores (presione 2) 2 ↵
5. Si se ingresa 1, se realiza la cinemática directa de la solución guardada. Esto sigue exactamente el procedimiento que se explica en el inciso 3. En contraste, si se ingresa 2, entonces se piden los valores individuales theta; por ejemplo

Entre th[1] (grados): 45 ↵

Entre th[2] (grados): 60 ↵

Entre th[3] (grados): 30 ↵

6. Basados en la entrada, los resultados de cinemática directa, a saber, la matriz de orientación del efector final y la posición, se visualizan, es decir,

La matriz de rotación es:

0.33968	-0.118764	0.933013
-0.16032	-0.984789	-0.0669873
0.926777	-0.126826	-0.353553

La posición EE es:

5.86889
-1.28797
5.1713

Presione ok e ingrese ok ↵

B.2.3 Una ilustración con PUMA 560

El robot PUMA 560 se presenta en la figura B.1 y sus parámetros DH se muestran a su lado.

Para usar el programa de cinemática inversa, se usan las siguientes entradas:

Posición del efector final:

$$\mathbf{p} = [0.67837 \quad 0.24867 \quad 0.07662]^T$$

Orientación del efector final

$$\mathbf{Q} = [-$$

0.84086 0.25393 0.47799; 0.54115 0.37712 0.75163; 0.01060 0.89067 -
0.4545]

Los valores de \mathbf{p} y \mathbf{Q} se toman de la salida de una solución de cinemática directa cuando los ángulos de articulaciones se toman como

$$\theta = [5 \quad 30 \quad 10 \quad 45 \quad 90 \quad 60]^T \text{ grados}$$

Esto significa que una de las soluciones del programa de cinemática inversa deberá coincidir con los valores arriba mencionados, lo que tiene es correcto según la siguiente salida del módulo de cinemática inversa de RIDIM:

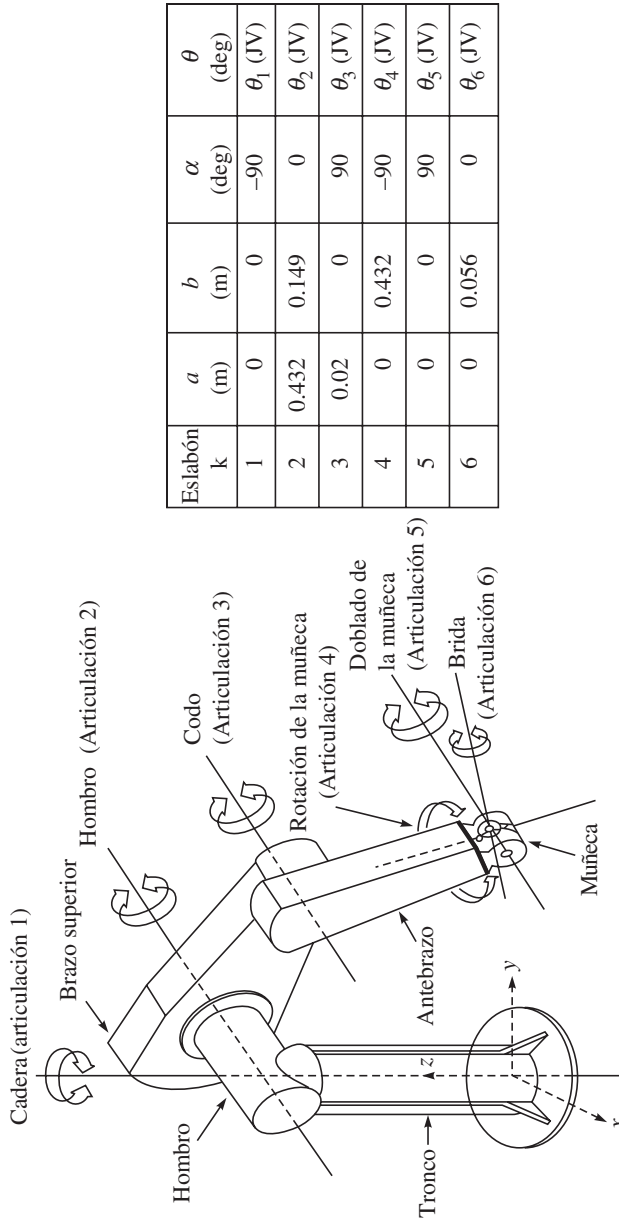


Figura B.1 El robot PUMA 560 y sus parámetros DH

Las soluciones son:

Sol núm.: 1	5	30	10	45	90.0002	60.0001
Sol núm.: 2	-149.82	-132.601	10	-83.9618	24.3137	-19.1774
Sol núm.: 3	5	-47.3984	164.698	77.6014	46.3851	-12.3228
Sol núm.: 4	-149.82	150	164.698	-155.036	75.9605	70.9998
Sol núm.: 5	5	30	10	-135	-90.0002	-120
Sol núm.: 6	-149.82	-132.601	10	96.038	-24.3137	160.822
Sol núm.: 7	5	-47.3984	164.698	-102.399	-46.3851	167.677
Sol núm.: 8	-149.82	150	164.698	24.9645	-75.9605	-109

Ingresa el número de solución para revisar (presione cualquier tecla para el default, p.ej. 1):

Ahora se pide que el usuario seleccione una determinada solución, o bien se selecciona una por default. Observe que el núm. de solución 1 (indicado arriba como “Sol núm. 1”) es el que corresponde a los valores de entrada. Entonces, para demostrar el módulo de cinemática inversa de RIDIM, se generan las trayectorias de posición, velocidad y aceleración basadas en las soluciones de cinemática inversa. Por ejemplo, vamos a usar los siguientes valores:

Condiciones iniciales: $\theta_i(0) = 0$; condiciones finales: $\theta_i(T) = 180^\circ$ para $i = 1, \dots, 6$; duración de tiempo $T = 10$ seg.

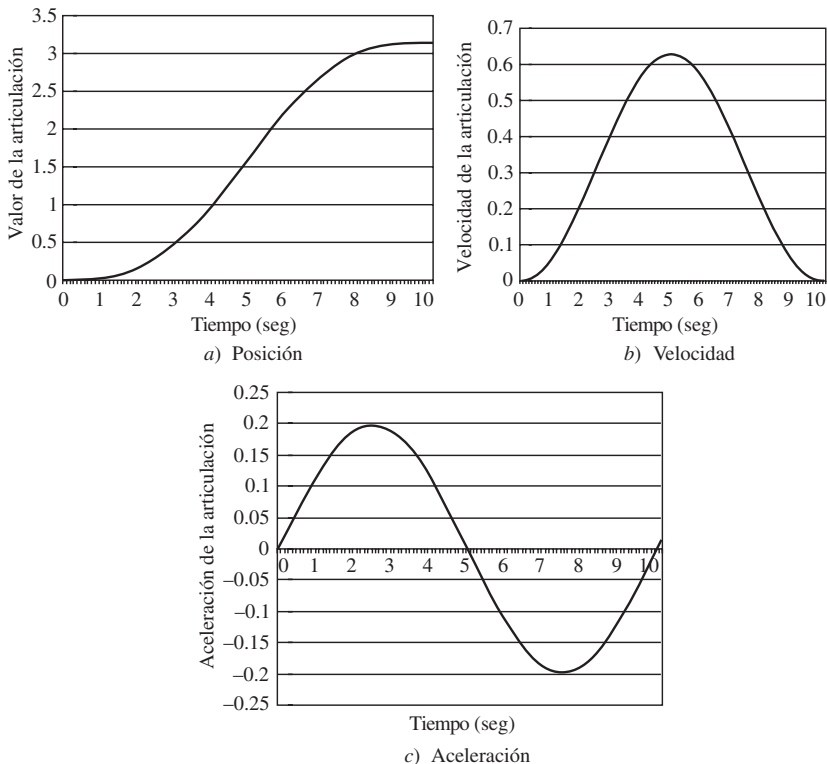


Figura B.2 Trayectoria de la articulación: a) posición, b) velocidad y c) aceleración

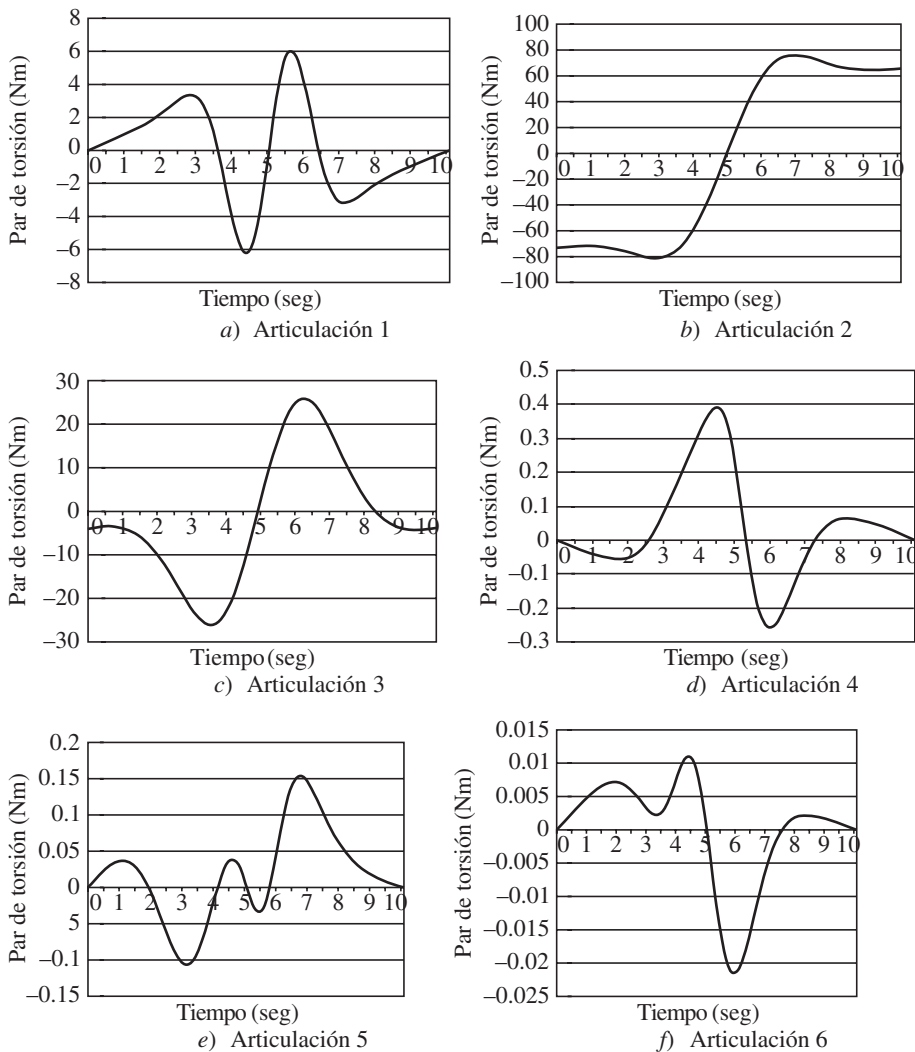


Figura B.3 Valores de par de torsión en a) articulación 1, b) articulación 2, c) articulación 3, d) articulación 4, e) articulación 5, f) articulación 6

Las trayectorias generadas para cada articulación se muestran en la figura B.2(a-c). Luego se obtienen los resultados de la dinámica inversa para el PUMA 560, que se encuentran graficados en la figura B.3(a-f). Las gráficas se generaron mediante el programa MS-Excel.

RESUMEN

En este apéndice se explica el uso de MATLAB y RIDIM. Esto le ayudará al lector a resolver algunos de los ejemplos y ejercicios que se presentan en los capítulos sobre cinemática y dinámica.



Apéndice



Proyectos de estudiantes: Estudios de caso

En este apéndice se presentan varios estudios de caso con los proyectos de estudiantes, donde están involucrados síntesis, diseño, fabricación y control de brazos y mordazas robóticas, tanto aquellos que se construyeron para participar en concursos de robots, como los que fueron realizados como parte de proyectos de licenciatura y posgrado. Se enfatiza fuertemente el primer conjunto, ya que involucra a todas las fases del ciclo de vida de un producto y, por ende, se presenta en primer lugar.

C.1



Robots para ROBOCON

ROBOCON, la abreviación de ROBOTic CONtests, es una competencia robótica de estudiantes, organizada cada año por la Asian Broadcasting Union (ABU). A pesar de que era una competencia robótica popular en Japón entre estudiantes de licenciatura, se abrió para otros países asiáticos en 2002. Desde entonces, Doordashan (compañía de televisión de la India) organiza una competencia en la India para seleccionar un equipo representativo de ese país. Normalmente, el campeón de la India representa a su país en las competencias ABU-Robocon que se llevan a cabo en diferentes países de Asia. Hasta la fecha, Japón (2002), Tailandia (2003), Corea del Sur (2004), China (2005), Malasia (2006) y Vietnam (2007) han albergado el evento. La India presentó la Robocon de 2008 en Pune.

Bajo la dirección del autor, equipos del IIT Delhi han participado en el ROBOCON de la India desde 2003. En la siguiente subsección se presentan experiencias de proyectos

de ROBOCON. De manera ilustrativa, se menciona que en la competencia de 2007, la ITT Delhi se quedó con el título de campeona de la India.

C.1.1 La experiencia de 2007

En esta competencia se permitieron dos tipos de robots. Uno es el “automático”, cuya tarea es transferir bloques desde los bordes exteriores del polígono de 10 lados en el campo de juego, como se muestra en la figura C.1, hasta los vértices del triángulo en el centro.

Se trata de robots preprogramados. Por ende, se usa el término “automático”. El otro tipo se llama “manual”, que puede controlarse por medio de una palanca de mando o de un conmutador por parte de un operario. La tarea de este robot es transferir bloques desde las esquinas del campo cuadrado a los bordes del polígono de 10 lados. Cada transferencia exitosa acumula puntos y el juego prosigue. Más que en las reglas exactas, en este libro se hace hincapié en el diseño, la fabricación y los aspectos de programación.

Tanto los robots automáticos como los manuales tienen una mordaza para sostener los bloques de aproximadamente 300 mm de diámetro. Es importante sintetizar un mecanismo adecuado que debe sostener los bloques que están hechos de un material suave, sin aplastarlos y sin que se resbalen. El segundo aspecto es la elevación y colocación. Mientras que se usa un arreglo de poleas para el robot automático que se presenta en la figura C.2, se prefiere un

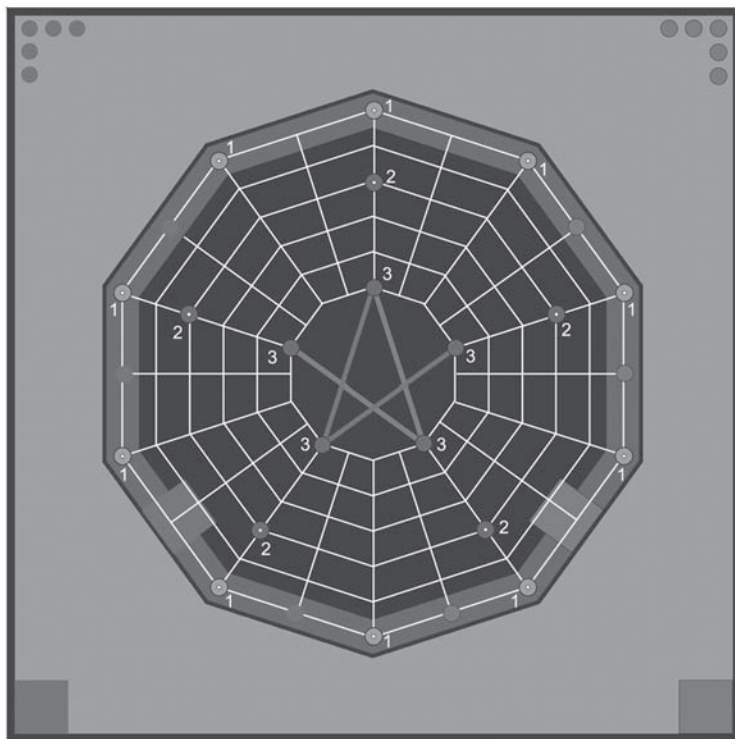


Figura C.1 El campo de juego de 2007

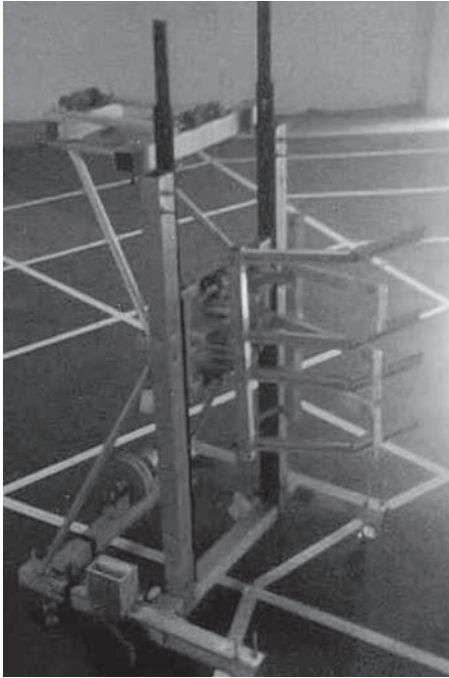


Figura C.2 Robot automático de 2007

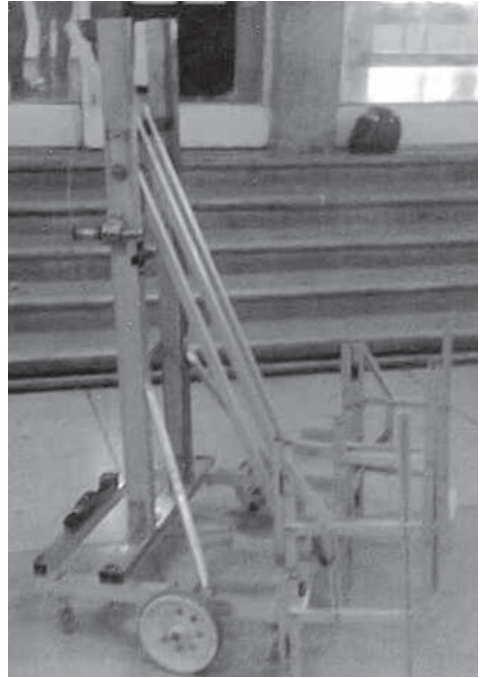


Figura C.3 Robot manual de 2007

mecanismo de un paralelogramo de cuatro barras para el robot manual de la figura C.3. Este último puede extenderse casi medio metro enfrente del robot para poder colocar el bloque dentro de la línea de límite del polígono de 10 lados. Una vez terminado el diseño, el siguiente nivel de desafío es su fabricación, ensamble, programación y funcionamiento exitoso.

Según la experiencia del autor, normalmente deberán revisarse los siguientes aspectos para completar este tipo de proyecto con éxito:

1. Una planeación correcta, tomando en cuenta las 5 P (*Proper Planning Prevents Poor Performance*, la planeación correcta impide el desempeño defectuoso).
2. Cada estudiante debe llevar una bitácora de proyecto para registrar actividades diarias, esbozos, informaciones, etcétera.
3. Seguimiento estricto de un diagrama de Gantt bien planeado. Un típico diagrama Gantt se presenta en la figura C.4. En caso de que no pueda cumplirse con las fechas límite, deberán averiguarse las causas y deben tomarse medidas sin redefinición del diagrama de Gantt. De hecho, el calendario actual podrá colocarse debajo del calendario planeado.
4. Es de extrema importancia que los estudiantes aprendan cómo trabajar en grupo. En particular, los coordinadores de diferentes tareas, por ejemplo, mecánico, eléctrico, fabricación, etc., deberán saber cómo distribuir el trabajo entre otros miembros de sus grupos. De lo contrario, ellos terminarán haciendo la mayor parte de los trabajos mientras que otros no tendrán trabajo. Este último grupo podrá frustrarse e incluso abandonar el proyecto.

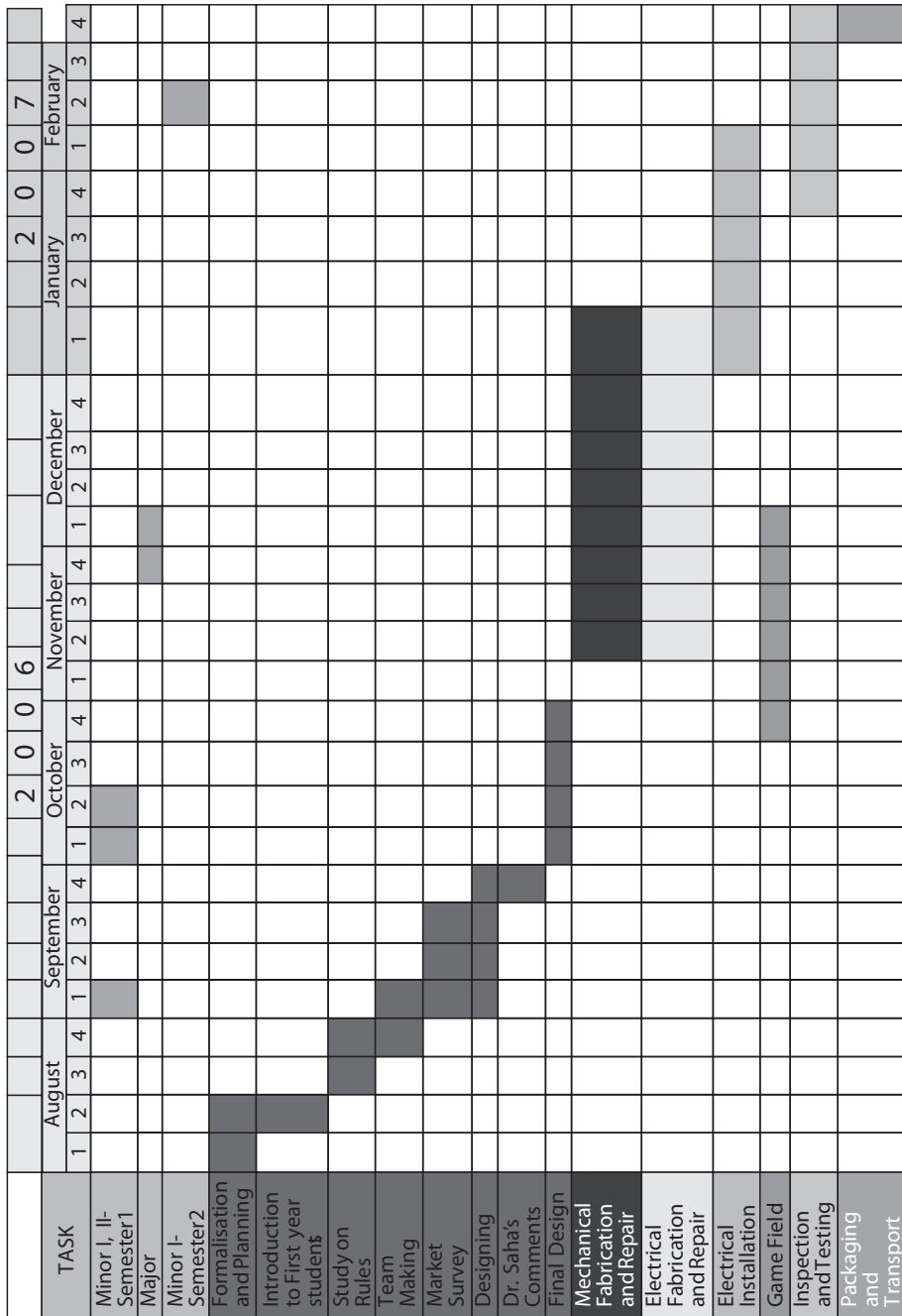


Figura C.4 Diagrama de Gantt de los participantes en Robocon 2007 (IIT Delhi)

5. Por encima de todo, son obligatorios valores como dedicación, sinceridad, honestidad y pensamiento positivo entre los miembros para una participación exitosa donde los robots realmente se muevan y cumplan con sus tareas, más que simplemente ganar el juego.

C.2**Brazo robótico planar suspendido (HaPRA)**

Como parte de dos proyectos de B. Tech, principalmente, se desarrolló el HaPRA de tres grados de libertad. En el primer proyecto (Venugopal y Shabeer, 1996), se consideraba la tarea industrial de levantar objetos cilíndricos, por ejemplo, cabezas de pistón, de un transportador a una máquina y viceversa, como se ilustra en la figura C.5. La configuración del brazo del robot, junto con sus dimensiones, etc., fue evaluada en este primer proyecto, que fue presentado en un congreso (Venugopal *et al.*, 1997).

En el segundo proyecto de B. Tech (Sharma y Ashutosh, 1997), se realizó la fabricación de este brazo. Entonces se hizo hincapié en el aspecto de bajo costo. Puesto que la carga

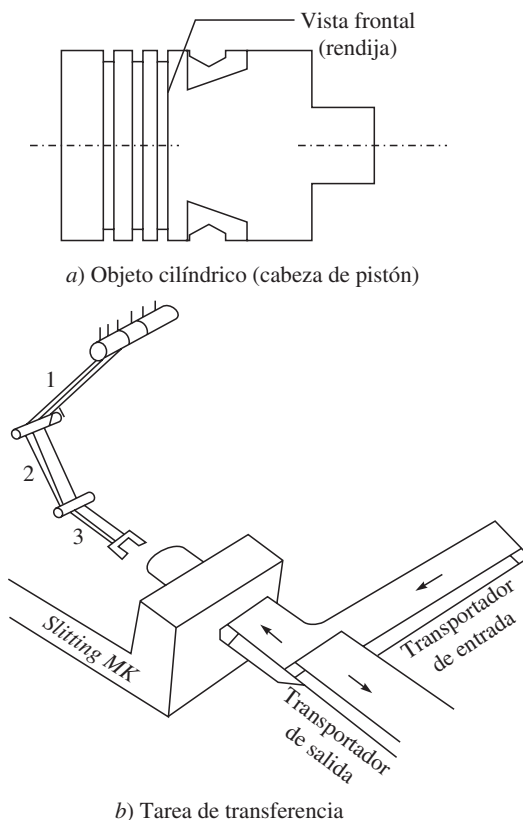


Figura C.5 Una tarea industrial de un brazo de robot



Figura C.6 Fotografía del HaPRA y su controlador

efectiva sólo era de aproximadamente 500 g, se eligieron accionamientos por cadena de fácil disponibilidad, a saber, cadenas de bicicleta. El control completo se logró mediante el uso de motores de pasos y una PC. El brazo se presenta en la figura C.6. El diseño detallado y el trabajo de desarrollo se presentaron en otro congreso (Baghla *et al.*, 1999).

C.3



Mordaza para objetos cilíndricos

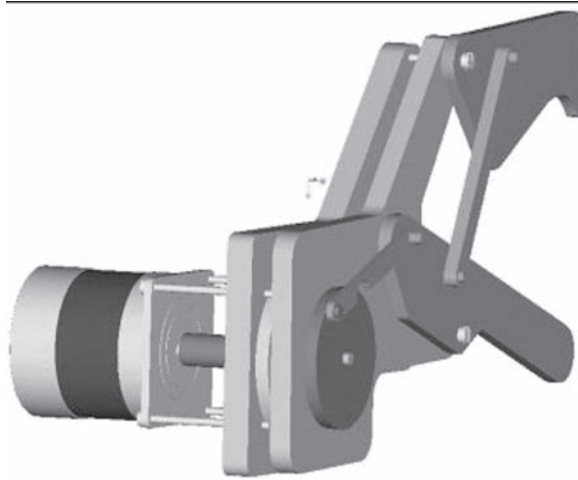
La mordaza fue diseñada en otro proyecto de B. Tech, teniendo en cuenta que lo mismo puede usarse para el HaPRA que se explicó en la sección C.2 (Agarwal y Singh, 2004). Para una gama de formas cilíndricas, la mordaza se sintetiza como un mecanismo de seis barras, como se presenta en la figura C.7a). Su análisis cinemático completo se realizó utilizando la opción de movimiento del software Pro-E. La mordaza fue fabricada y puesta en interfaz con un motor de pasos para demostrar sus capacidades de movimiento, como se muestra en la figura C.7b). El proyecto recibió en el ITT Delhi el premio como mejor proyecto de hardware de B. Tech Padamshri Manmohan Suri para el año de 2004.

C.4

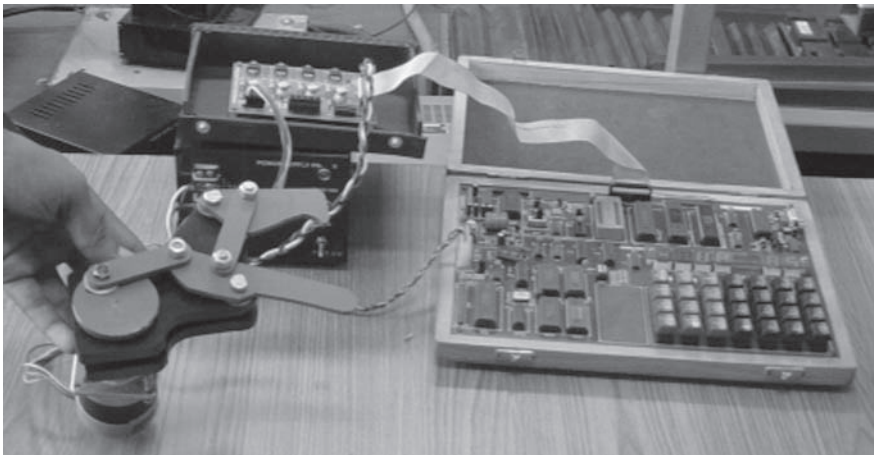


Robot de accionamiento directo

Este robot de accionamiento directo, como se presenta en la figura C.8, fue desarrollado en dos proyectos M. Tech. En el primero de ellos se realizaron los análisis cinemáticos y



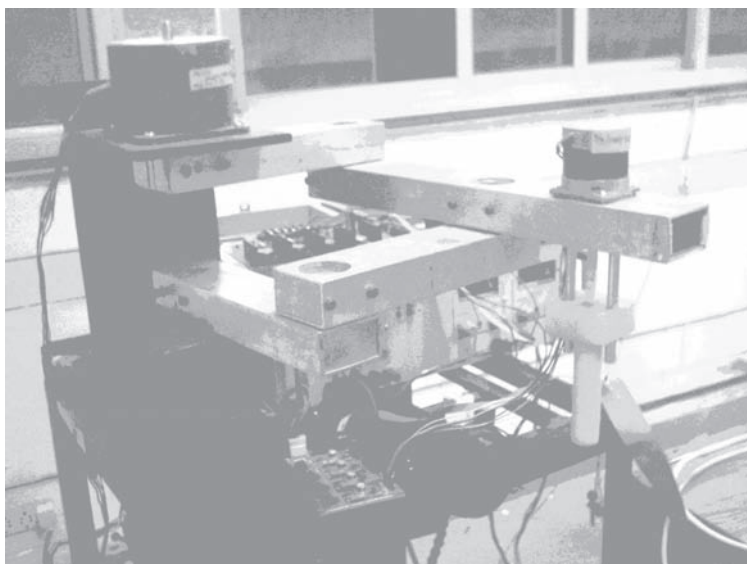
a) Dibujo de Pro-E)



b) Interfaz de control

Figura C.7 Mordaza para objetos cilíndricos

dinámicos, y se fabricó el brazo que contiene dos grados de libertad (Barma, 2001). Posteriormente, se agregó un tercer brazo en el marco de otro proyecto M. Tech (Ramvath, 2004), que deberá ser útil para la aplicación real del robot en operaciones para recoger y colocar. La metodología detallada de diseño fue presentada en un congreso nacional (Ramvath *et al.*, 2005).



a) Robot de accionamiento directo



b) Tercer eje (dibujo de Pro-E)

Figura C.8 Brazo de robot de accionamiento directo

RESUMEN

En este apéndice se presentan varios sistemas robóticos desarrollados en el marco de proyectos de estudiantes. Esto hará que el lector entienda los requerimientos de hardware y software para construir su propio sistema robótico.



Referencias

- Agarwal, A. y Singh, S., "Design and Manufacturing of Robotic Gripper". *B. Tech Project Report*, ME Dept, IIT Delhi, mayo de 2004.
- Angels, J. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*, Springer-Verlag, Nueva York, 2003.
- Ángeles, J. y Lee, S., "The formulation of dynamical equations of holonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement", *ASME J. Appl. Mech.*, V. 55, marzo de 1988, pp. 243-244.
- Ascher, U.M., Pai, D.K. y Cloutier, B.P., "Forward dynamics, elimination methods, and formulation stiffness in robot simulation", *Int. J. Rob. Res.*, V.16, N. 6, 1997, pp. 749-758.
- Baghla, D., Anurag, A., Saha, S.K., Sharma, Prasenjit, S. y Mehta, G.R., "Development of a hanging planar robotic arm (HaPRA)", *Proc. Of the 11a. ISME Conf.*, IIT Delhi, 3-5 de febrero de 1999, pp. 93-98.
- Barma, D., "Design and Fabrication of a Planar Robot", diciembre de 2001.
- Bishop, P.H., *The mechatronics Handbook*, CRC Press, Nueva York, 2002.
- Bhangale, P.P., *Dynamics Based Modelling, Computational Complexity, and Architecture Selection of Robot Manipulators*, Ph. D thesis, IIT Delhi, 2005.
- Canudas de Wit, C. Siciliano, B., Bastin, G. (Eds.), *Theory of Robot Control*, Springer-Verlag, Nueva York, 1996.
- Chaudhary, H. y Saha, S.K., "Constraint wrench formulation for closed-loop systems using two-level recursions", *ASME J. of Mechanical Design*, 2006.
- Chaudhary, H. y Saha, S.K., "Matrix formulation of constraint wrenches for serial manipulators", *CD-Proc. IEEE Int. Conf. on R&A*, Barcelona, España, 18-22 de abril de 2005, pp. 4647-4652.

- Corke, P.I., *Visual Control of Robots: High-performance Visual Servoing*, Research Studies, Press Ltd., Somerset, Inglaterra, 1996.
- Craig, J.J., *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, Addison-Wesley, Singapore, 1986.
- Critchlow, R.H., *Introduction to Robotics*, McMillan Publishing Company, Nueva York, 1985.
- Cugy, A. y Page, K., *Industrial Robot Specifications*, Kogan Page, Londres, 1984.
- Cyril, X., *Dynamics of Flexible-Link Manipulators*, Ph. D thesis, McGill University, Canadá 1988.
- Denavit, J. y Hartenberg, R.S., "A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices", *ASME J. Appl. Mech.*, V. 23, 1955, pp. 215-221.
- Dorf, R.C., *International Encyclopedia of Robotics*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1988.
- Dorf, R.C., *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, Nueva York, 1992.
- Fu, K.S., González, R.C. y Lee, C.S.G., *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*, McGraw-Hill, 1987.
- Fuller, J.L., *Robotics: Introduction, Programming, and Project*, Prentice Hall, Nueva Jersey.
- Howards, B. y Erlemeier, T., "Interface design for offline robot programming with the use of virtual simulation", www.public.iastate.edu/~terlemei/FinalPaper.pdf, 30 de abril de 2007.
- Gopal, M., *Control Systems-Principles and Design*, Tata McGraw-Hill, Nueva Delhi, 1997.
- Ghosal, A., 2006, *Robotics: Fundamental Concepts and Analysis*, Oxford University Press, Nueva Delhi, 2006.
- Histand, M.B. y Alciatore, D.G., *Introduction to Mechatronics and Measurement Systems*, McGraw-Hill, Nueva Delhi, 1999.
- Huston, H. y Passarello, C.E., "On constraint equation-A new approach", *ASME J. Appl. Mech.*, V. 41, 1974, pp.1130-1131.
- Kane, T.R. y Levinson, D.A., "The use of Kane's dynamical equations for robotics", *Int. J. Rob. Res.*, V. 2, N. 3, 1983, pp. 3-21.
- Khan, W.A., Krovi, V.N., Saha, S.K. y Ángeles, J., "Recursive kinematics and inverse dynamics for a planar 3R parallel manipulator", *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, V. 127, Issue 4, septiembre de 2005, pp. 529-536.
- Kuo, B.C., *Automatic Control Systems*, 6a. Ed. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1991.
- Klafter, R.D., Chmielewski, T.A. y Negin, M., *Robotic Engineering-An Integrated Approach*, Prentice-Hall India, Nueva Delhi, 1994.
- Koivo, A.J., *Fundamental for Control of Robotic Manipulators*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1989.
- Koren, Y., *Robotics for Engineers*, McGraw-Hill, Nueva Delhi, 1987.
- Koteswara Rao, A.B., Saha, S.K. y Rao, P.V.M., "Dynamics modeling of hexaslides using the decoupled natural orthogonal complement matrices", *Int. J. of Multibody System Dynamics*, V.15, 2006, pp.159-180.
- LaSalle, J. y Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with applications*, Academic Press, Nueva York, 1961.

- Mair, G.M., *Industrial Robotics*, Prentice Hall, Nueva York, 1988.
- Marothiya, P. y Saha, S.K., "Robot inverse kinematics and dynamics algorithms for windows, Recent Trends in Manufacturing", *Proc. Of the Conference on Advances and Recent Trends in Manufacturing*, Kalyani Govt. Eng. College, WB, India, Elite Publishing House, Nueva Delhi, 2003, pp. 229-237.
- Matlab, MATLAB- The Language of Technical Computing, Versión 6.5, lanzamiento 13, 2002.
- Mittal, R.K. y Nagrath, I.J., *Robotics and Control*, Tata McGraw-Hill, Nueva Delhi, 2003.
- Mohan, A. y Saha, S.K., "A computationally efficient and numerically stable simulation algorithm serial robots with flexible links", *CD-Proc. Of the ECCOMAS Thematic Conf. (Multibody Dynamics 2007)*, Milán, Italia, 25-38, junio de 2007, pp. 1-20.
- Mohan, A. y Saha, S.K., "A recursive numerically stable, and efficient simulation algorithm for serial robots", *Int. J. of Multibdy System Dynamics*, V. 17, N. 4, Mayo de 2007, pp. 291-319.
- Molone, R., *Literature, Robot In, International Encyclopedia of Robotics* (Editor a cargo: R.C. Dorf), John Wiley & Sons, Nueva York, 1988, pp. 779-791.
- Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice-Hall of India, Nueva Delhi, 1987.
- Onwubolu, G.C., *Mechatronics-Principles and Applications*, Elsevier, Nueva York, 2005.
- Pratap, R., *MATLAB 6: A Quick Introduction for Scientists and Engineers*, Oxford University Press, Nueva York, 2002.
- Ramavath, P., "Design and Analysis of a Parallel Drive Robot", *M. Tech Projects Report*, ME Dept., IIT Delhi, mayo de 2004.
- Ramavath, P., Barma, D., Saha, S. K., Seth, B. y Jaitly, D., "Development of a direct-drive based tree-DOF robot", *Nat. Conf. on Industrial Problems on Mechines and Mechanisms*, IIT Kharagpur, 24-25, febrero de 2005, pp. 67-74.
- Saha, S.K., "Dynamic simulation of serial manipulators using the UDU^T decomposition of the inertia matrix", *Int. J. of Multibody System Dynamics*, V. 9, N.1, febrero de 2003, pp. 63-85.
- Saha, S.K., "Dynamic modelling of serial multi-body systems using the decoupled natural orthogonal complement matrices", *ASME J. of Applied Mechanics*, V. 66, diciembre de 1999, pp. 986-996.
- Saha, S.K., "A decomposition of the manipulator inertia matrix", *IEEE On Robotics and Automation*, V. 13, N. 2, abril 1997, pp. 301-304.
- Saha, S.K., "Inverse dynamics algorithm for space robots", *The ASME J. of Dynamic Systems, Measurment and Control*, V. 118, septiembre 1996, pp. 625-629.
- Saha, S.K. y Schiehlen, W.O., "Recursive kinematics and dynamics for closed loop multi-body systems", *Int. J. of Mechanics of Structures and Machines*, V. 29, N. 2, agosto de 2001, pp. 143-175.
- Saha, S.K. y Ángeles, J., "Dynamics of nonholonomic mechanical systems using a natural orthogonal complement", *ASME J. Appl. Mech.*, V. 58, marzo de 1991, pp. 238-243.
- Sciavicco, L. y Siciliano, B., *Modelling and Control of Robot Manipulator*, Springer-Verlag, Londres, 2000.
- Shabana, A.A., *Computational Dynamics*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1994.
- Shampine, L.F., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Chapman and Hill, Nueva York, 1994.

- Sharma, P. y Ashutosh Kumar, Design of an Industrial Robot, B. Tech Project Report, ME Dept., IIT Delhi, mayo de 1997.
- Smith, S.D., "Art Robotic", International Encyclopedia of Robotics, John Wiley & Sons, Nueva York, 1988, pp. 81-87.
- Spong, M. W., Hutchison, S. y Vidyasagar, M., 2006, *Robot Modeling and Control*, Wiley India, Nueva Delhi, 2006.
- Stewart, G.E., *Introduction to Matrix Computations*, Academic Press, Inc., Nueva York, 1973.
- Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, Orlando, Florida, 1995.
- Stadler, W., *Analytical Robotics and Mechatronics*, McGraw-Hill, Nueva Delhi, 1995.
- Todd, T.J., *Walking Machines*, Kogan Page, Londres, 1985.
- Tsai, L., *Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*, John Wiley & Sons, Nueva York, 1999.
- Spong, M.W., Hutchison, S. y Vidyasagar, M., 2006, *Robot Modeling and Control*, Wiley India, Nueva Delhi, 2006.
- Venugopal, S. y Shabeer, S., *Simulation and Animation for Robot Design*, ME Dept., IIT Madras, mayo 1996.
- Venugopal, S. y Saha, S.K., "Interactive design for industrial robots", *Proc. Of the AIMTDR Conf.*, Warangal, 9-11 de enero de 1997, pp. 201-205.
- Walker, M.W. y Orin, D.E., "Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms", *ESME J. Dyn. Sys., Meas. And Cont.*, V. 104, septiembre de 1982, pp. 205-211.
- Yoshikawa, T., *Foundation of Robotics*, The MIT Press, Massachusetts, 1990.



Índice analítico

Símbolos

(ADC), 21
(DAC), 22
(DH) parámetros, 100
(DOF), 76
(ISO), 5

A

Aceleración angular, 188
Aceleración lineal, 189
Actuador, 18
Adquisición de imágenes, 68
AGV, 6
Algoritmo recursivo de Newton-Euler, 186
Algoritmos de dinámica, 195
Amplificador, 23
Análisis
 de aceleración, 143
 de posición inversa, 121
 de velocidad, 130
Ángulos de Euler, 89
Arquitectura, 76
Articulación
 cilíndrica, 78
 de par superior, 77
 de par inferior, 77

 esférica, 78
 helicoidal, 77
 planar, 79
 prismática, 77, 134
 revoluta, 77, 134
 “universal”, 79

Articulaciones, 76

Articulado, 26

“atan2”, 123, 338

B

Brazo articulado, 126, 136
Brazo planar de tres eslabones,
 122

C

Cadena cinemática, 79
Cálculo recursivo, 149
Capacitivo, 63
Cartesiano, 24
Centro de masa, 164
Cilíndrico, 25
Cinemática, 112
 directa, 112
 inversa, 112, 122

Clasificación, 24
 de sensores, 52
 Computación directa, 186
 Computación regresiva, 189
 Control, 29
 Coordenadas generalizadas, 172
 Coseno de dirección, 85

D

DeNOC, 138
 Deslizamiento, 48
 Desplazamiento virtual, 157
 Detector de deformación, 61
 Dinámica, 163, 205
 directa, 198
 directa recursiva, 229
 inversa, 195
 inversa recursiva, 221

E

Economía, 10
 Ecuaciones de movimiento, 176, 183, 210
 Efecto final, 18
 Eléctrico, 33, 38
 Elipsoide de fuerza, 161
 Encóder, 53
 Energía cinética, 173
 Energía potencial, 176
 Engranajes, 20
 Escalar, 340
 Escribir las ecuaciones de Newton y Euler, 164
 Esférico, 26
 Eslabones, 76
 Estática, 146
 Euler-Lagrange (EL), 172, 206

F

Formulación Newton-Euler, 181
 Fuerza generalizada, 216
 Función de transferencia, 344

G

Gantry, 27
 Grado de libertad, 80

H

HaPRA, 361
 Híbrido, 41
 Hidráulico, 32, 36

I

Imán permanente, 40, 44
 Independencia lineal, 342
 Inducción, 47
 Inductivo, 63
 “Inferior”, 77
 Interruptor de límite, 62
 Inverso, 343

J

Jacobiano, 130, 134, 157

L

Leyes de robótica, 2
 LVDT, 56

M

Manipulador, 17
 MATLAB, 346
 Matriz
 de inercia convectiva (MCI), 213
 de inercia generalizada (GIM), 211
 de producto cruz, 341
 de propagación de torsión, 209
 jacobiana, 141
 Mecanismos, 21
 Modelado dinámico, 206
 Momento, 147
 angular, 182
 de inercia, 166
 lineal, 181
 Momentos principales de inercia, 168
 Monofase, 47
 Motores
 CA, 46
 CD, 42
 de paso, 39
 síncronos, 48
 Muñeca, 129

N

Neumático, 32, 33
 Newton-Euler (NE), 206

O

Offline, 30
 Online, 30
 Orientación, 85

P

Par de torsión o fuerza de articulación, 190
Pares cinemáticos, 77
Población, 10
Polar, 26
Polifase, 47
Postura, 83
Potenciómetro, 56
Producto cruz, 340
Propagación de velocidad de articulación, 209
Proximidad, 53
PUMA, 138

R

Reluctancia variable, 40
Repercusión negativa, 37
Restricciones cinemáticas, 208
RIDIM, 222, 349
Robocon, 357
Robot PUMA, 137
Robots caminantes, 7
Robots paralelos, 7

S

SCARA, 28
Seguridad, 11
Selección de motores, 49
Selección de sensores, 72
Sensor
 de desplazamiento de semiconductor, 65
 de efecto Hall, 59
 de proximidad, 63
 piezoeléctrico, 62
Sensores, 21, 52
 de aceleración, 60
 de fuerza, 61
 de posición, 53
 de velocidad, 59
Simulación, 198, 229, 232

Sin escobillas, 45
Sincros, 58
Singularidad, 141
Sistema de visión, 66
Sistemas de DH, 105
Sistemas de resolución, 58
Solución algebraica, 122
Solución geométrica, 124
Subsistema(s), 14
 de control, 17
 de movimiento, 16
 de reconocimiento, 16

T

Tacómetro, 59
Tacto, 52
Tensor de inercia, 166
Teorema de ejes paralelos, 167
Teorema de ejes perpendiculares, 167
Términos de vectores de inercia convectiva (VCI), 215
Trabajo virtual, 157
Transformación homogénea, 94
Transformaciones, 76
Transmisión, 20
Trifásico, 48

U

UNIMATION, 2
Uso de robots, 8

V

Valores propios, 343
Vectores, 339, 340
 propios, 343
 unitarios, 339
Velocidad angular, 187
Velocidad lineal, 188
Visión, 53

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor sponsor: Pablo Roig Vázquez

Coordinadora editorial: Marcela Rocha Martínez

Editora de desarrollo: Karen Estrada Arriaga

Supervisor de producción: Zeferino García García

Diseño de portada: María Josefa Vaca García

Traducción: Dr. Thomas W. Bartenbach

INTRODUCCIÓN A LA ROBÓTICA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2010, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A

Pisos 16 y 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,

Delegación Álvaro Obregón

C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0313-8

Copyright © 2008 de la primera edición en inglés de *Introduction to robotics*, by Subir
Kumar Saha, published by Tata McGraw-Hill Education Private Limited, NOIDA, India.
ISBN: 978-0-07-066900-0

All rights reserved

1234567890

109876543210

Impreso en México

Printed in Mexico