جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الرياضيات العامة

للصف الأول الثانوى الفنى
(زراعى - صناعى - تجارى)

٢٠١٠ / ٢٠١١ م

جمهورية مصر العربية
وزارة التربية والتعليم
قطاع الكتب

الرياضيات العامة

للصف الأول الثانوي الفني
[صناعي - زراعي - تجاري]

تأليف

أ/ رمضان حنفي محمود   أ / عبد الرحمن عبد المنعم عبد الرحمن

مراجعة

أ / محمد أسامة زيد شريف
مستشار الرياضيات

للعام ٢٠١٠ / ٢٠١١ م

تقـديم

نقدم هذا الكتاب إلي زملائنا السادة مدرسي الصف الأول من التعليم الفني ، وقد راعينا أن تتفق طريقة عرض لمحتوي الرياضيات في هــذا الكتاب وما يتفق مع أهداف تطوير التعلـيم الفنـــي مـــن حيــث الفهــم والمهارات الأساسية بما يتناسب مع أحتياجات الطلبة من مهارات عقليــة وذهنية في المجالات العلمية المختلفة .

وزودنا الكتاب بعدد وافر من الأمثلة المحلولة والتمارين والرســوم التوضيحية والتطبيقات الحياتية وكنا حريصين علــى أن يقــوم الطالــب بأجراء العمليات الحسابية بأستخدام الألة الحاسبة والتي لا غنى للطالــب عنها في مجالات الحياة العملية المختلفة .

ويأمل المؤلفون من الزملاء المدرسين أن يهتموا بالمعني والفهــم عند الشرح والتوضيح للطلبة وعدم التسرع في إعطـــاء قواعــد يتبعهــا الطلبة بصورة آلية إذ إن المهارات في الرياضيات تكتسب بصورة أفضل إذا كانت مصحوبة بالفهم من جانب الطلبة وشعورهم بالحاجة إلــى مــا يدرس لهم .

ولقد زودنا الكتاب بعدد وافر من الأمتحانات وأجوبتها .

نسأل الله أن يوفقنا جميعاً لخدمة وطننا العزيز .

المؤلفون

الأهداف العامة لتدريس الرياضيات

١-التوسع في تزويد الطلبة بالمعلومات الرياضية التــي تجـعل الطالب مــواطن صالح يفهم ما يدور حوله ويدركه كقياس الأطوال .

٢- اكساب الطلبة بعض المهارات الرياضية الفردية وذلك لتؤدي الأعمال علــى مستوى عالٍ من الدقة والإتقان .

٣- أن يحصل الطلبة علـى قدر منــاسب مــن المعلومــات ومستوى لائق مــن الخبرات .

٤- مساعدة الطلبة على التعرف على دور الرياضيات فـــي التطور الحضــاري للإنسان سواء فى الحاضر أو الماضي مع التأكيد على دور الرياضيات في خدمة المجتمع المحلي .

٥- تنمية بعض الصفات الحميدة المرغوب فيها عند الطلبة كالصدق والأمانـــة والنظام والدقة والتعاون والمثابرة حتى الفوز .

٦- تنمية روح الكشف والابتكار عند الطلبة .

٧- تدريب الطلبة على التفكير الرياضي المنطقي السليم في حياته .

٨- تنمية النواحي الجمالية والفنية والتذوق الإبتكاري عند الطلبة .

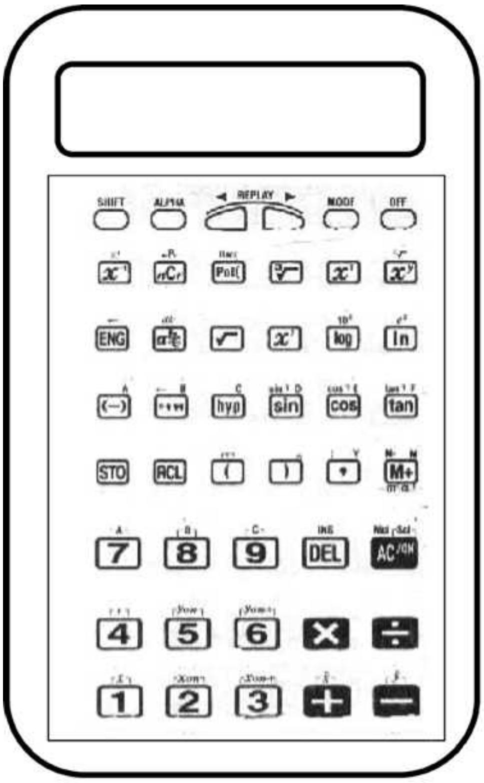
٩- مساعدة الطلبة على إستيعاب مادة الرياضيات عن طريق استخدام الوســائل التعليمية .

الفصل الدراسي الأول

المحتويات :

- التقريب والخطأ .
- الخلط والمزج .
- البرمجة الخطية .
- المتتابعات الحسابية والهندسية .
- مبدأ العد – التباديل – التوافيق .
- مراجعة .

حاسبة الجيب :-



هي آلة إلكترونية تعمـل بمصـدر كهربـي (حجارة البطارية أو التيار الكهربي)
وقد تعمـل أيضـا عن طريق الطاقـة الضوئيـة وهي تستخدم في أجراء العمليات الحسابية المختلفة وسنتعرض الآن لاستخدام حاسبة الجيب في اجراء العمليات الأربع الأصلية :
(جمع – طرح – ضرب – قسمة)
كذلك إيجـاد الجـذور التربيعيـة والتكعيبيـة وأيجاد مربعات الأعداد .

مكونات حاسبة الجيب :-

حاسبة الجيب تحتوي على عدد من المفاتيح كما في الشكل المرسوم وسنتعرض الآن لأنواع المفاتيح التي سنستخدمها .

١) مفتاح مكتوب عليه الأرقام

0 | 9 .... 4 | 3 | 2 | 1

٢) مفتاح مكتوب عليه ON وهذا المفتاح عند الضغط عليه فإنه يجعل الألة في حالة تشغيل .

٣) مفتاح مكتوب عليه OFF ويستخدم لأنهاء عمل الألة .

٤) مفتاح مكتوب عليه A C ويستخدم لمسح جميع العمليات التي تم أجراؤها.

٥) مفتاح مكتوب عليه $\sqrt{}$ ويستخدم لأيجاد الجذر التربيعي .

٦) مفتاح مكتوب عليه + | − | × | ÷ وهي العمليات الأربعة الأصلية.

٧) مفتاح مكتوب عليه . وهو يدل على العلامة العشرية .

الوحدة الأولى

التقريب والخطأ

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يعرف معنى التقريب .
- يتذكر القاعدة الأساسية للتقريب .
- يميز بين الخطأ النسبي والخطأ المطلق والخطأ المئوي .
- يدرك معني تراكم الخطأ .
- إيجاد الخطأ في حاصل الضرب وخارج القسمة .

دروس الوحدة :

- التقريب والخطأ .
- الخطأ المطلق .
- نهايتا الخطأ .
- تراكم الخطأ .
- الخطأ في حاصل الضرب وخارج القسمة .

التقريب والخطأ

كثيراً ما نلجأ في حياتنا العامة إلي التقريب في حساباتنا وهذا التقريب يتم أحياناً باختيارنا من باب التبسيط وأحياناً أخرى يتم بدون اختيارنا .

التقريب الاختياري :

إذا اشتري شخص حذاء بمبلغ ٣٥ جنيه ، ٩٠ قرشاً وسأله أحد أصدقائه عن ثمن هذا الحذاء فإنه سيقول أن ثمنه ٣٦ جنيهاً هذا التقريب اختياري من باب التبسيط .

التقريب الإجباري :

إذا حسبنا قيمة $\sqrt{٢}$ من حاسبة الجيب نجد أن $\sqrt{٢}$ = ١.٤١٤٢١٣٥ وحيث إن $\sqrt{٢}$ عدد غير نسبي ونعلم أنه لا يمكن إيجاد قيمة مضبوطة له فإن العدد الناتج من الآلة مقرب لسبعة أرقام عشرية .

∴ لو طلب إيجاد قيمة $\sqrt{٢}$ مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية **فإن** $\sqrt{٢} \simeq$ ١.٤١٤٢ وفي هذه الحالة يكون التقريب إجبارياً لعدم امكان إيجاد قيمة مضبوطة لـ $\sqrt{٢}$.

التقريب لرتبة معينة :

سبق أن درسنا في المرحلة الابتدائية التقريب إلى منزلة معينة من العدد وذلك بأن نضيف واحد إلى الرقم الذي علي يسار آخر رقم محذوف إذا كان الرقم المحذوف ٥ أو أكبر من ٥ إما إذا كان الرقم المحذوف أقل من ٥ فلا نضيف شيئاً إلى الرقم الذي على يساره . كما تعلمنا أن نضع أصفاراً مكان الأرقام الصحيحة المحذوفة

فمثلاً : ١٨٥.٥٢٧٨ $\simeq$ ١٨٥.٥٢٨ مقربة لثلاث أرقام عشرية

١٨٥.٥٢٧٨ $\simeq$ ١٨٥.٥٣ مقربة لرقمين عشريين

١٨٥.٥٢٧٨ $\simeq$ ١٨٥.٥ مقربة لرقم عشري واحد

١٨٥.٥٢٧٨ $\simeq$ ١٨٦ مقربة لأقرب وحدة

١٨٥.٥٢٧٨ $\simeq$ ١٩٠ مقربة لأقرب عشرة

١٨٥.٥٢٧٨ $\simeq$ ٢٠٠ مقربة لأقرب مائة

مثال [١] :

قرب ٧.٢٣٨ متر إلي أقرب سنتيمتر .

الحل :

٧.٢٣٨ × ١٠٠ = ٧٢٣.٨ سنتيمتر

≃ ٧٢٤.٠ سنتيمتر مقرباً لأقرب سنتيمتر .

مثال : [٢]

قرب ٩.٨٢٣٢ لتر إلى أقرب سنتيمتر مكعب .

الحل :

نعلم أن اللتر = ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب

٩.٨٢٣٢ لتر = ٩.٨٢٣٢ × ١٠٠٠ = ٩٨٢٣.٢ سنتيمتر مكعب

≃ ٩٨٢٣. سنتيمتر مكعب .

مثال : [٣]

قرب ٥.٧٨٥٦ كيلو جرام إلى أقرب جرام .

الحل :

٥.٧٨٥٦ كجم = ٥٧٨٥.٦ جرام ≃ ٥٧٨٦.٠ جرام .

تمارين [١]

(١) قرب ما يأتي إلي درجة التقريب المبينة :

٧٨٨.٦	لأقرب وحدة
٥٧.٥٨٣	لأقرب جزء من عشرة
٥.٩٨٤	لأقرب جزء من مائة
٨٧.٩٧٦	لأقرب مائة

(٢) قرب ما يأتي حسب درجة التقريب المطلوبة

٧٨٩.٢٣ كيلو جرام	لأقرب جرام
٧٥.٢٨٤٥ لتر	إلى أقرب سنتيمتر مكعب
٨٧.٢٩٢٤	كيلو متر إلى أقرب متر

(٣) استخدام حاسبة الجيب في أيجاد $\sqrt{٨٧}$ قرب الناتج إلى ثلاث أرقام عشرية

(٤) استخدام حاسبة الجيب في إيجاد $\dfrac{\sqrt{١٥.٨} \times (٣٧٤)^{٢}}{٠.٠٠٢٥}$

ثم قرب الناتج إلى ثلاث أرقام عشرية

الخطأ المطلق

عند تقريب العدد ٨.٧ إلى أقرب وحدة فإن ٨.٧ $\simeq$ ٩

فتكون القيمة المقربة – القيمة المضبوطة = ٩ – ٨.٧ = ٠.٣ هذه الزيادة تسمى بالخطأ المطلق الناشئ عن عملية التقريب .

$\therefore$ الخطأ المطلق = ٠.٣

كذلك إذا أردنا تقريب العدد ٧.١ إلى أقرب وحدة فإن ٧.١ $\simeq$ ٧

$\therefore$ الخطأ المطلق = ٧ – ٧.١ = –٠.١ ، ونصل هنا إلى التعريف التالي

الخطأ المطلق = القيمة المقربة – القيمة المضبوطة

ملاحظة : إذ ذكر كلمة خطأ فالمقصود به الخطأ المطلق .

مثال [١]: علبة مربى مسعرة بسعر١١٧ قرشاً أخطأ تاجر وباعها لأحد المشترين بسعر ١٢٠ قرشاً . احسب الخطأ المطلق .

الحل : الخطأ المطلق = القيمة المقربة – القيمة المضبوطة

الخطأ المطلق = ١٢٠ – ١١٧ = ٣ قروش

الخطأ النسبي

مثال [٢]: قرب العدد ٤٨.٣ إلي أقرب وحدة وأوجد الخطأ المطلق ثم احسب النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة .

الحل :

٤٨.٣ $\simeq$ ٤٨ لأقرب وحدة

$\therefore$ الخطأ المطلق = القيمة المقربة – القيمة المضبوطة

الخطأ المطلق = ٤٨ – ٤٨.٣ = –٠.٣ جنيه

النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة = $\frac{-٠.٣}{٤٨.٣} = \frac{-١}{١٦١}$

تعريف : تسمى النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المضبوطة بالخطأ النسبي .

الخطأ النسبي = $\frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة المضبوطة}}$

مثـال [٣] :

قرب ٧٣.٤ كجم إلى أقرب كيلو جرام ثم احسب الخطأ النسبي .

الحـل :

٧٣.٤ $\simeq$ ٧٣ لأقرب كيلو جرام

$\therefore$ الخطأ المطلق = ٧٣ – ٧٣.٤ = –٠.٤ جنيه

الخطأ النسبي = $\frac{-٠.٤}{٧٣.٤}$ = – ٠.٠٠٥٤٤٩٥

مثـال [٤] :

في المثال السابق أوجد الخطأ المئوي .

الحـل :

$\boxed{\text{الخطأ المئوي = الخطأ النسبي × ١٠٠}}$

الخطأ المئوي = – ٠.٠٠٥٤٤٩٥ × ١٠٠

= –٠.٥٤٤٩

مثـال [٥] :

قرب العدد ١.٨٤٨٧ لأقرب جزء من ألف وأوجد الخطأ المئوي .

الحـل :

١.٨٤٨٧ $\simeq$ ١.٨٤٩

الخطأ المطلق =١.٨٤٩ – ١.٨٤٨٧ = ٠.٠٠٠٠٣

الخطأ النسبي = $\frac{٠.٠٠٠٠٣}{١.٨٤٨٧}$ = ٠.٠٠٠٠١٦٢٢

الخطأ المئوي = الخطأ النسبي × ١٠٠

= ٠.٠٠٠٠١٦٢٢ × ١٠٠ = ٠.٠٠١٦٢٢

أي أن الخطأ يعادل ٠.٠٠١٦٢٢% من قيمة العدد الأصلي

مثـال [٦]

علبة مربى وزنها ٩٧٨ جرام فإذا قرب هذا الوزن لأقرب كيلو جرام .

أوجد الخطأ المئوي الناتج عن عملية التقريب .

الحـل :

٩٧٨ جرام = ٠.٩٧٨ كيلو جرام $\simeq$ ١ كجم

الخطأ المطلق = ١ – ٠.٩٧٨ = ٠.٠٢٢ كجم

الخطأ النسبي = $\frac{٠.٠٢}{٠.٩٧٨}$ = ٠.٠٢٢٤٩٤٨

الخطأ المئوي = ٠.٠٢٢٩٤٨ × ١٠٠ = ٢.٣ أي أن الخطأ يعـادل ٢.٣ %مـن قيمة العدد الأصلي .

ملاحظات هامة :

١-الخطأ المطلق له تمييز .

٢-كلا من الخطأ النسبي والخطأ المئوي لا يميز لأنه نسبة ومعلوم أن النسبة لا تميز.

٣-كلا من الخطأ المطلق والنسبي والمئوي قد يكون موجباً أو يكون سالباً .

٤-كلا من الخطأ النسبي والخطأ المئوي يعتبر مقياساً لدرجة التقريب فكلما صغر الخطأ النسبي أو المئوي كانت درجة التقريب مقبولة .

أما الخطأ المطلق فلا يستدل منه على درجة التقريب ويتضح ذلك من المثال الآتي :

- أخطأ شخص في وزن ٥٠٠ جرام بمقدار ٢٠ جرام .
- أخطأ شخص آخر في وزن ٦٠٠٠ جرام بمقدار ٤٠ جرام .
- في الحالة الأولي الخطأ المطلق = ٢٠ جرام .
- في الحالة الثانية الخطأ المطلق = ٤٠ جرام .
- الخطأ المطلق في الحالة الثانية أكبر من الخطأ المطلق في الحالة الأولـى ومع هذا فإن الوزن في الحالة الثانية أدق من الوزن في الحالة الأولي وذلك لأن : الخطأ النسبي في الحالة الأولي = $\frac{٢٠}{٥٠٠}$ = $\frac{١}{٢٥}$

أي أن كل ٢٥ جم حدث بها خطأ في وزنها مقداره ١ جم

الخطأ النسبي في الحالة الأولي = $\frac{٤٠}{٦٠٠٠}$ = $\frac{١}{١٥٠}$

أي أن كل ١٥٠ جم حدث فيها خطأ مقداره ١ جم

وواضح أن الوزن في الحالة الثانية أدق منه في الحالة الأولى .

تمارين [٢]

(١) قرب العدد ٩٧٨.٣١ لأقرب وحدة وأوجد كلاً من الخطـــأ النســـبي والخطـــأ المئوي .

(٢) جوال من القمح وزنه ٥٠ كجم وزنه شخص فوجده ٥٠.٣ كجم . احسب كلاً من الخطأ النسبي والخطأ المئوي .

(٣) قرب كلاً من الأعداد التالية إلي درجة التقريب المطلوبة واحسب كـــلاً مـــن الخطأ النسبي والخطأ المئوي .

٧٨٩.٣	إلى	أقرب وحـــــدة
٩٧٦.٢	إلى	أقرب عشـــــرة
٧٨٩.٢٣٥	إلى	أقرب رقمين عشريين
٦٨٩.٤٣	إلى	أقرب وحـــــدة

(٤) حل المعادلة ٥ (٥س – ٣) – ٢ (٢ س – ١) = ٣٧

ثم قرب الناتج لأقرب وحدة ثم أوجد الخطأ المئوي .

(٥) مثلث أطوال أضلاعه ٧.١٥ ، ٨.٣٢ ، ١٢.٤٧ أوجد محيط المثلث ثم قرب الناتج لأقرب سنتمتر . ثم أحسب كلا من قيمة الخطأ النسبي والخطأ المطلق والخطأ المئوي .

نهايتا الخطأ

إذا كان العدد ٣.٨ مقرباً إلى آخر رقم فيه

فإنه إذا قربت القيمة الأصلية للعدد ٣.٨ إلى رقمين عشريين قد تكون

٣.٨

٣.٨١	٣.٧٥
٣.٨٢	٣.٧٦
٣.٨٣	٣.٧٧
٣.٨٤	٣.٧٨
	٣.٧٩

أي أن القيمة المضبوطة للعدد ٣.٨ تنحصر بين ٣.٧٥ ، ٣.٨٤

يسمى ٣.٧٥ بالحد الأدنى للعدد المضبوط

يسمى ٣.٨٤ بالحد الأعلى للعدد المضبوط

ويسمي الفرق بين العدد ٣.٨ وبين كل من الحدين الأعلى والأدنى بنهايتي الخطأ المطلق .

وفي هذا المثال نهايتا الخطأ = ± ٠.٠٥

> نهايتا الخطأ المطلق في عدد مقرب لآخر رقم فيه
> = ± ٥ من الرتبة التي تلي رتبة العدد المقرب

مثال [١] :

أوجد نهايتا الخطأ المطلق في كل من الأعداد الآتية إذ أنها مقربة لآخر رقم فيها .

٠.٧٥ ، ١.٤٠٥ ، ٩٨ ، ٧٤٠

الحل : نهايتا الخطأ المطلق في العدد ٠.٧٥ = ± ٠.٠٠٥

نهايتا الخطأ المطلق في العدد ١.٤٠٥ = ± ٠.٠٠٠٥

نهايتا الخطأ المطلق في العدد ٩٨ = ± ٠.٥

نهايتا الخطأ المطلق في العدد ٧٤٠ = ± ٥

مثال [٢] :

٦.١٨٤ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ٠.٠٠٠٥

٨.١٤ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ....

٨.٧ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ....

٩ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ٠.٥

٩٠ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ....

٧٠٠ مقرباً لأقرب عشرة فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ٥

٨٠٠٠ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ....

٧٠٠٠٠ مقرباً لآخر رقم فيه فإن نهايتا الخطأ المطلق = ± ٥٠٠٠

نهايتا الخطأ النسبي

$$\text{نهايتي الخطأ النسبي} = \pm \frac{\text{الخطأ المطلق}}{\text{القيمة المضبوطة}}$$

ملاحظة :

نسبتا نهايتا الخطأ المطلق إلى القيمة المقربة وليس إلى القيمة المضبوطة لأن القيمة المضبوطة ليست معروفة في هذه الحالة .

مثال [٣] :

إذا كان ٤.٠٧ مقرباً لأقرب رقم فيه فأوجد نهايتي الخطأ المطلق والحدين الأدنى والأعلى للعدد الحقيقي .

الحل :

نهايتا الخطأ المطلق = ± ٠.٠٠٥

الحد الأعلى = ٤.٠٧ + ٠.٠٠٥ = ٤.٠٧٥

الحد الأدنى = ٤.٠٧ – ٠.٠٠٥ = ٤.٠٦٥

مثال [٤]

أوجد نهايتي الخطأ المئوي في العدد ٨٩ إذا كان مقرباً لآخر رقم فيه.

الحـل :

نهايتا الخَطأ المطلق = ± ٠.٥

∴نهايتا الخطأ النسبي = ± $\frac{٠.٥}{٨٩}$ ≃ ± ٠.٠٠٥٦

∴ نهايتا الخطأ المئوي = ± ٠.٠٠٥٦ × ١٠٠ = ± ٠.٥٦

مثال [٥] :

أوجد نهايتي الخطأ النسبي والمئوي للعدد ٧٣٠٠ علماً بأنه مقرب لأقرب مائة .

الحـل :

نهايتا الخطأ المطلق = ± ٥٠

نهايتا الخطأ النسبي = ± $\frac{٥٠}{٧٣٠٠}$ = ± ٠.٠٠٦٨

نهايتا الخطأ المئوي = ± ٠.٠٠٦٨× ١٠٠ =± ٠.٦٨

تمارين [٣]

(١) أوجد نهايتي الخطأ المطلق والنسبي والحدين الأدنى والأعلى للعدد علماً بأن كل عدد مقرب لآخر رقم فيه :

٨.٢٩ ، ٧.٠٠٥ ، ٤٩ ، ٧.٠٦ ، ٦.٧

(٢) أوجد نهايتي الخطأ المئوي علماً بأن كل عدد مقرباً لآخر رقم فيه :

٧.٠٦ ، ٢٩ ، ٤٨.٩ ، ٣٧٠ ، ٨ ، ٧٢

(٣) أوجد الحدين الأعلى والأدنى لكل من الأعداد الآتية علماً بأن كل عدد مقرب لآخر رقم فيه ٨.١٢٥ ، ٧.٢٩ ، ٠.٠٧ ، ٠.٠٠٥

(٤) أوجد قيمة [$(٢.٨)^٢ + (٣.٧)^٢$] ثم قرب الناتج لأقرب عدد صحيح ثم أوجد نهايتي الخطأ المطلق .

تراكم الخطأ

نظرية : نهايتي الخطأ المطلق في مجموع عددين أو باقي طرحهما يساوي مجموع نهايتي الخطأ المطلق في كل منهما

فإذا كان العدد س عرضه لخطأ لا يتجاوز ± هـ .

والعدد ص عرضه لخطأ لا يتجاوز ± و .

فإن (س + ص) تكون عرضه لخطأ لا يتجاوز ± (هـ + و)

، (س − ص) تكون عرضه لخطأ لا يتجاوز ± (هـ + و)

ويمكن تعميم هذه النظرية لأكثر من مقدارين .

نهايتا الخطأ المطلق في المجموع الجبري لعدة مقادير يساوي مجموع نهايات الأخطاء المطلقة في كل الأعداد المقربة الداخلة في العملية ويسمى ذلك تراكم الخطأ .

نتيجة :

إذا كانت س عرضه لخطأ لا يتجاوز ± هـ .

فإن ٢ س أي س + س عرضه لخطأ لا يتجاوز ± (هـ + هـ) = ± ٢ هـ

وعلي ذلك فإن ٢س حيث ٢ ثابت عرضه لخطأ ± ٢هـ (٢) عدد ثابت ومضبوط

مثال [١] :

أوجد نهايتا الخطأ المطلق في كل من العمليات الآتية علماً بأن جميع الأعداد مقربة لآخر رقم فيها .

أولاً : ٧.٤٨ + ٩.١٦ + ٧٩.٨

ثانياً : ٢٦.٨ + ٧٩ − ١٣.٤

الحل :

أولاً : نهايتا الخطأ المطلق للمقدار = ± (٠.٠٠٥ + ٠.٠٠٥ + ٠.٠٥)

= ± ٠.٠٦٠

ثانياً : نهايتا الخطأ المطلق للمقدار = ± (٠.٠٥ + ٠.٥ + ٠.٠٥)

= ± ٠.٠٦

مثال [٢] :

حوض لتربية الأسماك به ٧٠.٨ سم^{٣} من الماء اسقط به سمكة فارتفع سطح الماء إلى ٧٨ سم^{٣} . أوجد الحدين الذين ينحصر بينهما حجم السمكة علماً بأن القراءتين السابقتين مقربتين لآخر رقم فيهما .

الحل :

حجم السمكة = ٧٨ – ٧٠.٨ = ٧.٢ سم^{٣}

نهايتا الخطأ المطلق في حجم السمكة = ± (٠.٥ + ٠.٠٥) = ٠.٥٥ سم^{٣}

النهاية العظمى لحجم السمكة = ٧.٢ + ٠.٥٥ = ٧.٧٥ سم^{٣}

النهاية الصغرى لحجم السمكة = ٧.٢ – ٠.٥٥ = ٦.٦٥ سم^{٣}

مثال [٣] :

قطعة أرض علي شكل مربع طول ضلعه ١٠٠ متر مقرباً لأقرب متر . أوجد نهايتا الخطأ المطلق في حساب محيط الأرض وكذلك الحدين الأعلى والأدنى للمحيط ونهايتا الخطأ النسبي فيه .

الحل :

نهايتا الخطأ المطلق في إيجاد طول ضلع المربع = ± ٠.٥ متر

∴ محيط المربع = طول الضلع × ٤

∴ نهايتا الخطأ المطلق في حساب المحيط = ± ٤ × ٠.٥ = ± ٢ متر

∴ المحيط = ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠ متر

الحد الأعلى للمحيط = ٤٠٠ + ٢ = ٤٠٢ متر

الحد الأدنى للمحيط = ٤٠٠ – ٢ = ٣٩٨ متر

نهايتا الخطأ النسبي في حساب المحيط = ± $\frac{٢}{٤٠٠}$ = ± ٠.٠٠٥

مثال [٤] :

إذا كانت س = ٢٧.٨ ، ص = ٩.٢٨ وكان كل من هذين العددين مقرباً لآخر رقم فيه . احسب الحدين اللذين ينحصر بينهما المقدار ٤ س – ٨ ص .

الحــل :

المقــدار = ٤ × ٢٧.٨ – ٨ × ٩.٢٨ = ١١١.٢ – ٧٤.٢٤ = ٣٦.٩٦ نهايتــا الخطأ المطلق في المقدار = ± (٤ × ٠.٠٥ + ٨ × ٠.٠٠٥)

= ± (٠.٢ + ٠.٠٤) = + ٠.٢٤

الحد الأعلى للمقدار = ٣٦.٩٦ + ٠.٢٤ = ٣٧.٢٠

الحد الأدنى للمقدار = ٣٦.٩٦ – ٠.٢٤ = ٣٦.٧٢

مثال [٥] :

إذا كانت س = ٨٠٠ ، ص = ٧٠٠ حيث س مقربة وعرضه لخطأ لا يتجاوز ٤% منها ، ص مقربة وعرضــه لخطأ لا يتجــاوز ٣.٥% منهــا – احســب نهايتي الخطأ المطلق في المقدار (س – ص) .

الحــل :

نهايتا الخطأ المطلق في س = ± $\frac{٨٠٠ \times ٤}{١٠٠}$ = ± ٣٢

نهايتا الخطأ المطلق في ص = ± $\frac{٧٠٠ \times ٣٥}{١٠٠٠}$ = ± ٢٤.٥

∴ نهايتا الخطأ المطلق في (س – ص) = ±(٣٢ + ٢٤.٥) = ± ٥٦.٥

ناتج المقدار (س – ص) = ٨٠٠ – ٧٠٠ = ١٠٠

∴ الحد الأدنى = ١٠٠ – ٥٦.٥ = ٤٣.٥

الحد الأعلى = ١٠٠ + ٥٦.٥ = ١٥٦.٥

مثال [٦] :

إذا كانت أ = ٧.٨ ، ب = ٠.٠٩ وكان كلاً من أ ، ب مقرباً لآخر رقم فيه فأوجد كلاً من الخطأ المطلق والنسبي في (أ + ب) ، (أ – ب)

الحــل :

نهايتا الخطأ المطلق في أ = ± ٠.٠٥

نهايتا الخطأ المطلق في ب = ± ٠.٠٠٥

نهايتا الخطأ المطلق في (أ + ب) = ± (٠.٠٥ + ٠.٠٠٥) = ٠.٠٥٥

نهايتا الخطأ المطلق في (أ – ب) = ± (٠.٠٥ + ٠.٠٠٥) = ٠.٠٥٥

لإيجاد الخطأ النسبي في كل من المقدارين السابقتين يوجد ناتج

(أ + ب) = ٧.٨ + ٠.٠٩ = ٧.٨٩

$\therefore$ نهايتا الخطأ النسبي في (أ + ب) = ± $\frac{٠.٠٥٥}{٧.٨٩}$ = ٠.٠٠٦٩٧

كذلك ناتج (أ – ب) = ٧.٨ – ٠.٠٩ = ٧.٧١

$\therefore$ نهايتا الخطأ النسبي في (أ – ب) = ± $\frac{٠.٠٥٥}{٧.٧١}$ = ٠.٠٠٧١٣

تمارين [٤]

(١) أوجد نهايتي الخطأ المطلق في مجموع الكميات الآتية علماً بأن كلاً من الأعداد مقرباً لآخر رقم فيه .

(أ) ١٧.٨ + ٩.٠٦ + ٧.٩ (ب) ٠.٧٨ + ٠.٢٥ + ٣.٤

(جـ) ٧ + ٣.٢ + ٩.٠٨

(٢) إناء وزنه ٥٨٧.٢ جراماً ملئ بسائل فأصبح وزنه ١٥٢٧.٨ جراماً فما النهاية العظمي للخطأ الممكن وقوعه في تقدير وزن السائل إذ كان كل من هذين العددين مقرباً لآخر رقم فيه وما الخطأ المئوي في وزن السائل .

(٣) حديقة علي شكل مستطيل بعداه ٢٨.٤ ، ١٧.٣ من الأمتار فإذا كان كل من هذين البعدين عرضه لخطأ لا يتجاوز ± ٢% فأوجد الحدين الذين ينحصر بينهما محيط الحديقة .

(٤) قطعة أرض علي شكل مربع محيطها ٨٧.٨ من الأمتار فإذا كان هذا العدد مقرباً لآخر رقم فيه فما الحدان اللذان ينحصر بينهما محيط قطعة الأرض.

(٥) يملك مزارع ثلاث أفدنة مزروعة قطناً ينتج الأول ٧.٨ قنطاراً وينتج الثاني ٤.٧ قنطاراً وينتج الثالث ٦.٧ فإذا كان كل من هذه الأعداد مقرباً لآخر رقم فيه فاحسب الخطأ الناتج في حساب مجموع إنتاج الأفدنة الثلاثة.

(٦) يملك فلاح ٥ أفدنة مزروعة أرزاً وكان متوسط إنتاج الفدان الواحد منها ٢.٤ طن مقرباً لأقرب رقم عشري واحد فاحسب نهايتا الخطأ المطلق والنسبي في حساب إنتاج الأرض .

الخطأ في حاصل الضرب وخارج القسمة

نظرية : نهايتا الخطأ النسبي في حاصل ضرب عددين أو خارج قسمتهما يساوي مجموع نهايتي الخطأين النسبيين في كل من العددين .

إذا كانت س عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ $هـ_1$

، ص عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ $هـ_2$

فإن س × ص تكون عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ ($هـ_1$ + $هـ_2$)

، $\frac{س}{ص}$ لا تكون عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ ($هـ_1$ + $هـ_2$)

وتعميم هذه النظرية :

نهايتا الخطأ النسبي في سلسلة عمليات ضرب وقسمة لمجموعة من الأعداد يساوي مجموع الأخطاء النسبية في كل من الأعداد المقربة الداخلة في العملية .

مثال [١] :

٩، ب ، جـ ، د عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز

$\pm$ $هـ_1$ ، $هـ_2$ ، $\pm$ $هـ_3$ ، $هـ_4$ على الترتيب

فإن ٩× ب × جـ × د عرضة لخطأ نسبي لا يتجاوز

$\pm$ ($هـ_1$ + $هـ_2$ + $هـ_3$ + $هـ_4$)

$\frac{٩ \times ب}{جـ \times د}$ عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ ($هـ_1$ + $هـ_2$ + $هـ_3$ + $هـ_4$)

$\frac{٩ \times ب \times جـ}{د}$ عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ ($هـ_1$ + $هـ_2$ + $هـ_3$ + $هـ_4$)

، $٩^{٢}$ عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ ٢ $هـ_1$

، $ب^{٣}$ عرضه لخطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ ٣ $هـ_2$

، $\sqrt{٩}$ عرضه خطأ نسبي لا يتجاوز $\pm$ $\frac{١}{٢}$ $هـ_1$

ملاحظة : ٤ ٩ عرضه لخطأ نسبي لا بتجاوز $\pm$ $هـ_1$

(وذلك لأن ٤ عدد مضبوط)

مثال [٢] :

إذا كانت س = ٧.٨ ، ص = ١٥.٩٣ وكان كل منهما مقرباً لآخر رقم فيه

فأوجد نهايتا الخطأ النسبي في :

أولاً : ٦س　　ثانياً : $س^{٢}$　　ثالثاً : س ص　　رابعاً : $\frac{س}{ص}$

الحل :

نهايتا الخطأ المطلق في قيمة س = ± ٠.٠٥

∴ نهايتا الخطأ النسبي في قيمة س = ± $\frac{٠.٠٥}{٧.٨}$ = ٠.٠٠٦٤

، نهايتا الخطأ المطلق في قيمة ص = ± ٠.٠٠٥

∴ نهايتا الخطأ النسبي في قيمة ص = ± $\frac{٠.٠٠٥}{١٥.٩٣}$ = ٠.٠٠٠٣

أولاً : نهايتا الخطأ النسبي في المقدار ٦س = ± (صفر + ٠.٠٠٦٤)

= ± ٠.٠٠٦٤

نهايتا الخطأ النسبي في المقدار $س^{٢}$ = ± ٢ × ٠.٠٠٦٤ = ± ٠.٠١٢٨

نهايتا الخطأ النسبي في قيمة س ص

= ± (٠.٠٠٦٤ + ٠.٠٠٠٣) = ± ٠.٠٠٦٧

نهايتا الخطأ النسبي في المقدار $\frac{س}{ص}$ = ±

= ± (٠.٠٠٦٤ + ٠.٠٠٠٣) = ± ٠.٠٠٦٧

مثال [٣] :

مربع طول ضلعه ٩ سم مقرباً لأقرب سنتيمتر .

احسب نهايتا الخطأ النسبي وكذلك المطلق في حساب مساحة سطح المربع .

الحـل :

نفرض طول ضلع المربع ل　∴ مساحة سطح المربع $ل^{٢}$

نهايتا الخطأ النسبي في حساب طول ضلع المربع = ± $\frac{٠.٥}{٩}$ = ± $\frac{١}{١٨}$

نهايتا الخطأ النسبي في حساب مساحة سطح المربع

$$= \pm \frac{٢ \times ٠.٥}{٩} = \pm \frac{١}{٩}$$

نهايتا الخطأ المطلق في حساب مساحة سطح المربع

= ± المساحة × نهايتا الخطأ النسبي لها

$$= \pm ٨١ \times \frac{١}{٩} = \pm ٩$$ سم^{٣}

مثال [٤] :

قطعة أرض مستطيلة الشكل عرضها ٥٠ متراً وطولها ٧٠.٨ متراً وكان كل من الطول والعرض مقرباً لآخر رقم فيه . احسب نهايتي الخطأ المطلق في حساب مساحة تلك الأرض .

الحل :

نهايتا الخطأ النسبي في حساب العرض = $\pm \frac{٠.٠}{٥٠} = \pm ٠.٠١$

نهايتا الخطأ النسبي في حساب الطول = $\pm \frac{٠.٠٥}{٧٠.٨} = \pm ٠.٠٠٠٧$

مساحة قطعة الأرض = ٥٠ × ٧٠.٨ = ٣٥٤٠ م^{٢}

نهايتا الخطأ النسبي في حساب المساحة =

$$\pm \left(\frac{٠.٥}{٥٠} + \frac{٠.٠٥}{٧٠.٨} \right) = \pm (٠.٠١ + ٠.٠٠٠٧) = \pm ٠.٠١٠٧$$

نهايتا الخطأ المطلق = نهايتا الخطأ النسبي × القيمة المقربة

∴ نهايتا الخطأ المطلق في حساب المساحة

= ± ٠.٠١٠٧ × ٣٥٤٠ = ± ٣٧.٨٧٨ متر مربع .

تمارين[٥]

(١) إذا كانت س = ٧٠.٨ ، ص = ٥٠ وكان كل من هذين العـــددين مقربـــاً لآخر رقم فيه فأوجد نهايتي الخطأ النسبي في إيجاد :

أولاً : ٥ س ثانياً : $\sqrt{ص}$ ثالثاً : س ص

رابعاً : ٥ $س^٢$ خامساً : $\sqrt[٣]{س}$

(٢) مكعب طول حرفه ١٧.٨ سم مقرباً لآخر رقم فيه أوجـد نهـايتي الخطـأ النسبي وكذلك نهايتي الخطأ المطلق في تقدير حجم المكعب .

(٣) أوجد نهايتي الخطأ المطلق حساب مساحة ســطح مثلــث طــول قاعدتــه ١٧.٢٨سم وارتفاعه ١٦.٢سم مع العلم بأن كل من هذين العددين عرضه لخطأ لا يتجاوز ± ١% من قيمته .

(٤) أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ٧.١٨سم وارتفاعهـا ٣٠ســم وهــذان العددان مقربان لآخر رقم فيهما . احسب نهايتا الخطأ النسبي فــي إيجــاد حجم الاسطوانة علماً بأن ط = ٣.١٤ مقربة لآخر رقم فيها

(حجم الأسطوانة = ط $نق^٢$ ع) .

(٥) إذا كانـــت س = ٢ $ب^٣$ جـ وكانـــت ٢ = ٠.٧٨٣، ب = ٤.٣٢، جـ = ٧.٢٥ وكان كل من هذه الأعداد مقرب إلى آخر رقم فيه . فأحسب نهايتي الخطأ النسبي في تقدير س .

الوحدة الثانية

الخلط والمزج

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يعرف الفرق بين الخلط والمزج .
- يوجد قيمة المخلوط .
- إيجاد قيم السبائك الجديدة .
- يعرف مزايا الخلط والمزج .

دروس الوحدة :

- الخلط .
- السبيكة.
- عيار السبيكة.

الخلط والمزج

أولاً : الخلط :

هو عملية إضافة مادتين أو عدة مواد صلبة مختلفة أو كميات مختلفة الجـودة من مادة واحدة ويسمى الناتج بالخليط .

ومن أمثلة ذلك :

١) الخرسانة المسلحة هي خليط يتكون من كميات من الرمل والأسمنت والزلط بنسب معينة .

٢) خلط أنواع من الشاي معاً لتكوين شاي ذو نكهة معينة .

٣) خلط أنواع من القطن في المحالج لتكوين نوع معين من القطن لغزله .

٤) خلط أنواع مختلفة من الدخان .

٥) خلط نسب معينة من الذهب مع النحاس أو الفضة وتسمى السبيكة .

السبيكة :

- هي خليط مكون من معدنين أو أكثر وتسمي السبيكة باسم المعدن النفـيس الموجود بها . فيقال سبيكة ذهب إذا كانت السبيكة من ذهـب ونحـاس أو ذهب وفضة يقال سبيكة فضة إذا كانت السبيكة من الفضة والنيكل .
- كذلك توجد سبيكة مكونة من الرصاص والزنك والألمونيوم بنسب معينـة وذلك بغرض تكوين سبيكة تصلح لصناعات معينة .

والغرض من إضافة المعادن لبعضها :

١- الحصول علي سبيكة أكثر صلابة .   ٢ - لخفض السعر .

عيار السبيكة :

- هو نسبة المعدن النفيس فيها إلى الوزن الكلي للسبيكة فيقال مثلاً :

- سبيكة من الذهب عيار ٢١ قيراط يعني أن وزن الـذهب فـي هـذه السبيكة = $\frac{٢١}{٢٤}$ = $\frac{٧}{٨}$ من وزن السبيكة .
- سبيكة من الفضة عيار ٠.٩٥ يعنـي أن وزن الفضـة فـي هـذه السـبيكة = $\frac{٩٥}{١٠٠}$ = ٩٥% من وزن السبيكة .
- سبيكة من الذهب عيار ٢٤ قيراط يعني أن وزن السبيكة من الذهب الخالص .

ثانياً : المزج :

- هي عملية إضافة سائلين أو عدة سوائل بعضها إلى بعض ويسمى النـــاتج بالمزيج مثل :

٢- مزج عصارة الزهور إلى الكحول لعمل العطور .

٣- مزج عصير المانجو بالماء لعمل شراب المانجو .

أسباب الخلط والمزج :

٢-خفض التكاليف .

٣-إعطاء الخليط صفة الجودة أو الصلابة أو عدم الصدأ .

٤-إكساب الخليط أو المزيج النكهة المطلوبة (كمـــا فـــي الشـــاي والـــدخان والعصائر) .

٥-حفظ المأكولات والمشروبات بإضافة مادة (بنزوات الصودا مثلاً) .

مثال [١] :

- عند عمل خرسانة مسلحة يخلط مقاول كل ٢ طن زلط مع طن من الرمـــل مع $\frac{١}{٢}$ طن من الأسمنت . فإذا كان ثمن طن الزلط ٤٠ جنيهاً ، ثمن طن الرمل ٣٠ جنيهاً ، ثمن طن الأسمنت ٢٠٠ جنيهاً . فما ثمن طن الخرسانة المسلحة ؟

الحـل :

- ثمن ٢ طن زلط = ٢ × ٤٠ = ٨٠ جنيهاً .
- ثمن ١ طن رمل = ١ × ٣٠ = ٣٠ جنيهاً .
- ثمن $\frac{١}{٢}$ طن أسمنت = $\frac{١}{٢}$ × ٢٠٠ = ١٠٠ جنيه
- ثمن الخليط = ٨٠ + ٣٠ + ١٠٠ = ٢١٠ جنيه
- وزن الخليط = ٢ + ١ + $\frac{١}{٢}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$ طن .
- ثمن الطن الواحد من الخليط = $\frac{٢١٠}{٣\frac{١}{٢}}$ = $\frac{٢١٠\times٢}{٧}$ = ٦٠ جنيهاً

حل آخر :

النوع	الوزن	الثمن	الوزن × الثمن	ثمن الكمية
الرمل	١	٣٠	١×٣٠	٣٠
اسمنت	$\frac{١}{٢}$	٢٠٠	٢٠٠ × $\frac{١}{٢}$	١٠٠
زلط	٢	٤٠	٢ × ٤٠	٨٠
المجموع	٣ $\frac{١}{٢}$			٢١٠

ثمن طن الخليط من الخرسانة = ٢١٠ ÷ ٣ $\frac{١}{٢}$ = ٦٠ جنيهاً

مثال [٢] :

- سبيكتان من الذهب الأولى وزنها ٩٠٠ جرام عيار ٢١ قيراط والثانية وزنها ١٦٠٠ جرام من عيار ١٨ قيراط فإذا صاغهما الصائغ في سبيكة واحدة فأوجد عيارها ؟

الحل :

- وزن الذهب من السبيكة الأولى = ٩٠٠ × $\frac{٢١}{٢٤}$ = ٧٨٧.٥ جرام
- وزن الذهب من السبيكة الثانية = ١٦٠٠ × $\frac{١٨}{٢٤}$ = ١٢٠٠.٠٠ جرام
- الوزن الكلي للذهب في السبيكتين = ٧٨٧.٥ + ١٢٠٠ = ١٩٨٧.٥ جرام
- الوزن الكلي للسبيكتين = ٩٠٠ + ١٦٠٠ = ٢٥٠٠ جرام

$$\frac{\text{عيار السبيكة}}{\text{٢٤ قيراط}} = \frac{\text{وزن الذهب}}{\text{وزن السبيكة}}$$

قانون (لتعيين عيار الذهب أو الفضة)

$$\frac{\text{عيار السبيكة}}{٢٤} = \frac{١٩٨٧.٥}{٢٥٠٠}$$

∴ عيار السبيكة الجديدة = $\frac{٢٥٠٠}{٢٤ \times ١٩٨٧.٥}$

= ١٩.٠٨ قيراط

مثال [٣]

– تاجر مشروبات يمزج نوعين من الشراب ثمن اللتر من النوع الأول ٣٦٠ قرشاً وثمن اللتر من النوع الثاني ٣٠٠ قرشاً فبأي نسبة يمزج التاجر النوعين من الشراب ليكون ثمن اللتر ٣٢٥ قرشاً ؟

الحـل :

ثمن س لتر من النوع الأول = س × ٣٦٠ = ٣٦٠ س قرشاً .

ثمن ص لتر من النوع الثاني = ص × ٣٠٠ = ٣٠٠ ص قرشاً .

ثمن الكمية التي مزجت = ٣٦٠ س + ٣٠٠ ص قرشاً .... (١)

كمية المزج من الشرابين = س + ص لتر

ثمن الكمية الممزوجة = ٣٢٥ (س + ص) قرشاً ..... (٢) من (١) ، (٢)

ثمن الكمية التي مزجت = ثمن الكمية التي موجها التاجر

٣٦ س + ٣٠٠ ص = ٣٢٥ (س + ص)

٣٦ س = ٢٥ ص ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \frac{٢٥}{٣٥} = \frac{٥}{٧}$

النسبة بين كمية الشراب من النوع الأول والنوع الثاني في المزيج = ٥ : ٧

مثال [٤] :

– يشترى مصنع للخشب المضغوط ثلاثة أنواع من خشب الأشجار سعر الطن من النوع الأول ٥٦٠ جنيهاً ومن النوع الثاني سعر الطن ٦٢٠ جنيهاً ومن النوع الثالث سعر الطن ٥٨٠ جنيهاً . فإذا كانت النسبة بين أوزان تلك الأخشاب التي يصنع منها الخشب المضغوط على الترتيب كنسبة ٢ : ١ : ٣ فبكم يبيع المصنع الطن من الخشب المضغوط ليكسب ٢٥% من التكاليف علماً بأن أجر تصنيع الطن داخل المصنع ٢١٦ جنيهاً .

الحـل :

– ثمن شراء الخشب من النوع الأول = ٢س × ٥٦٠ = ١١٢٠ س جنيهاً .

– ثمن شراء الخشب من النوع الثاني = س × ٦٢٠ = ٦٢٠ س جنيهاً .

– ثمن شراء الخشب من النوع الثالث = ٣ س × ٥٨٠ = ١٧٤٠ س جنيهاً .

– ثمن شراء الخشب كله = ١١٢٠س + ٦٢٠س + ١٧٤٠س =٣٤٨٠س جنيهاً

- وزن الخشب المشتري = ٢س + س + ٣س = ٦س طناً
- متوسط ثمن شراء الطن من الخليط = $\frac{٣٤٨٠س}{٦س}$ = ٥٨٠ جنيهاً
- تكاليف إنتاج الطن الواحد من الخشب المضغوط = ٥٨٠ + ٢١٦ = ٧٩٦ جنيهاً
- ثمن بيع الطن من الخشب المضغوط = ٧٩٦ × $\frac{١٢٥}{١٠٠}$ = ٩٩٥ جنيهاً .

مثال [٥] :

- خلط تاجر ٢٠ أردباً من الفول ثمن الأردب فيه ١٢٠ جنيه مع ٣٠ أردباً آخر من الفول ثمن الأردب فيه ١٤٠ جنيهاً . احسب ثمن أردب من الخليط ثم أوجد ثمن بيع الأردب ليكسب من الخليط ٢٠% .

الحـل :

- ثمن ٢٠ أردباً من النوع الأول = ٢٠ × ١٢٠ = ٢٤٠٠ جنيهاً .
- ثمن ٣٠ أردباً من النوع الثاني = ٣٠ × ١٤٠ = ٤٢٠٠ جنيهاً .
- ثمن الخليط = ٢٤٠٠ + ٤٢٠٠ = ٦٦٠٠ جنيهاً .
- عدد الأرادب الكلية = ٢٠ + ٣٠ = ٥٠ أردباً
- ثمن الأردب الواحد من الخليط = $\frac{٦٦٠٠}{٥٠}$ = ١٣٢ جنيهاً
- ثمن بيع الأردب ليكسب ٢٠% = $\frac{١٣٢ \times ١٢٠}{١٠٠}$ = ١٥٨.٤ جنيهاً .

مثال [٦] :

- محل عصير يمزج ٦ لترات من شراب ثمن اللتر منه ٨٠ قرشاً مع ١٠ لترات من نوع أخر من الشراب . فإذا كان ثمن اللتر من المزيج ٩٠ قرشاً . فما ثمن اللتر من النوع الثاني من الشراب .

الحـل :

- حجم المزيج = ٦ + ١٠ = ١٦ لتراً .
- ثمن المزيج كله = ١٦ × ٩٠ = ١٤٤٠ قرشاً .
- ثمن النوع الأول = ٦ × ٨٠ = ٤٨٠ قرشاً .
- ثمن النوع الثاني = ١٤٤٠ – ٤٨٠ = ٩٦٠ قرشاً .
- ثمن اللتر من النوع الثاني = $\frac{٩٦٠}{١٠}$ = ٩٦ قرشاً .

تمارين [١]

١-اشترى صانع للمشغولات الذهبية سواراً من الذهب وزنه ٨٠ جرام وعياره ١٨ قيراط وعقد وزنه ١٠٠ جرام وعياره ٢١ قيراط . فإذا أصاغها في سبيكة واحدة فما عيارها ؟

٢- سبك صانع للمشغولات الفضية قطعتين من الفضة وزن الأولى ٦٢٥ جرام وعيارها ٠.٧٠ ووزن الثانية ٢٥٠٠ جرام وعيارها ٠.٩٨ ؟
فما عيار السبيكة الجديدة ؟

٣- ما مقدار ما يلزم أخذه من سبيكتين من الفضة عيار الأولي ٠.٨٠٠ وعيار الثانية ٠.٩٠٠ لعمل كيلو جرام واحد من الفضة عيار ٠.٨٧٥ ؟

٤-ما مقدار ما يلزم أخذه من سبيكتين من الذهب عيار الأولي ٢٤ قيراط والثانية عيار ١٨ قيراط لعمل كيلو جرام واحد من الذهب عيار ٢١ قيراط .

٥-يشتري مصنع للعطور ثلاثة أنواع من الزيوت العطرية سعر الكيلو جرام من النوع الأول ٢٢٤ جنيهاً والنوع الثاني ٢٤٨ جنيهاً ومن النوع الثالث ٢٣٢ جنيهاً فإذا كانت النسبة بين أوزان تلك المواد التي يصنع منها العطر الجديد علي الترتيب ٢:١:٣ فبكم يبيع المصنع الكيلو جرام من العطر الجديد ليكسب ٥٠% علماً بأن أجرة تصنيع الكيلو جرام داخل المصنع ٨٠ جنيهاً ؟

٦- خلط تاجر ٢٠ كيلو جرام من الشاي ثمن الكيلو جرام ٨٢٠ قرشاً مع ٣٠ كيلو جرام من نوع آخر من الشاي ثمن الكيلو جرام ٩٥٠ قرشاً .
فما ثمن الكيلو جرام من الخليط ؟

٧-مزج تاجر ١٠ لترات من شراب ثمن اللتر منه ٨٠ قرشاً مع ٨ لترات من شراب من نوع آخر فإذا كان ثمن اللتر من المزيج ٧٠ قرشاً .
فما ثمن اللتر من النوع الثاني ؟

٨- يعبئ مصنع للألبان الجبنه في صفائح سعة الصفيحة الواحدة ٨ كيلو جرامات فإذا كان يضع في الصفيحة ٥ كيلو جرام من الجبن الذي تكلفه الكيلو جرام ٤٢٠ قرشاً والباقي من الجبن الذي تكلفه الكيلو جرام منه ٣٠٠ قرشاً فما متوسط ثمن الكيلو جرام من الجبن بالصفيحة وبكم يبيع الكيلو جرام منه ليكون مكسبه ٢٥% .

الوحدة الثالثة

البرمجة الخطية

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتذكر متباينات الدرجة الأولي في متغير واحد.
- يعرف المتباينات من الدرجة الأولي في متغيرين
- يتقن أستخدام حل المتباينات في حل التطبيقات العملية .
- يعرف الحل البياني لمتباينتين من الدرجة الأولي في متغيرين في آن واحد .

دروس الوحدة :

- متباينات من الدرجة الأولى في متغير واحد .
- المتباينات من الدرجة الأولى في متغيرين .
- الحل البياني لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيرين في آن واحد .
- تطبيقات عملية على حل المتباينات .

البرمجة الخطية

المتباينات

أولا : متباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد

سبق للطالب دراستها في المرحلة الأعدادية وامكن حلها وتمثيلها بيانيا على خط الأعداد ولذلك سنؤكد على بعض التعاريف والقوانين للمتباينات :

(١) إذا كان ٲ ، ب عددين حقيقيين ، فإنه يقال أن :

- ٲ أكبر من ب إذا كان ٲ – ب مقدارا موجبا

  أي أن ٲ > ب إذا كان (ٲ – ب) > صفر

- ٲ أصغر من ب إذا كان ٲ– ب مقدارا سالبا

  أى أن ٲ < ب إذا كان ٲ – ب < صفر

(٢) إذا كان ٲ ، ب عددين حقيقيين ، ٲ > صفر ، ب > صفر ، ٲ > ب ، فإن $ٲ^٢$ > $ب^٢$ ، أما إذا كان ٲ < صفر، ب < صفر ، وكان ٲ > ب فإن $ٲ^٢$ < $ب^٢$

(٣) إذا كانت ٲ ، ب، جـ أعدادا حقيقيه وكان ٲ > ب ، فإن :

I. ٲ + جـ > ب + جـ

II. ٲ جـ > ب جـ إذا كان جـ > صفر

III. ٲ جـ < ب جـ إذا كان جـ < صفر

(٤) إذا كان ٲ > ب ، ٲ ، ب متحدان فى الإشاره ، فإن $\frac{١}{ٲ} < \frac{١}{ب}$

(٥) حل المتباينه يعنى إيجاد قيم المتغير س مثلا التى تحقق المتباينه وسوف نعتبر أن مجموعه التعويض هى مجموعه الأعداد الحقيقية ح مالم يذكر خلاف ذلك .

أمثلة للمراجعه :

مثال [١] :

حل المتباينه ٣س +١ < ١٠ ومثل الحل بيانياً .

الحل :

بإضافة (–١) للطرفين

∵ ٣ س +١ – ١ < ١٠ – ١ ∴ ٣س < ٩

و بقسمة الطرفين ÷ (٣)

∴ س < ٣

∴ مجموعة الحل] −∞ ، ٣ [

مثال [٢] :

حل المتباينة ٧ − ٤ س ⩾ ٣ و مثل الحل بيانيا .

الحل :

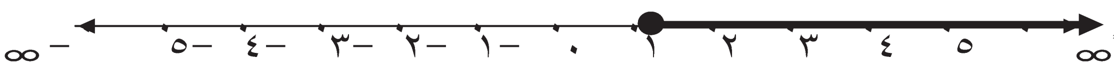
باضافة (−٧) للطرفين

∴ ٧ − ٤ س − ٧ ⩾ ٣ − ٧ ∴ − ٤ س ⩾ − ٤

بقسمة الطرفين ÷ (−٤)

∴ س ⩽ ١

∴ مجموعة الحل = [١ ، ∞ [



مثال [٣] :

أوجد قيم س التي تحقق المتباينتين الآتيتين معاً ثم مثلها بيانياً :

٢ س − ٧ < ١ ، ٣ − ٢ س ⩾ ٩

الحل :

∵ ٢ س − ٧ < ١ ∴ ٢ س < ٨

بقسمة الطرفين ÷ (٢)

∴ س < ٤

∵ ٣ − ٢ س ⩾ ٩ ∴ − ٢ س ⩾ ٦

بقسمة الطرفين ÷ (−٢)

∴ س ⩽ −٣

∴ قيم س التي تحقق المتباينتين هي الفترة ٤ > س ⩾ −٣

∴ مجموعة الحل هي [−٣ ، ٤ [

تمرين[١]

حل كلاً من المتباينات الآتية مع تمثيلها بيانياً على خط الأعداد :

١) س − ٨ ⩾ −١٠

٢) ٩ − $\frac{\text{س}}{\text{٣}}$ > ٩

٣) ٥ < $\frac{\text{س − ٢}}{\text{٣}}$

٤) $\frac{\text{س + ٤}}{\text{−٢}}$ > −١

٥) ٤ (٣ س − ٨) − ٩ (س + ٨) > ٤ س

٦) أوجد القيم الحقيقية للمتغير س التي تحقق كلاً من المتباينتين الآتيتين مع تمثيلها بيانياً على خط الأعداد :

٢ س − ٧ > صفر ، ٢ س < ١٩

٧) أوجد القيم الحقيقية للمتغير س التي تحقق كلاً من المتباينتين الآتيتين مع تمثيلها بيانياً على خط الأعداد :

٣ س + ٢ < ٨ س ، $\frac{\text{٣ − س}}{\text{٥}}$ > ٢ س

٨) أوجد القيم الحقيقية للمتغير س التي تحقق كلاً من المتباينتين الآتيتين مع تمثيلها بيانياً على خط الأعداد :

٥ س − ١١ > ٢ س − ٢ ، ٤ − ٧ س > ١١ − ٨ س

ثانيا : المتباينات من الدرجة الأولي في متغيرين

مثل : س+ ٤ ص > ٥ ، ٢ س + ٣ ص ≤ ١

س > ١ ، ص > ٢

ص + س + ١ > صفر ، ص > ٢س + ١

وسنقوم بدراسة تمثيل المتباينة من الدرجة الأولي في متغيرين بيانيا ، ثم نوجد الحل بيانياً لمتباينتين من الدرجة الأولى في متغيرين في آن واحد .

عند التعامل مع متباينة الدرجة الأولى في متغيرين ، مثل س + ص > ٤ نجد أن كل حل لها هو زوج مرتب مثل :

(١ ، ٤) ، (٠ ، ٦) ، (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٠) ، ....

وهذه الأزواج المرتبة تمثلها نقط في المستوي الديكارتي ولذلك فإن أي متباينة من الدرجة الأولي في متغيرين يمثلها بيانياً جزء من المستوي بحيث تحقق أي نقطة تقع في هذا الجزء من المستوي المتباينة وأي نقطة لا تقع في هذا الجزء من المستوى لا تحقق المتباينة

ولكي يمكن تمثيلها بيانياً نتبع الآتي :

نرسم المستقيم الذي نحصل على معادلته بوضع علامة = بدلاً من > أو < هذا المستقيم يقسم المستوى إلى جزئين وبذلك تنقسم نقط المستوي إلى ثلاث مجموعات

١) مجموعة نقط المستوى على جانب من المستقيم .

٢) مجموعة نقط المستوى على الجانب الأخر من المستقيم .

٣) مجموعة نقط المستوى التي تقع على المستقيم نفسه .

ونجد أن إحدي المجموعتين (١) أو (٢) تحقق المتباينة والمجموعة الأخري لا تحقق المتباينة ، أما المجموعة (٣) فتحقق المتباينة إذا كان هناك تساوي في المتباينة .

مثال [١] :

مثل المتباينة س + ص ≥ ٤ بيانياً

الحل:

نرسم المستقيم س + ص = ٤ بواسطة الجدول الآتي :

س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢

بالتعويض بالنقطة (صفر ، صفر) في المتباينة ، نجد أن :

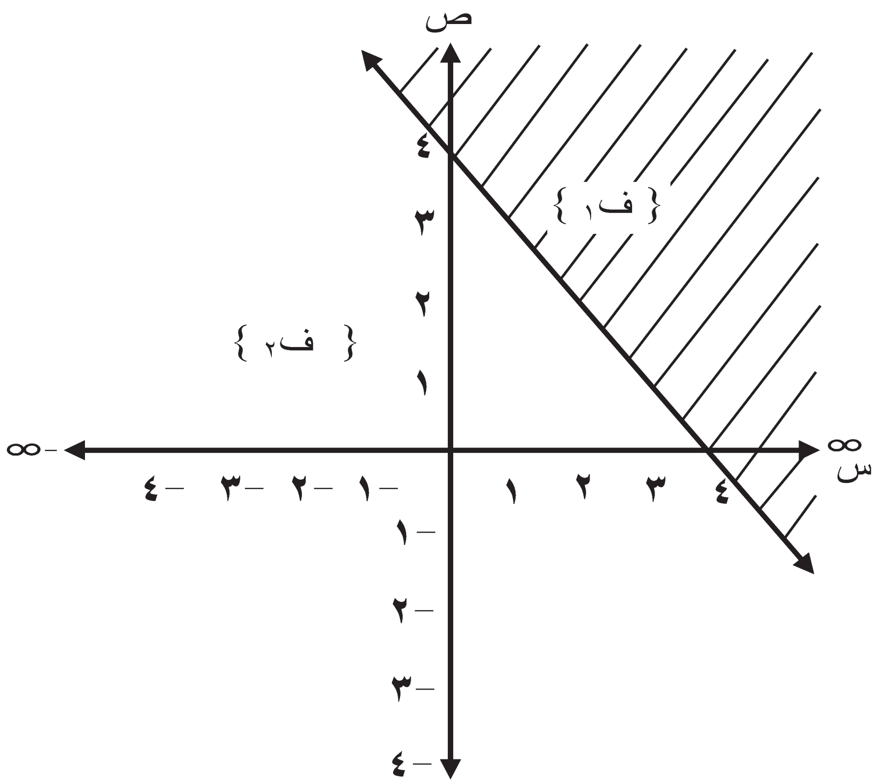
الطرف الأيمن = صفر + صفر = صفر < ٤

∴ جزء المستوي الذي تقع فيه النقطة (صفر ، صفر)

لا يحقق المتباينة

∴ الجزء الأخر من المستوي { ف$_١$} يحقق المتباينة .

ولوجود التساوي نرسم المستقيم خط متصل ونظلل { ف$_١$ } وهي مع نقط الخط المستقيم مجموعة الحل ، كما بالشكل الآتي :



الشرح والتحقيق :

المستقيم س + ص = ٤ قسم نقط المستوي إلي ثلاث مجموعات

١) مجموعة نقط المستوي{ ف$_١$ } وهي أعلي المستقيم وتحقق المتباينة حيث أنه لأي نقطة (س$_١$ ، ص$_١$) ∈ { ف$_١$ } نجد ان س$_١$ + ص$_١$ > ٤

٢) مجموعة نقط المستوى{ ف٢ } وهي أسفل المستقيم ولا تحقق المتباينة حيث أنه لأي نقطة (س٢ ، ص٢) ∋ { ف٢ } نجد ان س٢ + ص٢ < ٤

٣) مجموعة نقط المستقيم وهي تحقق المتباينة حيث أنه لأي نقطة (س٣ ، ص٣) تقع علي المستقيم نجد أن س٣ + ص٣ = ٤

ولذلك إذا أخذنا النقط (صفر ، ٥) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٢) ∋ { ف١ } ثم بالتعويض نجد أن:

س + ص = صفر + ٥ = ٥ > ٤ للأولي

= ٣ + ٣ = ٦ > ٤ للثانية

= ٥ + ٢ = ٧ > ٤ للثالثة

أي كلها تحقق المتباينة س + ص > ٤

وإذا أخذنا النقط (٤ ، صفر) ،(٦ ، −٢) ،(−٢ ، ٦) على المستقيم ثم بالتعويض نجد أن:

س + ص = ٤ + صفر = ٤ للأولي

= ٦ − ٢ = ٤ للثانية

= −٢ + ٦ = ٤ للثالثة

أي كلها تحقق المتباينة س + ص ⩾ ٤

إذا أخذنا النقط (١ ، −٢) ،(−١ ، ٢) ، (٣ ، −١) ∋ { ف٢ } ثم بالتعويض نجد أن:

س + ص = ١ − ٢ = −١ < ٤ للأولي

=−١ + ٢ = ١ < ٤ للثانية

= ٣ − ١ = ٢ < ٤ للثالثة

وكلها لا تحقق المتباينة س + ص ⩾ ٤

مثال [٢] :

مثل المتباينة ٣س + ٢ص < ٥ بيانياً

الحل :

نرسم المستقيم ٣ س + ٢ ص = ٥

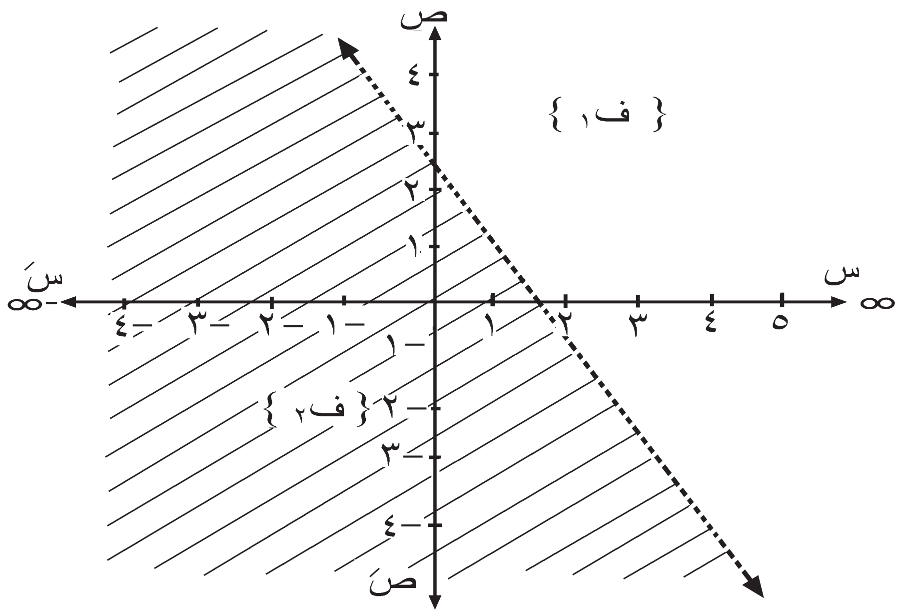
بمساعدة الجدول الأتي

س	٠	١	−١
ص	٢.٥	١	٤

وبالتعويض بالنقطة (صفر ، صفر) في المتباينة نجد أن :

الطرف الأيمن = صفر + صفر = صفر < ٥

∴ جزءالمستوي الذي تقع فيه نقطة الأصل يحقق المتباينة . ولعدم وجود التساوي نرسم المستقيم خط متقطع ونظلل { ف٢ } وهي مجموعة الحل كما بالشكل :



التحقيق :

نأخذ النقط (١ ، −١)، (−٢ ، −٢) ، (− ٣ ، ٣) ∋ { ف٢ } ثم بالتعويض نجد أن :

٣ س + ٢ ص = ٣×١ + ٢ (−١) = ١ < ٥ للأولى

= ٣×(−٢) + ٢ (−٢) = −١٠ < ٥ للثانية

= ٣ (− ٣) + ٢ (٣) = −٣ < ٥ للثالثة

أي ان هذه النقط تحقق المتباينة ٣س + ٢ص < ٥

<u>الحل البياني لمتباينتين من الدرجة الأولي في متغيرين في آن واحد</u>

الطريقة :

١–تمثل كل متباينة بيانيا كما سبق ونظلل جزء المستوى الذي تحقق نقطه المتباينة

٢–يكون جزء المستوى المشترك في التظليل لكل من المتباينتين هو الحل المشترك لهما .

مثال [١] :

حل المتباينتين س < ١ ، ص > ٢

الحل :

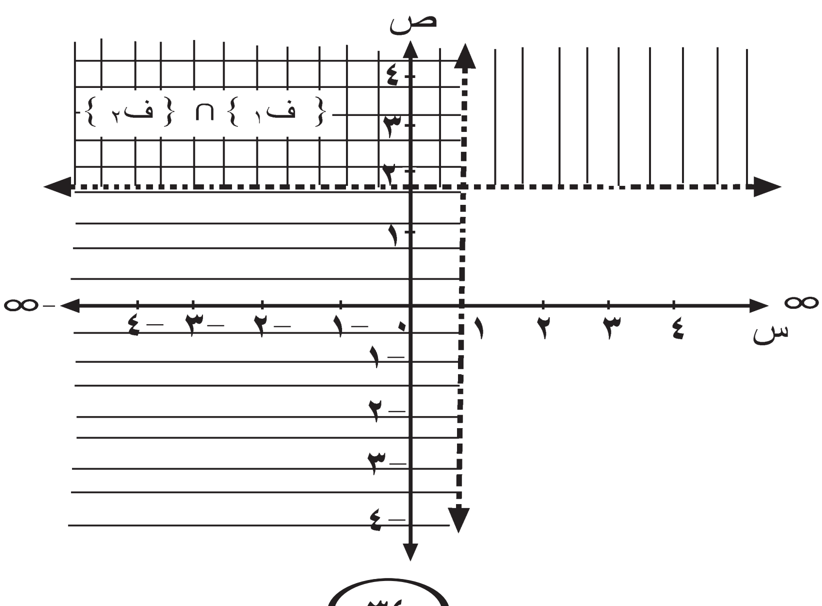
نرسم المستقيم س = ١ بقطع مستقيمة متقطعة لعدم وجود التساوي [التعويض بالنقطة (صفر ، صفر) في المتباينة نجد أن س = صفر < ١ تحقق المتباينة .

∴ جزء المستوى الذي تقع فيه النقطة (صفر،صفر) يحقق المتباينة وليكن{ ف$_{١}$ } ونظلله .

نرسم المستقيم ص = ٢ بقطع مستقيمة متقطعة لعدم وجود التساوي . بالتعويض بالنقطة (صفر ، صفر) في المتباينة نجد أن ص = صفر< ٢ لا تحقق المتباينة ص > ٢ .

∴ جزء المستوي الذي لا تقع فيه النقطة (صفر ، صفر) يحقق المتباينةوليكن {ف$_{٢}$ } ونظلله .

ويتضح من الشكل الجزء المشترك في التظليل ونجد أن جميع نقطة تحقق المتباينتين معاً وهي نقط { ف$_{١}$ } ∩ { ف$_{٢}$ } .



التحقيق :

نأخذ النقط (صفر ، ٣) ،(-٢ ، ٤) ، (- ٥ ، ٥) نجد أن :

س = صفر < ١ ، ص = ٣ > ٢ ∴ النقطة الأولي تحقق المتباينتان

كذلك س = -٢ < ١ ، ص = ٤ > ٢ ∴ النقطة الثانية تحقق المتباينتان

كذلك س = -٥ < ١ ، ص = ٥ > ٢ ∴ النقطة الثالثة تحقق المتباينتان

مثال [٢] :

أوجد حل المتباينتين الآتيتين آنياً :

س + ص > ٣ ، ص < ٢ س

الحل :

س	١	٢	٣
ص	٢	١	صفر

نرسم المستقيم س + ص = ٣ بمساعدة الجدول وذلك بقطع مستقيمة غير متصلة لعدم وجود التساوى.

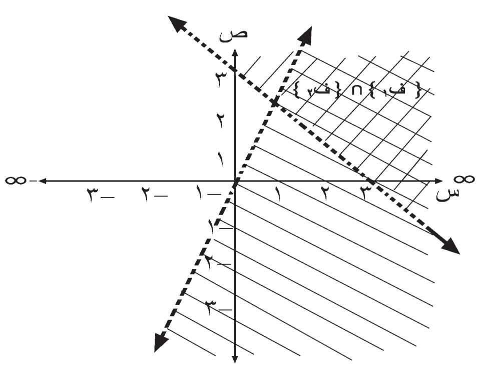
س	١	٢	صفر
ص	٢	٤	صفر

ثم نرسم المستقيم ص = ٢ س بمساعدة الجدول وذلك بقطع مستقيمة غير متصلة لعدم وجود التساوى.

نعوض بالنقطة (صفر ، صفر) في المتباينة الأولي صفر + صفر = صفر < ٣ إذن هذه النقطة لا تحقق المتباينة س+ ص > ٣ ولذلك نظلل الجزء الآخر من المستوي .

نعوض بالنقطة (صفر ، صفر) في المتباينة الثانية نجد أنها تقع على المستقيم ولذلك نأخذ النقطة (١ ، صفر) نجد أن ص = صفر < ٢ × ١ إذن هذه النقطة تحقق المتباينة . نظلل جزء المستوي الذي يشمل هذه النقطة . ومن الشكل نجد أن

{ ف١ } ∩ { ف٢ } تحقق المتباينتين معاً .



مثال [٣] :

أوجد حل المتباينتين الآتيتين آنياً :

ص + س + ١ > صفر ، ص ⩽ ٢ س + ١

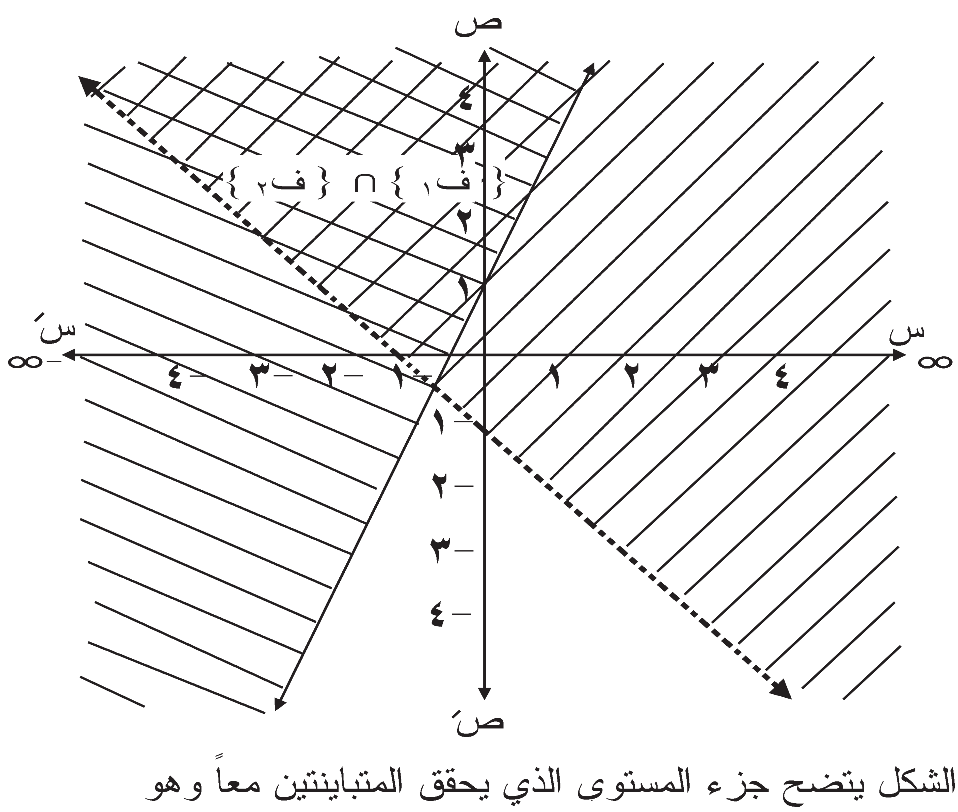
الحل :

١) نرسم المستقيم ص + س + ١ = صفر بمساعدة الجدول ، وذلك بقطع مستقيمة غير متصلة لعدم وجود التساوي ، ثم نظلل جزء المستوى الذي يحقق المتباينة .

س	صفر	١	−١
ص	−١	−٢	صفر

٢) نرسم المستقيم ص = ٢ س + ١ بمساعدة الجدول ، وذلك بخط مستقيم متصل لوجود التساوي ، ثم نظلل جزء المستوى الذي يحقق المتباينة .

س	صفر	١	−١
ص	١	٣	−١



من الشكل يتضح جزء المستوى الذي يحقق المتباينتين معاً وهو

{ ف١ } ∩ { ف٢ }

وأي نقطة تقع في هذا الجزء تحقق المتباينتين .

تمرين[٢]

أوجد الحل البياني لكل من المتباينات الآتية :

١) س ⩽ ٢ ٢) ص ⩾ ٣

٣) ص ⩾ ٣س -١ ٤) ص > - س - ٣

٥) ص < ٢س +١ ٦) ص > - ٢ س + ٣

أوجد الحل البياني لكل زوج من المتباينات الآتية آنياً :

٧) س ⩾ ٣ ، ص ⩽ - ١

٨) س > - ١ ، ٣ ص - ٩ < صفر

٩) ص + ٣ س > ٤ ، ص + ٣ < ٢ س

١٠) ص ⩽ ٢ س + ٦ ، ص < - ٣ س - ١

١١) ص ⩽ ٣ س + ٤ ، ص > ٣ س - ١

١٢) ٣ س - ص ⩽ ٦ ، ص - ٢ س > ١

تطبيقات عملية على حل المتباينات :

من أحدث فروع الرياضيات التي تعتمد أعتماداً كلياً على حل المتباينات ما يعرف بإسم البرمجة الخطية. وقد نشأ هذا الفرع خلال الحرب العالمية الثانية لحل بعض المشاكل في الحرب، ثم نما وأزدهربعد ذلك لإستخدامه في حل مشاكل الصناعة والتجارة والاقتصاد، كما أصبح هذا الفرع من الرياضيات مستخدماً فيما يسمى بحوث العمليات ومشروعات التخطيط والتخزين وغير ذلك من الأمور ذات الأهمية القصوى في نمو الاقتصاد وسنعرض لبعض الأمثلة التطبيقية للبرمجة الخطية.

مثال [١] :

أقصى عدد من العمال يمكن أن يعمل في مصنع خاص هو ١٢ عامل يومياً لصنع راديوهات وتليفزيونات. فإذا كان المصنع يربح في الراديو ١٠ جنيهات ويربح في التليفزيون ٢٥ جنيهاً ويريد أن يكون أقصى ربح له يومياً هو ١٤٥ جنيهاً بحيث يصنع أكثر من راديو واحد وأكثر من تليفزيون واحد. وضح بيانياً جزء المستوى الذي يحقق ذلك كله. علماً بأن صنع جهاز راديو واحد يحتاج إلى عامل واحد، وصنع جهاز تليفزيون واحد يحتاج إلى عاملين. ثم أوجد عدد الأجهزة من كل صنف التي يمكن أن تصنع يومياً حتى تتحقق كل هذه الشروط.

الحل :

نلخص المعلومات في الجدول الآتي:

الجهاز	رمز العدد	عدد الأجهزة يومياً	الربح	الأجهزة للعامل الواحد	متباينة عدد العمال	متباينة الربح
راديو	س	س > ١	١٠ س	١	س + ٢ ص ≤ ١٢	١٠ س + ٢٥ ص ≤ ١٤٥
تليفزيون	ص	ص > ١	٢٥ ص	١/٢		

س + ٢ ص ≤ ١٢

المستقيم س + ٢ ص ≤ ١٢ متصل

س	١	٢	٣	٤
ص	٥.٥	٥	٤.٥	٤

١٠ س + ٢٥ ص ≤ ١٤٥

المستقيم ١٠ س + ٢٥ ص ≤ ١٤٥متصل

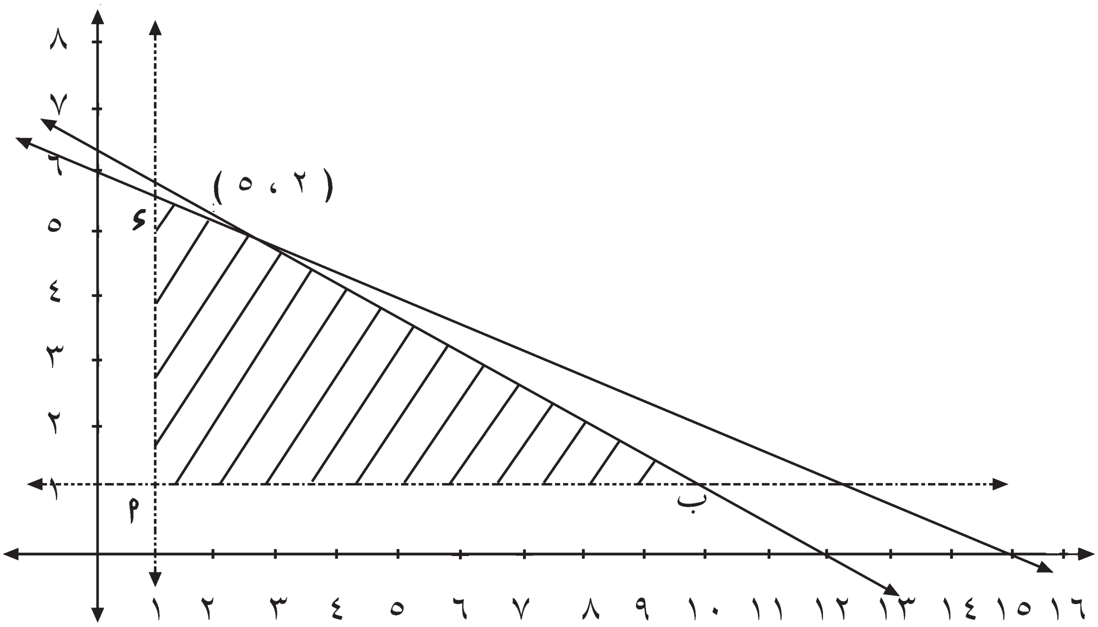
س	١	٢	٣	٤
ص	٥.٤	٥	٤.٦	٤.٢

س > ١

المستقيم س = ١ غير متصل

ص > ١

المستقيم ص = ١ غير متصل



من الشكل يتضح أن جميع نقط سطح المضلع م ب ﺟ ء تحقق جميع المتباينات ما عدا نقط م ب ، م ء ، لأن عند كل من س = ١ أو ص = ١ وهذا يخالف الشروط ، أما عند ﺟ فيتقاطع الخطان المستقيمان ويكون

٢س + ٥ ص = ٢٩ (١)

س + ٢ ص = ١٢ (٢)

بضرب (٢) في ٢ وطرحها من (١) يكون ٢س + ٥ ص = ٢٩

٢ س + ٤ ص = ٢٤

٠ + ص = ٥

∴ ص = ٥ ، وبالتعويض نجد أن س = ٢ وهذه النقطة ﺟ (٢ ، ٥) تحقق جميع الشروط

∴ عدد الراديوهات = ٢ راديو ، عدد التليفزيونات = ٥ تليفزيون هذا ما يجب أن يصنع ليعطي أكبر ربح ممكن يومياً

مثال [٢] :

تقوم أحدى المدارس بتقديم وجبات غذائية لتلاميذها مكونة من صنفين من الأطعمة كل وحدة من الصنف الأول تشتمل على وحدة واحدة من البروتينيات ووحدتين من الفيتامينات بينما تشتمل الوحدة من الصنف الثاني على ٣ وحدات من البروتينات ووحدة واحدة من الفيتامينات وثمن الوحدة من الصنف الأول قرشان ومن الصنف الثاني ٣ قروش فإذا كان التلميذ الواحد يلزمه على الأقل ١٥ وحدة من البروتينات و١٠ وحدات من الفيتامينات أوجد عدد الوحدات التي يجب أن تقدمها المدرسة من كل صنف في الوجبة الواحدة بحيث تضمن لكل تلميذ الحد الأدني من البروتينات و الفيتامينات بأقل تكلفة ممكنة.

الحل :

نلخص المعلومات في الجدول الآتي:

الصنف	الرمز	عدد وحدات البروتينات	عدد وحدات الفيتامينات	متباينة الصنف	متباينة الفيتامينات	متباينة البروتينات	التكلفة حـ
الأول	س	١×س	٢×س	س> صفر	٢س+ ص	س+ ٣ص	حـ=٢س+ ٣ص
الثاني	ص	٣×ص	١×ص	ص> صفر	⩾ ١٠	⩾ ١٥	

للمتباينة س > صفر نرسم محور الصادات عل هيئة قطع مستقيمة غيرمتصل

للمتباينة ص > صفر نرسم محور السينات عل هيئة قطع مستقيمة غيرمتصل

للمتباينة ٢س + ص⩾ ١٠

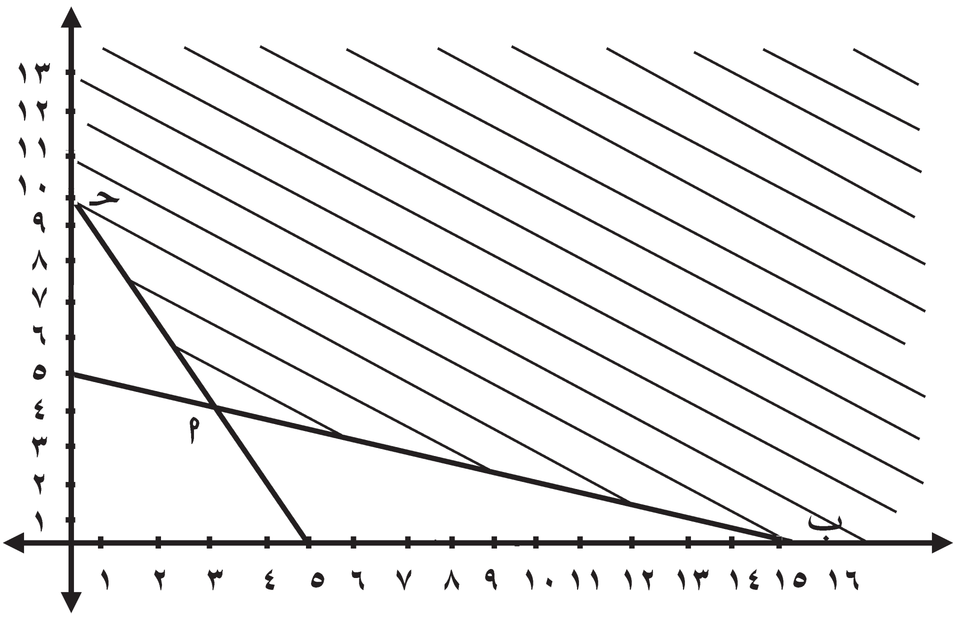
نرسم المستقيم ٢ س + ص = ١٠ علي هيئة خط مستقيم متصل لوجود التساوي بمساعدة الجدول

س	١	٢	٣
ص	٨	٦	٤

للمتباينة س + ٣ ص ⩾ ١٥

نرسم المستقيم س +٣ ص = ١٥ علي هيئة خط مستقيم متصل لوجود التساوي بمساعدة الجدول

س	صفر	٣	٦
ص	٥	٤	٣



ومن الرسم يتضح أن الجزء المظلل هو الذي يحقق جميع المتباينات ويحــده مــن أسفل النقط ء ، ب ، ء ولكن النقطتين ب ، ء لا تنتمى لمنطقة الحل لأن

س > صفر ، ص > صفر أما النقطة ء فهي تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ١٠ ، س + ٣ص = ١٥ بضرب المعادلة الأولى × ٣

٦ س + ٣ ص = ٣٠

س + ٣ ص = ١٥

بالطرح ٥ س = ١٥

∴ س = ٣ بالتعويض نجد أن ص = ٤

∴ نقطة ء (٣ ، ٤)

∴ عدد وحدات الصنف الأول = ٣ وحدات

∴ عدد وحدات الصنف الثاني = ٤ وحدات

∴ أقل تكلفة = ٢ س + ٣ ص = ٢ × ٣ + ٣ × ٤ = ٦ + ١٢ = ١٨ قرش

تمارين[٣]

١) أوجد بيانياً مجموعة الحل لمجموعة المتباينات الآتية :

٢س + ٣ ص ⩽ ١٢٠ ، س + ٢ ص ⩽ ٨٠ ، ٣س + ص ⩽ ٩٠

س⩾ ٠ ، ص ⩾ ٠ ، ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س ، ص)

التي تجعل ر أكبر ما يمكن حيث ر = ٥ س + ٨ ص

٢) مصنع ينتج نوعين من البنطلونات النوع الأول يحتاج متر واحد من القماش وأربعة ساعات عمل ويباع بمكسب ١٢ جنيهاً والنوع الثاني يحتاج ١.٥ متر من القماش وساعتين عمل ويباع بمكسب ٨ جنيهات . فإذا علمت أن كمية القماش المتاحة للمصنع هي ١٥٠ متراً وساعات العمل المتاحة ٤٠٠ ساعة عمل وأن المصنع يمكنه بيع كل إنتاجه من البنطلونات . فأوجد عدد البنطلونات من كل نوع التي ينتجها المصنع لكي يحقق أقصى ربح .

٣) ينتج أحد المصانع نوعين من الدراجات مستخدما في ذلك ألتين مختلفتين ٢ ، ب إنتاج إحدي الدراجات من النوع الأول يقتضي تشغيل الماكينة ٢ لمدة ساعتين وتشغيل الماكينة ب لمدة ٤ ساعات ، بينما إنتاج إحدى الدراجات من النوع الثاني يقتضي تشغيل الماكينة ٢ لمدة ٤ ساعات وتشغيل الماكينة ب لمدة ساعتين . إذا كان المصنع لا يعمل أكثر من ١٨ ساعة في اليوم وكان ربح الشركة في الدراجة الواحدة من النوع الأول ٢٥ جنيهاً وربحها في الدراجة الواحدة من النوع الثاني ٢٠ جنيهاً ،فما هو عدد الدراجات من كل نوع التي ينبغي على الشركة إنتاجها يومياً حتى تحقق أكبر ربح ممكن .

٤) تنتج أحدى الورش لصنع الأثاث نوعين من المكاتب أحدهما فاخر والآخر إقتصادي وكل منهما يلزم لإنتاجه تشغيل نوعين من الماكينات ٢ ، ب فإذا كان إنتاج المكتب من النوع الفاخر يقتضي تشغيل الماكينة ٢ لمدة ٣ ساعات وتشغيل الماكينة ب لمدة ساعتين، بينما إنتاج المكتب من النوع الإقتصادي يقتضي تشغيل الماكينة ٢ لمدة ساعتين وتشغيل الماكينة ب لمدة٣ ساعات وكان المصنع يربح ٢٠ جنيهاً في المكتب الفاخر ، ١٢ جنيهاً في المكتب الإقتصادي

، أوجد عدد المكاتب من كل نوع التي ينبغي على الورشة إنتاجها في اليــوم حتى يحقق أكبر ربح ممكن علماً بأن الورشة لا تعمل أكثر من ١٥ ساعة في اليوم.

٥) تقدم ربة منزل لأسرتها وجبة مكونة من صنفين من الطعام ، كل وحــدة من الصنف الأول تحتوي علي وحدة من البروتينات ووحدتين من الفيتامينات بينما تحتوي الوحدة من الصنف الثاني وحدة واحدة من كل منهما . فإذا كان كل فرد من الأسرة يلزمه علي الأقل ٥ وحــــدات من البروتينـــات ، ٨ وحدات من الفيتامينات وكان ثمن الوحدة من الصنف الأول ١٢ قــرش وثمن الوحدة من الصنف الثاني ٧ قروش ، أوجد عدد الوحدات التي يجب أن تقدمها ربـــــة المنزل من كل صنف بحيث تضمن لأفراد الأسرة الحد الأدنى من البروتينات والفيتامينات بأقل تكلفة ممكنة .

الوحدة الرابعة

المتتابعات الحسابية والهندسية

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتعرف علي المتتابعة الحسابية .
- يتقن إيجاد الوسط الحسابي لعددين .
- يجيد إيجاد مجموع عدد ن من حدود متتابعة حسابية .
- يتعرف علي المتتابعة الهندسية .
- يتقن إيجاد الوسط الهندسي لعددين .
- يجيد إيجاد مجموع عدد ن من حدود متتابعة هندسية .
- يتعرف علي المتتابعات الهندسية اللانهائية التنازلية .

دروس الوحدة :

- المتتابعة الحسابية .
- الوسط الحسابي لعددين .
- مجموع عدد ن من حدود متتابعة حسابية .
- المتتابعة الهندسية .
- الوسط الهندسي لعددين
- مجموع عدد ن من حدود متتابعة هندسية .
- المتتابعات الهندسية اللانهائية التنازلية .

المتتابعات الحسابية والهندسية

المتتابعة الحسابية :

تأمل المتتابعات الآتية واكتشف صفة تتميز بها جميعاً :

أ) (١ ، ٤ ، ٧ ، ١٠ ، ١٣ ، ١٦ ، ....)

ب) (−٢٠ ، −٣٠ ، −٤٠ ، −٥٠ ، −٦٠ ، −٧٠ ، ....)

جـ) (١٠ ، ٥ ، ٠ ، −٥ ، −١٠ ، −١٥ ، ....)

.. نجد في كل من هذه المتتابعات أن قيم الحدود تزيد أو تنقص بمقدار ثابت أو بمعنى آخر :

أن الفرق بين كل حد والحد السابق له مباشرة عدد ثابت .

سوف نرمز لقيم الحدود :

الحد الأول ، الحد الثاني ، الحد الثالث ، ....، الحد النوني .

$ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ،................، $ح_ن$.

وإذا كان $ح_ن$ دالة في المتغير ن فإنه يسمي" الحد العام للمتتابعة "

تعريف :

المتتابعة ($ح_ن$) متتابعة حسابية

المتتابعة الحسابية ($ح_ن$) ⇔ $ح_{ن+١} - ح_ن$ = عدداً ثابتاً لكل ن ∈ $ص^+$

- يعني الفرق بين أي حد والحد السابق له مباشرة قيمة ثابتة .
- الرمز ⇔ إذاً وفقط إذا (الأيمن يؤدي للأيسر والأيسر يؤدي للأيمن) .

مثال [١] :

اكتب الحدود السبعة الأولى من المتتابعة الحسابية التي حدها الرابع ١٤ وأساسها ٣ .

الحل :

∵ المتتابعة الحسابية

∴ $ح_{ن+١} - ح_ن = ٣$ (الأساس)

بوضع ن = ٣ ∴ $ح_٤ - ح_٣ = ٣$

∴ ح$_{٣}$ = ح$_{٤}$ − ٣ = ١٤ − ٣ = ١١

بوضع ن = ٢ ∴ ح$_{٣}$ − ح$_{٢}$ = ٣

∴ ح$_{٢}$ = ح$_{٣}$ − ٣ = ١١ − ٣ = ٨

بوضع ن = ١ ∴ ح$_{٢}$ − ح$_{١}$ = ٣

∴ ح$_{١}$ = ح$_{٢}$ − ٣ = ٨ − ٣ = ٥

∴ المتتابعة هي (٥ ، ٨ ، ١١ ، ١٤ ، ١٧ ، ٢٠ ، ....)

من الواضح لتكوين متتابعة بمعلومية قيمة حد ما وأساس المتتابعة عندما نتجه جهة اليمين من الحد المعلوم نطرح الأساس ء . و عندما نتجه جهة اليسار من الحد المعلوم نجمع الأساس. ء

(ح$_{٤}$−٣ء ، ح$_{٤}$−٢ء ، ح$_{٤}$−ء ، ح$_{٤}$ ، ح$_{٤}$+٣ء ، ح$_{٤}$+٢ء ، ح$_{٤}$+ء)

− ء   + ء

مثال [٢] :

كون المتتابعة التي حدها الأول ١٠.٥ وأساسها ٢.٥

الحل :

(١٠.٥ ، ١٠.٥ + ٢.٥ ، ١٠.٥ +٢ × ٢.٥)

المتتابعة (١٠.٥ ، ١٣ ، ١٥.٥ ، ١٨ ، ٢٠.٥ ، ....)

مثال [٣] :

كون المتتابعة الحسابيه التى حدها الأول ((٩)) واساسها ((ء))

الحل :

المتتابعه (٩ ، ٩ + ء ، ٩ + ٢ ء ، ٩ + ٣ ء ، ....)

مثال [٤] :

كون المتتابعة الحسابيه التى حدها العاشر ٥٠ واساسها (−٥) واوجد ح$_{٦}$

الحل :

المتتابعه : ٩٥ ، ٩٠ ، ٨٥ ، ٨٠ ، ٧٥ ، ٧٠ ، ٦٥ ، ٦٠ ، ٥٥ ، ٥٠)

ح$_{٦}$ = ٧٠

الصوره العامه للمتتابعه الحسابية :

إذا فرض ان الحد الأول $ا$ والاساس $ء$

المتتابعة الحسابيه

($ا$ ، $ا+ء$ ، $ا+٢ء$ ، .... ، $ح_{ن}$)

الحد العام (الحد النونى) $ح_{ن}$

$ح_{١} = ا$ $\quad = ا + (١-١) \times ء$

$ح_{٢} = ا + ء$ $\quad = ا + (٢-١) \times ء$

$ح_{٣} = ا + ٢ء$ $\quad = ا + (٣-١) \times ء$

... ...

... ...

$ح_{١٠} = ا + ٩ء$

$= ا + (١٠-١) \times ء$

$\therefore ح_{ن} = ا + (ن - ١) \times ء$

إذا كان عدد الحدود ن فإن الحد الأخير $ل = ا + (ن - ١) \times ء$

مثال [١] :

أوجد رتبة الحد الذى قيمته ٩٦ من المتتابعه (١ ، ٦ ، ١١ ، ١٦ ، ...)

الحل

$ح_{١} = ١$ والأساس $= ٦ - ١ = ٥$

$\therefore$ المتتابعه حسابية

نفرض أن الحد الذى قيمته ٩٦ هو $ح_{ن}$

$\because ح_{ن} = ا + (ن - ١) ء \Leftarrow ٩٦ = ١ + (ن - ١) \times ٥$

$٩٥ = ٥ (ن - ١)$ $\quad \therefore ن - ١ = ١٩$

$\therefore ن = ٢٠$ $\quad \therefore$ رتبة الحد هي $ح_{٢٠}$

مثال [٢] :

إذا كان الحد العام في متتابعة ما هو $ح_{ن} = ٣ ن - ٤$ فأثبت أنها متتابعة حسابية.

الحل :

∴ $ح_{ن} = ٣ن - ٤$

∴ $ح_{ن+١} = ٣(ن + ١) - ٤ = ٣ن - ١$

∵ $ح_{ن+١} - ح_{ن} = (٣ن - ١) - (٣ن - ٤) = ٣$ = عدد ثابت

∴ المتتابعة حسابية وأساسها ء = ٣

مثال [٣] :

عين المتتابعة الحسابية التي فيها $ح_{٤} = -١٧$ ، $ح_{١١} = -٥٢$

الحل :

$ح_{٤} = أ + ٣ء = -١٧$ ....(١)

$ح_{١١} = أ + ١٠ء = -٥٢$ ....(٢) .... من (١) و(٢)

$-٧ء = ٣٥$ ∴ $ء = -٥$ ....(٣)

بالتعويض من (٣) في (١) $أ + ٣ × (-٥) = -١٧$ ∴ $أ = -٢$

المتتابعة هي (−٢ ، −٧ ، −١٢ ، −١٧ ، ....)

مثال [٤] :

متتابعة حسابية فيها $ح_{٣} + ح_{٥} = ١٨$ ، $ح_{٤} × ح_{٦} = ١١٧$ أوجد :

أولاً : المتتابعة ثانياً : $ح_{١٥}$

الحل:

$ح_{٣} + ح_{٥} = ١٨$ ، $ح_{٤} × ح_{٦} = ١١٧$

$أ + ٢ء + أ + ٤ء = ١٨$ ، $(أ + ٣ء) × (أ + ٥ء) = ١١٧$ ...(١)

$٢أ + ٦ء = ١٨$ بالقسمة على ٢

$أ + ٣ء = ٩$ ......(٢) بالتعويض من (٢) في (١)

∴ $أ + ٥ء = ١٣$ .....(٣) ، $أ + ٣ء = ١١٧$

∴ $٢ء = ٤$ بالتعويض في (١)

∴ $أ + ٣ × ٢ = ٩$ ∴ $أ = ٣$

∴ المتتابعة هي (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....)

$ح_{١٥} = ٩ + ١٤ ء$

$ح_{١٥} = ٣ + ١٤ \times ٢ = ٣١$

تدريب :-

ضع علامة(✓) أمام العبارة الصحيحة و علامة (✗) أمام العبارة الخطأ :

(١) المتتابعة (٣٧ ، ٤٠ ، ٤٣ ، ....) حسابية تزايدية ( )

(٢) المتتابعة (٩٨ ، ٩٥ ، ٩٢ ، ....) حسابية وأساسها٣ ( )

(٣) $(ح_ن) = (٣ن - ٢)$ متتابعة حسابية تزايدية ( )

(٤) $(ح_ن) = (٣^{٢ن+١})$ متتابعة غير حسابية ( )

الوسط الحسابي لعددين :

(٩ ، ب ، حـ) متتابعة حسابية $\Longleftrightarrow$ ب وسطاً حسابياً بين ٩ ، حـ

$\because$ حـ - ب = ب - ٩ (تعريف الأساس)

٢ ب = ٩ + حـ

$\therefore$ ب $= \frac{١}{٢}$ (٩ + حـ)

مثال [١] :

أوجد الوسط الحسابي بين ٣٢ ، - ٥٤

الحل :

الوسط الحسابي $= \frac{٣٢ + (-٥٤)}{٢} = \frac{-٢٢}{٢} = -١١$

مثال [٢] :

إذا كان س ، ص وسطين حسابيين **بين** ٩ ، ب

أثبت أن ب - ٩ = ٣ (ص - س)

الحل :

$\because$ س ، ص وسطين حسابيين بين ٩ ، ب

$\therefore$ (٩ ، س ، ص ، ب) متتابعة حسابية

$ح_٤$ = ٩ + ٣ (ء) حيث الأساس ء = ص - س

$\therefore$ ب = ٩ + ٣ (ص - س)

$\therefore$ ب - ٩ = ٣ (ص - س)

مثال [٣] :

إدخل بين ٣ ، ٢١ ثمانية أوساط حسابية

الحل :

(٣ ، $\underbrace{\boxed{و_١ ، و_٢ ، و_٣ ، و_٤ ، و_٥ ، و_٦ ، و_٧ ، و_٨}}$ ، ٢١)

ثمانية أوساط حسابية

∴ عدد الحدود = ٨ + ٢ = ١٠ حدود ذ

∵ ل = ٩ + (ن − ١) × ء

٢١ = ٣ + (١٠ − ١) × ء ∴ ١٨ = ٩ ء ∴ ء = ٢

∴ الاوساط الحسابية (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٩)

تمارين[١]

أوجد كلا من الحدين السابع والعاشر من كل من المتتابعات :

١) ١، ٣ ، ٥ ، ....

٢) −٩ ، −١١ ، −١٣ ، ....

أوجد كلا من الحدين الثامن والسادس عشر من كل من المتتابعات :

٣) $٣\frac{١}{٢}$ ، $٤\frac{٣}{٤}$ ، ٦ ، ....

٤) ٨ ، $٧\frac{١}{٢}$ ، ٧ ، ....

٥) أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الثالث ٥ وحدها السادس ١١

٦) إذا كان مجموع الحدين الأول والثالث في متتابعة حسابية هو − ١٩٠ ومجموع حدودها الثلاثة السابع والثامن والتاسع − ٢٢٥ أوجد المتتابعة وقيمة أول حد موجب .

٧) أوجد الوسط الحسابي بين الكميتين ١٧ ، ٦٧

٨) أدخل أحد عشر وسطاً حسابياً بين ٢٥ ، − ١١

٩) أدخل خمسة عشر وسطاً حسابياً بين ٤٥ ، − ١٩

١٠) متتابعة حسابية حدها السادس ٤٩ وحدها التاسع ٧٠ أوجد الوسط الحسابي بين حديها

مجموع عدد $ن$ من حدود متتابعة حسابية :

نفرض أن $حـ$ تعني مجموع $ن$ حداً الأولى من متتابعة حسابية

($ء$ ، $ء + د$ ، $ء + ٢د$ ، ....، $ل - ٢د$، $ل - د$، $ل$)

حيث $ل$ هو الحد الأخير (الحد النوني) لمتتابعة حسابية منتهية

$∴ حـ = ء + (ء + د) + (ء + ٢د) + ...+(ل - ٢د) +(ل - د) + ل$

$∴ حـ = ل + (ل - د) + (ل - ٢د) + ... + (ء + ٢د) + (ء + د) + ء$

بالجمع $٢ حـ = (ء + ل) + (ء + ل) + (ء + ل) + ...+(ء + ل) + (ء + ل) + (ء + ل) = ن × (ء + ل)$

$$\boxed{∴ حـ_{ن} = \frac{ن}{٢} (ء + ل)}$$

نتيجة :

$∴ ل = ح_{ن} = ء + (ن - ١) د$

$∴ حـ_{ن} = \frac{ن}{٢} [ء + ل] = \frac{ن}{٢} [ء + ء + (ن - ١) د]$

$$\boxed{∴ حـ_{ن} = \frac{ن}{٢} [٢ء + (ن - ١) × د]}$$

مثال [١] :

أوجد أول حد سالب في المتتابعة الحسابية (١٣٥ ، ١٢٨ ، ١٢١ ، ....)

ثم عين مجموع الحدود الموجبة .

الحل :

$ء = ١٣٥$ ، $د = - ٧$ يعني أول حد سالب $ح_{ن} <$ صفر

$∴ ء + (ن - ١) × د <$ صفر

$∴ ١٣٥ + (ن - ١) × (-٧) <$ صفر

$∴ ١٤٢ - ٧ ن <$ صفر $∴ ١٤٢ < ٧ن$ $∴ \frac{١٤٢}{٧} < ن$

∴ ن < $\frac{٢}{٧}$ ٢٠ ∴ ن = ٢١ حداً

∴ $ح_{٢١}$ = أ + ٢٠ء ∴ $ح_{٢١}$ = ١٣٥ + ٢٠ × (− ٧) = −٥

∴ المطلوب مجموع الحدود الموجبة يعني مجموع الحدود إبتداء من الحد الأول حتي الحد العشرون .

∴ $حـ_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) × ء]

∴ $حـ_{٢٠}$ = $\frac{٢٠}{٢}$ (٢ × ١٣٥ + ١٩ × −٧)

= ١٠ (٢٧٠ − ١٣٣) = ١٣٧٠

مثال[٢] :

أدخل ١٢ وسطا حسابياً بين ٣ ، ٢٩ ثم أوجد مجموع هذه الأوساط الحسابية.

الحل :

∵ (٣ ، $و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، ....، $و_{١١}$ ، $و_{١٢}$ ، ٢٩) متتابعة حسابية

أ = ٣ ....(١) $ح_{١٤}$ = ٢٩ = أ + ١٣ ء ....(٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ ٢٦ = ١٣ ء ∴ ء = ٢

المتتابعة هي (٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ....، ٢٣ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٢٩)

وما بين الحدين الأول ٣ و الأخير ٢٩ يسمى أوساطاً وهي

(٧ ، ٩ ، ١١ ، ....، ٢٣ ، ٢٥ ، ٢٧)

∴ $حـ_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (أ + ل)

$\therefore$ ح$_{١٢}$ = $\frac{١٢}{٢}$ (٧ + ٢٧) = ٦ × ٣٤ = ٢٠٤

$\therefore$ مجموع الأوساط = ٢٠٤

مثال[٣] :

متتابعة حسابية الحد الثالث فيها ١٧ والحد الثالث عشر فيها٧٧ أوجد مجموع التسعة عشر حداً الأولي منها .

الحل :

ح$_{٣}$ = ١٧ = ٩ + ٢ ء ....(١) ،

ح$_{١٣}$ = ٧٧ = ٩ + ١٢ء ....(٢)

بالطرح(١) من (٢)

٦٠ = ١٠ء $\therefore$ ء = ٦

بالتعويض في (١) $\therefore$ ١٧ = ٩ + ١٢ $\therefore$ ٩ = ٥

المتتابعة الحسابية (٥ ، ١١ ، ١٧ ، ٢٣ ، ....)

حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ [٢ ٩ + (ن − ١) × ء]

حـ$_{١٩}$ = $\frac{١٩}{٢}$ (٢ × ٥ + ١٨ × ٦) = $\frac{١٩}{٢}$ (١٠ + ١٠٨)

= ١١٢١

مثال[٤] :

متتابعة حسابية حدها الثاني ٩٥ و حدها الثلاثين (−٤٥) . أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابعة أبتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساوياً صفراً .

الحل :

$\therefore$ ح$_٢$ = ٢ + ء = ٩٥ .... (١)

ح$_{٣٠}$ = ٢ + ٢٩ ء = −٤٥ ... (٢)

بالطرح (١) من (٢): ٢٨ ء = −١٤٠ $\therefore$ ء = −٥

بالتعويض في (١) : ٢ − ٥ = ٩٥ $\therefore$ ٢ = ١٠٠

$\therefore$ المتتابعة الحسابية هي (١٠٠ ، ٩٥ ، ٩٠ ، ٨٥ ، .....)

نفرض أن عدد الحدود اللازم أخذها ليكون المجموع صفراً = ن حداً

حـ$_ن$ = $\frac{ن}{٢}$ (٢ ٢ + (ن − ١) × ء)

$\therefore$ ٠ = $\frac{ن}{٢}$ (٢ × ١٠٠ + (ن − ١) × −٥)

$\therefore$ ٢٠٠ − ٥ ن + ٥ = ٠ $\therefore$ ن = $\frac{٢٠٥}{٥}$ = ٤١

مثال[٥] :

عامل يعمل بمصنع يبدأ براتب سنوي قدره ٤٨٠٠ جنيه ، و يحصل على علاوة سنوية ثابتة قدرها ٢٤٠ جنيهاً . فكم يبلغ راتبه بعد ٢٠ عاماً و مجموع ما تقاضاه من المصنع خلال العشرون عاماً .

الحل :

العلاوة سنوية ثابتة = الأساس ء = ٢٤٠ جنيهاً .

الحد الأول ٢ = ٤٨٠٠ جنيهاً . " بداية الراتب "

ن = ٢٠ عاماً .

$\therefore$ ح$_{ن}$ = ٩ + (ن − ١) × ء

ح$_{٢٠}$ = ٤٨٠٠ + ١٩ × ٢٤٠ = ٤٨٠٠ + ٤٥٦٠

راتبه في السنة العشرين = ٩٣٦٠ جنيهاً .

حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (٩ + ل)

مجموع ما تقاضاه العامل = $\frac{٢٠}{٢}$ (٤٨٠٠ + ٩٣٦٠)

= ١٠ × ١٤١٦٠ = ١٤١٦٠٠ جنيهاً

مثال[٦] :

يقتصد عامل في نهاية سنة ما ٦٠٠ جنيه ، وأخذ يقتصد كل سنة تالية ٢٠٠ جنيه زيادة عما كان يقتصده في السنة السابقة لها . أوجد جملة ما اقتصده في نهاية السنة الخامسة عشر .

الحل :

٩ = ٦٠٠ ، ء = ٢٠٠ ، ن = ١٥

$\therefore$ حـ$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$ (٢ ٩ + (ن − ١) × ء)

= $\frac{١٥}{٢}$ (٢ × ٦٠٠ + ١٤ × ٢٠٠)

= $\frac{١٥}{٢}$ (١٢٠٠ + ٢٨٠٠)

= $\frac{١٥}{٢}$ × ٤٠٠٠ = ٣٠٠٠٠ جنيه .

تمارين[٢]

١) متتابعة حسابية حدها الأول ٥ و أساسها ١.٥ . أوجد حدها التاسع عشر منهـــا ، ثم أوجد مجموع التسعة عشر حداً الأولى منها .

٢) أوجد رتبة الحد الذي قيمته (–١٣) من المتتابعة الحســابية (١٩ ، ١٧ ، ١٥ ، ...) ، ثم أوجد مجموع تلك الحدود ابتداء من الحد الأول حتى الحد الذي قيمته (–١٣) .

٣) كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة (٣٠ ، ٢٦ ، ٢٢ ، ....) ليكون المجموع ٩٦ ؟

٤) أوجد مجموع المتتابعة (٣ ، ٦ ، ٩ ، ...... ، ٩٣) .

٥) أوجد عدد حدود و أساس المتتابعة الحسابية التي حدها الأول ٧ و حدها الأخير ٩٣ و مجموع حدودها ٥٠٠ .

٦) أوجد المتتابعة الحسابية التي مجموع الـــ ١٦ حداً الأولى منها ٢٨٨ ، و مجموع الـــ ٢٠ حداً الأولى منها ٤٤٠ .

٧) الحدالنوني من متتابعة حسابية(٥ن– ١)أوجد مجموع العشرين حداً الأولى منها .

٨) حنفية تصب في حوض ٤٠ لتراً في الساعة ، ثم بعد كل ساعة أخذت تصب في الحوض بزيادة ٥ لترات في كل ساعة عن الساعة التي قبلها ، فبعد كم ساعة يكون بالحوض ٦٢٥ لتراً ؟

٩) اقتصد عامل في سنة ما من أرباح مصنعه الذي تقاضاه مبلغ ٢٥٠٠ جنيـــه ، و أخذ يقتصد كل شهر ٥٠ جنيهاً زيادة على ما اقتصده في الشهر السابق لكل شـــهر تالي له ، فاحسب مجموع ما اقتصده في ١٠ سنوات .

المتتابعات الهندسية

تأمل التتابعات الأتية وحاول أن تكشف الصفة التي تميز بها كل المتتابعات الأتية :

- (٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ....)
- (٤ ، – ١٢ ، ٣٦ ، – ١٠٨ ، ٣٢٤ ، ....)
- (١٢٨ ، ٦٤ ، ٣٢ ، ١٦ ، ٨ ، ....)
- (١٠٠ ، – ٥٠ ، ٢٥ ، – ١٢.٥ ، ٦.٢٥ ، ....)

في كل هذه المتتابعات أن النسبة بين أي حد والحد السابق له مباشرة عدداً ثابتاً

ففي المتتابعة الأولي

$$\frac{٦٤}{٣٢} = \frac{٣٢}{١٦} = \frac{١٦}{٨} = \frac{٨}{٤} = \frac{٤}{٢} = ٢ \quad \text{عدد ثابت}$$

وفي المتتابعة الثانية

$$\frac{٣٢٤}{-١٠٨} = \frac{-١٠٨}{٣٦} = \frac{٣٦}{-١٢} = \frac{-١٢}{٤} = -٣ \quad \text{عدد ثابت}$$

ففي المتتابعة الثالثة

$$\frac{٨}{١٦} = \frac{١٦}{٣٢} = \frac{٣٢}{٦٤} = \frac{٦٤}{١٢٨} = \frac{١}{٢} \quad \text{عدد ثابت}$$

ففي المتتابعة الرابعة

$$\frac{٦.٢٥}{-١٢.٥} = \frac{-١٢.٥}{٢٥} = \frac{٢٥}{-٥٠} = \frac{-٥٠}{١٠٠} = \frac{-١}{٢} \quad \text{عدد ثابت}$$

إن مثل هذه المتتابعات تسمى متتابعات هندسية

تعريف

($ح_ن$) متتابعة هندسية $\Leftrightarrow$ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = عدداً ثابتاً

أي النسبة بين أي حد والسابق له مباشرة قيمة ثابتة

سوف نفرض أن العدد الثابت الناتج من النسبة بين أي حد والحد السابق له مباشرة يسمي أساس المتتابعة ونرمز له بالرمز $ر$

إذا كان $\frac{ح_٢}{ح_١} = ر$ حيث $ح_١ = أ$ $\therefore \frac{ح_٢}{أ} = ر$ $\therefore ح_٢ = أ ر$

، $\frac{ح_٣}{ح_٢} = ر$ $\therefore ح_٣ = ح_٢ . ر$ $\therefore ح_٣ = أ ر^٢$

، $\frac{ح_4}{ح_3} = ر$ ∴ $ح_4 = ح_3 \times ر$ ∴ $ح_4 = أ\, ر^3$

، ....

الصورة العامة للمتتابعة الهندسية :

(أ ، أر ، أ$ر^2$ ، أ$ر^3$ ، .... ، $\frac{ل}{ر^2}$ ، $\frac{ل}{ر}$ ، ل ، ......)

نضرب في ر ⟵   ⟶ نقسم على ر

الحد النوني ح :

$ح_1 = أ \qquad = أ\, ر^{1-1}$

$ح_2 = أ\, ر \qquad = أ\, ر^{2-1}$

$ح_3 = أ\, ر^2 \qquad = أ\, ر^{3-1}$

....

....

$ح_{10} = أ\, ر^9 \qquad = أ\, ر^{10-1}$

$$\therefore \boxed{ح_ن = أ\, ر^{ن-1}}$$

مثال [١] :-

كون المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٢ وأساسها ٥

الحل :

المتتابعة (٢ ، ١٠ ، ٥٠ ، ٢٥٠ ، ....)

مثال [٢] :-

كون المتتابعة الهندسية التي حدها الرابع ١٢٨ وأساسها $\frac{1}{2}$

الحل :

$\because$ ح$_٤$ = ٩ ر^٣ = ١٢٨ $\qquad$ $\because$ ر = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ ٩ $\left(\frac{١}{٢}\right)^٣$ = ١٢٨ $\qquad$ $\therefore$ ٩ × $\frac{١}{٨}$ = ١٢٨

$\therefore$ ٩ = ١٢٨ × ٨ = ١٠٢٤

$\therefore$ المتتابعة هي (١٠٢٤ ، ٥١٢ ، ٢٥٦ ، ١٢٨ ، ٦٤ ، ....)

مثال [٣] :-

كون المتتابعة الهندسية التي حدها العاشر ٣٢٠ و حدها السادس ٢٠

الحل :

ح$_{١٠}$ = ٩ ر^٩ = ٣٢٠.........(١) $\qquad$ ح$_٦$= ٩ ر^٥ = ٢٠............(٢)

بقسمة (١) ÷ (٢) $\quad \frac{٩\ ر^٩}{٩\ ر^٥} = \frac{٣٢٠}{٢٠}$ $\qquad$ $\therefore$ ر^٤ = ١٦ = (± ٢)^٤

$\therefore$ ر = ± ٢

بالتعويض في (١) : ٩ (± ٢)^٥ = ٢٠ $\qquad$ $\therefore$ ٩ = $\frac{٢٠}{\pm ٣٢}$ = ± $\frac{٥}{٨}$

عند ٩ = $\frac{٥}{٨}$ ، ر = ٢

المتتابعة الأولي ($\frac{٥}{٨}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٥}{٢}$ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ....)

عند ٩ =− $\frac{٥}{٨}$ ، ر = ٢

المتتابعة الثانية (− $\frac{٥}{٨}$ ، $\frac{٥}{٤}$ ، − $\frac{٥}{٢}$ ، ٥ ، −١٠ ، ٢٠ ، ....)

ملاحظة :

عند أخذ الجذر ذو الدليل الزوجي يوجد للمعادلة حلان حقيقيان مختلفان

مثلاً : س^٢ = ٢٥ $\therefore$ س = ± ٥ ، س^٤ = ٨١ $\therefore$ س = ± ٣ ، ....

مثال [٤] :-

إذا كان مجموع الحدين الأول و الثاني من متتابعة هندسية هو ٨ ، و مجموع الحدين الثالث و الرابع هو ٧٢ . فما هي المتتابعة الموجبة الحدود ؟

الحل :

$\because$ ح$_١$ + ح$_٢$ = ٨ $\qquad$ $\therefore$ ٩ + ٩ ر = ٨ $\qquad$ $\therefore$ ٩ (١ + ر) = ٨ .... (١)

$ح_3 + ح_4 = ٧٢$ ∴ $أ ر^2 + أ ر^3 = ٧٢$ ∴ $أ ر^2 (١ + ر) = ٧٢$ ... (٢)

بقسمة (٢) على (١) :

$$\frac{أ ر^2 (١ + ر)}{أ (١ + ر)} = \frac{٧٢}{٨}$$

∴ $ر^2 = ٩$ ∴ $ر = \pm ٣$

∵ الحدود موجبة ∴ ر = ٣ أو ر = −٣ مرفوض

بالتعويض في (١) ∴ أ (١ + ٣) = ٨ ∴ أ = ٢

المتتابعة هي (٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ، ١٦٢ ، ....)

تمارين [٣]

١) أوجد الحد السادس من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....)

٢) أوجد الحد التاسع من المتتابعة الهندسية (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ....)

٣) أوجد الحد الثامن من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ....)

٤) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الثاني ١٨ و حدها السادس $\frac{٢}{٩}$

٥) متتابعة هندسية حدها الخامس ٨١ و حدها الثاني ٢٤ . أوجد المتتابعة .

٦) متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني و الثالث ٦ و مجموع حديها السادس و السابع ٤٨٦ . أوجد المتتابعة .

الوسط الهندسي

(أ ، ب ، حـ) متتابعة هندسية ⇔ ب وسط هندسي بين أ ، ب

$$\frac{حـ}{ب} = \frac{ب}{أ}$$ (تعريف الأساس) ∴ $ب^2 = أ \times حـ$

$ب = \pm \sqrt{احـ}$ ⇔ ب وسط هندسي بين ا ، حـ

مثال [١] :

أوجد الوسط الهندسي بين ٢ ، ٨

الحل :

الوسط الهندسي بين ٢ ، ٨ = $\pm \sqrt{٢ \times ٨} = \pm \sqrt{١٦} = \pm ٤$

مثال [٢] : أدخل أربعة أوساط هندسية بين ٣ ، ٩٦

الحل :

$$(٣ ، و_{١} ، و_{٢} ، و_{٣} ، و_{٤} ، ٩٦)$$

عدد الحدود = عدد الأوساط + ٢ = ٦ حدود ، ∵ $ح_{ن} = أ\ ر^{ن-١}$

$ح_{٦} = أ \times ر^{٥}$ ∴ $٩٦ = ٣ \times ر^{٥}$

∴ $٣٢ = ر^{٥}$ ∴ $٢^{٥} = ر^{٥}$ ∴ $ر = ٢$

∴ الأوساط هي (٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨)

مثال [٣] :

إذا كان س ، ص وسطين هندسيين بين ٥ ، ١٣٥ فما قيمة كل من س ، ص ؟

الحل :

(٥ ، س ، ص ، ١٣٥) متتابعة هندسية

$(٥ ، ٥ر ، ٥ر^{٢} ، ٥ر^{٣})$

∴ $١٣٥ = ٥\ ر^{٣}$ ∴ $ر^{٣} = ٢٧$ ∴ $ر = ٣$

∴ س = ٥ × ٣ = ١٥

، ص = ٥ $(٣)^{٢}$ = ٥ × ٩ = ٤٥

تمارين [٤]

١) أوجد الوسط الهندسي بين ٢ ، ٣٣٨

٢) أوجد الوسط الهندسي بين −٦ ، −٢٩٤

٣) أدخل وسطين هندسيين بين ٩ ، ٧٢

٤) أخل ثلاثة أوساط هندسية بين ٤٨٦ ، ٦

٥) إذا كان الحد النوني لمتتابعة هندسية $(٢)^{ن-١}$ فأوجد الوسط الهندسي بين

مجموع عدد محدود من متتابعة هندسية :

إذا فرضنا أن الحد الأخير (الحد النوني) للمتتابعة الهندسية هو ل ، حـ مجموع ن حداً الأولى من المتتابعة .

$\text{حـ} = \text{أ} + \text{أ}\,\text{ر} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\text{ل}}{\text{ر}^{2}} + \frac{\text{ل}}{\text{ر}} + \text{ل}$ بضرب الطرفين في ر ...(١)

$\text{حـ}\,\text{ر} = \text{أ}\,\text{ر} + \text{أ}\,\text{ر}^{2} + \ldots\ldots + \frac{\text{ل}}{\text{ر}^{2}} + \frac{\text{ل}}{\text{ر}} + \text{ل} + \text{ل}\,\text{ر}$ ....(٢)

بطرح (١) من (٢) : $\text{حـ}\,\text{ر} - \text{حـ} = \text{ل}\,\text{ر} - \text{أ}$ $\therefore \text{حـ}\,(\text{ر} - 1) = \text{ل}\,\text{ر} - \text{أ}$

$\therefore \text{حـ} = \dfrac{\text{ل}\,\text{ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1}$ ، $\text{ر} \neq 1$ ، $\text{ر} > 1$

بالضرب × (-١) بسطاً و مقاماً للطرف الأيسر

$\therefore \text{حـ} = \dfrac{\text{أ} - \text{ل}\,\text{ر}}{1 - \text{ر}}$ ، $\text{ر} \neq 1$ ، $\text{ر} < 1$ و نعلم أن $\text{ل} = \text{أ} \times \text{ر}^{\text{ن}-1}$

$\therefore \text{حـ} = \dfrac{\text{أ}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1}$ ، $\text{ر} \neq 1$ ، $\text{ر} > 1$

$\text{حـ} = \dfrac{\text{أ}\,(1 - \text{ر}^{\text{ن}})}{1 - \text{ر}}$ ، $\text{ر} \neq 1$ ، $\text{ر} < 1$

مجموع المتتابعة الهندسية بدلالة الحد الأخير ل :

$$\text{حـ} = \frac{\text{ل}\,\text{ر} - \text{أ}}{\text{ر} - 1}$$

مجموع المتتابعة الهندسية بدلالة عدد الحدود ن :

$$\text{حـ}_{\text{ن}} = \frac{\text{أ}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1}$$

مثال [١] :

أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ……)

الحل :

$أ = ٣ \quad ، \quad ر = \frac{١٢}{٦} = ٢ \quad ، \quad ن = ٦$

$$\therefore حـ_ن = \frac{أ\,(ر^ن - ١)}{ر - ١} = \frac{٣\,(٢^٦ - ١)}{٢ - ١} = \frac{٣ \times (٦٤ - ١)}{١}$$

$$= ٣ \times ٦٣ = ١٨٩$$

مثال [٢] :

أوجد مجموع الثمانية حداً الأولى من المتتابعة الهندسية(١ ، −٢ ، ٤، −٨ ، ..)

الحل :

$أ = ١ \quad ، \quad ر = \frac{-٢}{١} = -٢ \quad ، \quad ن = ٨$

$$\therefore حـ = \frac{أ\,(١ - ر^ن)}{١ - ر} = \frac{١\,(١ - (-٢)^٨)}{١ - (-٢)} = \frac{١ - ٢٥٦}{٣} = \frac{-٢٥٥}{٣}$$

مثال [٣] :

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٦٤ وحـــدها الأخيـــر ٧٢٩ وأساسها ١.٥ .

الحل :

$أ = ٦٤ \quad ، \quad ل = ٧٢٩ \quad ، \quad ر = ١.٥$

$$\therefore حـ = \frac{ل\,ر - أ}{ر - ١} = \frac{٧٢٩ \times ١.٥ - ٦٤}{١.٥ - ١}$$ بضرب حدي الكسر × ٢

$$\therefore حـ = \frac{٢١٨٧ - ١٢٨}{٣ - ٢} = \frac{٢٠٥٩}{١} = ٢٠٥٩$$

مثال [٤] :

أوجد أساس المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ٣ و حدها الأخير ٧٦٨ ومجموعها ٥١٣ ، ثم أوجد عدد حدودها .

الحل :

∵ $حـ = \frac{ل ر - ﺃ}{ر - ١}$ لأن الحد الأخير > الحد الأول ∴ المتتابعة تزايدية ر > ١

$٥١٣ = \frac{٧٦٨ ر - ٣}{ر - ١}$

٥١٣ ر – ٥١٣ = ٧٦٨ ر – ٣

٥١٣ ر – ٧٦٨ ر = ٥١٣ – ٣

-٢٥٥ ر = ٥١٠ ∴ $ر = \frac{٥١٠}{-٢٥٥} = -٢$

∵ $ل = ﺃ \times ر^{ن-١}$ ∴ $٧٦٨ = ٣ (-٢)^{ن-١}$ ∴ $٢٥٦ = (-٢)^{ن-١}$

$(-٢)^{٨} = (-٢)^{ن-١}$ ∴ ن – ١ = ٨ ∴ ن = ٩

تمارين [٥]

١) أوجد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية (٢ ، ٤ ، ٨ ، ...)

٢) أوجد مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية(٢٧ ، ٩ ، ٣ ، ....)

٣) أوجد الحد الثامن و مجموع الثمانية حدود الأولى من المتتابعة .
(٣ ، ٦ ، ١٢، ....)

٤) متتابعة هندسية مجموع حدودها ٣٦٤ و حدها الأول ٢٤٣ و حدها الأخيـــر ١ فما هي المتتابعة ؟

٥) مجموع حدود متتابعة هندسية ٣٩٠٥ وحدها الأخير ٣١٢٥ وأساسـها ٥ فما هو حدها الأول وعدد حدودها ؟

٦) كم حداً يلزم أخذها من المتتابعة الهندسية (٣ ، ٦ ، ١٢ ، ....) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع مساوياً ٣٨١ ؟

٧) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الثاني = ١٢ و حدهـا الخامس = ١.٥ ، ثم أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها .

٨) أوجد مجموع الحدود السبعة الأولى من المتتابعة الهندسية التي حدها النـــوني هـــو $\frac{٣}{٤} (-٢)^{ن+١}$.

المتتابعات الهندسية اللانهائية التنازلية :

تسمى المتتابعات الهندسية التي يزداد عدد حدودها إلى ما لانهاية بالمتتابعة الهندسية اللانهائية و إذا كان أساس المتتابعة كسر (بسطه أصغر من مقامه) سميت متتابعة هندسية لانهائية تنازلية .

مثال :

فإذا كان $ر = \frac{١}{٢}$ فإن

$$\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{١}{٤} \quad ، \quad \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} = \frac{١}{٣٢} \quad ، \quad \left(\frac{١}{٢}\right)^{١٠} = \frac{١}{١٠٢٤}$$

أي أن ر كسر حقيقي فإنه برفع الأس الصحيح الموجب كلما زاد الأس فإن ر تصغر صغراً كافياً حتى تؤول إلى الصفر كلما كبرت ن واقتربت من اللانهاية .

∴ عندما ن تؤول إلى ما لانهاية فإن $ر^{ن} \longrightarrow$ صفر

$$∴ ح_{ن} = \frac{أ\ (١ - ر^{ن})}{١ - ر} \quad \text{فعندما } ن \longrightarrow \infty \quad \text{فإن } ر^{ن} \longrightarrow \text{صفر}$$

$$∴ ح_{\infty} = \frac{أ\ (١ - ٠)}{١ - ر} \qquad ∴ ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} \quad (\text{بحيث } ١ > ر > -١)$$

$$\boxed{ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر}}$$

مثال [١] :

أوجد مجموع المتتابعة الهندسية الانهائية (٦٤ ، -٣٢ ، ١٦ ، ....)

الحل :

$$أ = ٦٤ \quad ، \quad ر = \frac{-٣٢}{٦٤} = \frac{-١}{٢}$$

$$∴ ح_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٦٤}{١ - (-٠.٥)} = \frac{٦٤}{١.٥} = \frac{١٢٨}{٣}$$

مثال [٢] :

متتابعة هندسية لانهائية الحد الثالث منها ٣ وكل حد من حدودها يساوي ثلاثة أمثال مجموع الحدود التالية له إلى ما لانهاية ، فما هي المتتابعة ؟

الحل :

$\because$ ح$_٣$ = ٣ $\therefore$ ٢ ر^٢ = ٣ .... (١)

$\therefore$ ٢ = ٣ (٢ ر + ٢ ر^٢ + ٢ ر^٣ + ... ∞)

$٢ = ٣ \times \frac{٢\ ر}{١ - ر}$ $\therefore$ ١ − ر = ٣ ر $\therefore$ ١ = ٤ ر

$\therefore$ ر = $\frac{١}{٤}$ .... (٢) من (٢) في (١)

$\therefore$ ٢$(\frac{١}{٤})^٢$ = ٣ $\therefore$ ٢ = ١٦ × ٣ = ٤٨

$\therefore$ المتتابعة هي (٤٨ ، ١٢ ، ٣ ، ....)

مثال [٣] :

ما المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ١٢ وحدها الرابع $\frac{٣}{٢}$ ، ثم أوجد مجموع عدد لانهائي من حدودها .

الحل :

٢ = ١٢ ، ٢ر^٣ = $\frac{٣}{٢}$ $\therefore$ ١٢ ر^٣ = $\frac{٣}{٢}$

$\therefore$ ر^٣ = $\frac{٣}{١٢ \times ٢}$ = $\frac{١}{٨}$ $\therefore$ ر = $\frac{١}{٢}$

المتتابعة هي (١٢ ، ٦ ، ٣ ، ....)

ح$_∞$ = $\frac{٢}{١ - ر}$ = $\frac{١٢}{١ - ٠.٥}$ = $\frac{١٢}{٠.٥}$ = ٢٤

مثال [٤] :

حول الكسر العشري الدائري إلى كسر اعتيادي : (أ) $٠.\dot{٣}$ ، (ب) $٠.٥\dot{١}$

الحل :

(أ) $٠.\dot{٣} = ٠.٣٣٣٣ ..... \infty = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + ... \infty$

أ $= ٠.٣$ ، ر $= ٠.١$ $\therefore$ $حـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٠.٣}{١ - ٠.١} = \frac{٠.٣}{٠.٩} = \frac{١}{٣}$

(ب) $٠.٥\dot{١} = ٠.٥١١١١ ..... \infty$

$= \frac{٥}{١٠} + \left(\frac{١}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠٠} + ... \infty \right)$

$\therefore ٠.٥\dot{١} = \frac{٥}{١٠} + \frac{أ}{١ - ر} = \frac{٥}{١٠} + \frac{٠.٠١}{١ - ٠.١} = \frac{٥}{١٠} + \frac{٠.٠١}{٠.٩} = \frac{٥}{١٠} + \frac{١}{٩}$

$= \frac{٤٥+١}{٩٠} = \frac{٤٦}{٩٠} = \frac{٢٣}{٤٥}$

تمارين [٦]

أوجد مجموع كل من المتتابعات اللانهائية الآتية :

١) (١٦ ، ٨ ، ٤ ، ....)

٢) (٧٢ ، ٤٨ ، ٣٢ ، ....)

٣) (٣ ، ١ ، $\frac{1}{3}$ ، ....)

٤) الحد الثاني من متتابعة لانهائية ٩ والحد الرابع ١ ، فما مجموعها ؟

٥) متتابعة هندسية مجموع حديها الأول والثاني ٨٠ ، وكل حد فيها يساوي ضعف مجموع الحدود التالية له إلى ما لانهاية . أوجد المتتابعة و مجموعها إلى ما لانهاية .

٦) حول الكسر العشري الدائري إلى كسر اعتيادي :

(أ) $0.\dot{2}1\dot{3}$ (ب) $0.0\dot{2}\dot{7}$ (حـ) $0.\dot{7}\dot{2}$

٧) أوجد مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة التي حدها النوني $\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$.

ثم أوجد مجموع الحدود إلى ما لانهاية .

٨) عددان وسطهما الحسابي ٥ ووسطهما الهندسي ٤ فما هما العددان ؟

ملخص :

أولاً : المتتابعات الحسابية :

(أ) $ح_ن$ متتابعة حسابية ⟺ $ح_{ن+١} - ح_ن$ = عدد ثابت لكل $ن \in ص^+$

(ب) الصورة العامة للمتتابعة الحسابية

$$(أ ، أ + ء ، أ + ٢ء ، .... ، ل - ٢ء ، ل - ء ، ل ، ......)$$

(حـ) الحد النوني $ح_ن = أ + (ن - ١) \times ء$

(ء) الوســـــط الحسابي بين كميتين أ ، حـ = $\frac{أ + حـ}{٢}$

ملاحظة : عدد الحدود ن = عدد الأوساط + ٢

(هـ) مجموع المتتابعة الحسابية بدلالة الحد الأخير ل : $حـ = \frac{ن}{٢} (أ + ل)$

مجموع المتتابعة الحسابية بدلالة الأساس ء

$$حـ = \frac{ن}{٢} (٢ أ + (ن - ١) \times ء)$$

ثانياً : المتتابعات الهندسية :

(أ) $ح_ن$ متتابعة هندسية ⟺ $\frac{ح_{ن+١}}{ح_ن}$ = عدد ثابت لكل $ن \in ص^+$

(ب) الصورة العامة للمتتابعة الهندسية

$$(أ ، أ ر ، أ ر^٢ ، .... ، \frac{ل}{ر^٢} ، \frac{ل}{ر} ، ل ، ....)$$

(حـ) الحد النوني $ح_ن = أ \times ر^{ن-١}$

(ء) الوسط الهندسي بين كميتين أ ، حـ = $\pm \sqrt{أ \times جـ}$

(هـ) مجموع المتتابعة الهندسية بدلالة الحد الأخير ل :

$$حـ = \frac{ل ر - أ}{ر - ١} ، ر > ١$$

مجموع المتتابعة الهندسية بدلالة عدد الحدود ن :

$$حـ = \frac{أ (ر^ن - ١)}{ر - ١} ، ر > ١ ،$$

(و) مجموع عدد لانهائي من متتابعة هندسية لانهائية تنازلية :

$$حـ_{\infty} = \frac{أ}{١ - ر} ، ١ > ر > -١$$

الوحدة الخامسة

مبدأ العــد

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- معرفة مفهوم مبدأ العد .
- معرفة مفهوم التباديل .
- معرفة مفهوم التوافيق .
- يميز بين التباديل والتوافيق .
- يتقن أستخدام التباديل والتوافيق .

دروس الوحدة :

- مبدأ العد .
- التباديل .
- التوافيق .

مبدأ العد

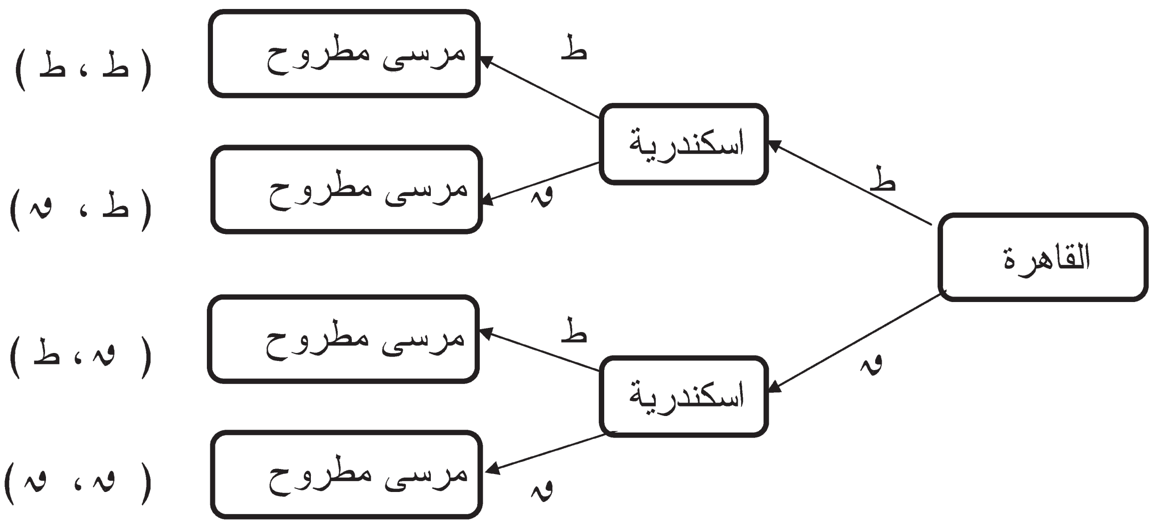
يستخدم مبدأ العــدعند حساب عدد الطرق التي يمكننا أن نختار بها مجموعة من الأشياء. وسيتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثـال[١] :

فكر إيهاب أن يسافر من القاهرة إلى الأسكندرية بالطائرة أو القطار ثم يســافر إلي مرسى مطروح بالطائرة أو بالقطار . كم طريقة يمكن أن يتخذها إيهاب للسفر من القاهرة إلى مرسي مطروح .

الحـل :

سنرمز للطائرة بالرمز ط ، للقطار بالرمز ق بأستخدام الشجرة البيانية نجد أن :



شكل (١ – ١)

عدد طرق الوصول إلى الأسكندرية = ٢ طريقة

عدد طرق الوصول إلى مرسي مطروح = ٢ طريقة

عدد طرق الوصول من القاهرة إلى مرسي مطروح = ٢ × ٢ = ٤ طريق

تسمى هذه الطريقة ((الشجرة البيانية))

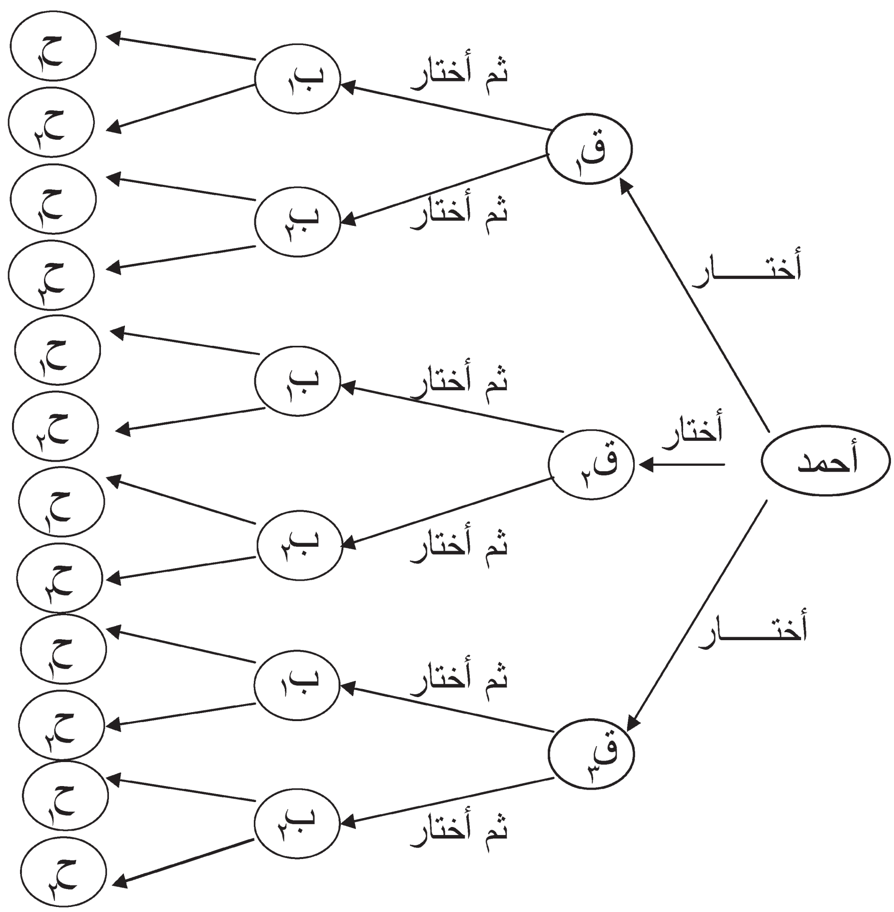
مثـال [٢] :

يمتلك أحمد ثلاث قمصان {$ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ ، $ق_{٣}$} للخروج وبنطلونين { $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ } وحذائين { $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$} بكــم طريقــة يمكن أن يرتدي زيــا مكونــا من بنطلون وقميص وحذاء ؟

الحـل :

فيكون الزي المختار

(ق$_1$ ، ب$_1$ ، ح$_1$)
(ق$_1$ ، ب$_1$ ، ح$_2$)
(ق$_1$ ، ب$_2$ ، ح$_1$)
(ق$_1$ ، ب$_2$ ، ح$_2$)
(ق$_2$ ، ب$_1$ ، ح$_1$)
(ق$_2$ ، ب$_1$ ، ح$_2$)
(ق$_2$ ، ب$_2$ ، ح$_1$)
(ق$_2$ ، ب$_2$ ، ح$_2$)
(ق$_3$ ، ب$_1$ ، ح$_1$)
(ق$_3$ ، ب$_1$ ، ح$_2$)
(ق$_3$ ، ب$_2$ ، ح$_1$)
(ق$_3$ ، ب$_2$ ، ح$_2$)



من الشجرة نلاحظ أن :

عدد طرق أختيار القميص = ٣ طرق

عدد طرق أختيار البنطلون = ٢ طريقة

عدد طرق أختيار الحذاء = ٢ طريقة

عدد طرق أختيار الزي = ٣ × ٢ × ٢ = ١٢ طريقة

مثـال [٣] :

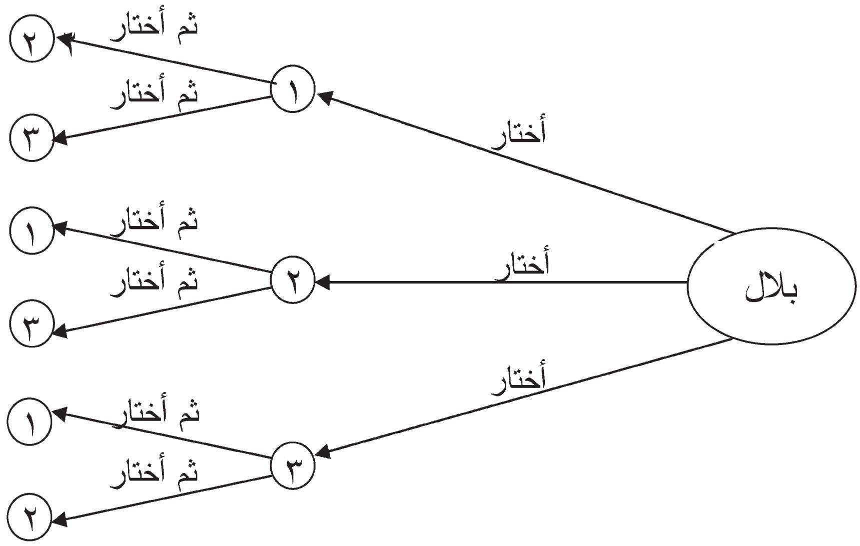
اراد بلال تكوين اعداد كل منها يتكون من رقمين من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ }

(١) بحيث لا يسمح بتكرار الرقم .

(٢) بحيث يسمح بتكرار الرقم .

الحـل :

(١) بإستخدام الشجره اليانيه نجد أن :



العدد المكون

٢١

٣١

١٢

٣٢

١٣

٢٣

عدد طرق اختيار الأول (الآحاد) =٣ طرق

عدد طرق اختيار الثانى (العشرات) =٢ طريقه

عدد طرق اختيار تكوين العدد المكون من رقمين بدون تكرار =٣×٢ =٦ طريقه

(٢) يلاحظ هنا ان عدد طرق اختيار الرقم الثانى هو نفس عـــــدد طرق اختيار الرقم الاول لذلك فإن عدد طرق تكـــوين العدد المكون مـــن رقمين مـــع السمـــاح بالتكرار =٣×٣=٩ طرق .

من الامثله السابقه نستنتج ((مبدأ العد))

مبدأ العد :

إذا أمكن إجراء اختيار معين بطرق مختلفه عددها $م_١$ وأمكن أيضا إجراء اختيار آخر بطرق مختلفه عددها $م_٢$ ، فإن :

عدد طرق اجراء الاختيارين معا = $م_١ \times م_٢$ طريقه

تمرين [١]

١- أراد باسم أن يختار كرتين من صندوق به ٨ كرات مختلفه ، كم طريقه يمكنه أن يختار الكرتين كره بعد الأخرى .

٢- كم عددا مكونا من أربعة أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام

٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩ بحيث أولا : يسمح بتكرار الرقم .

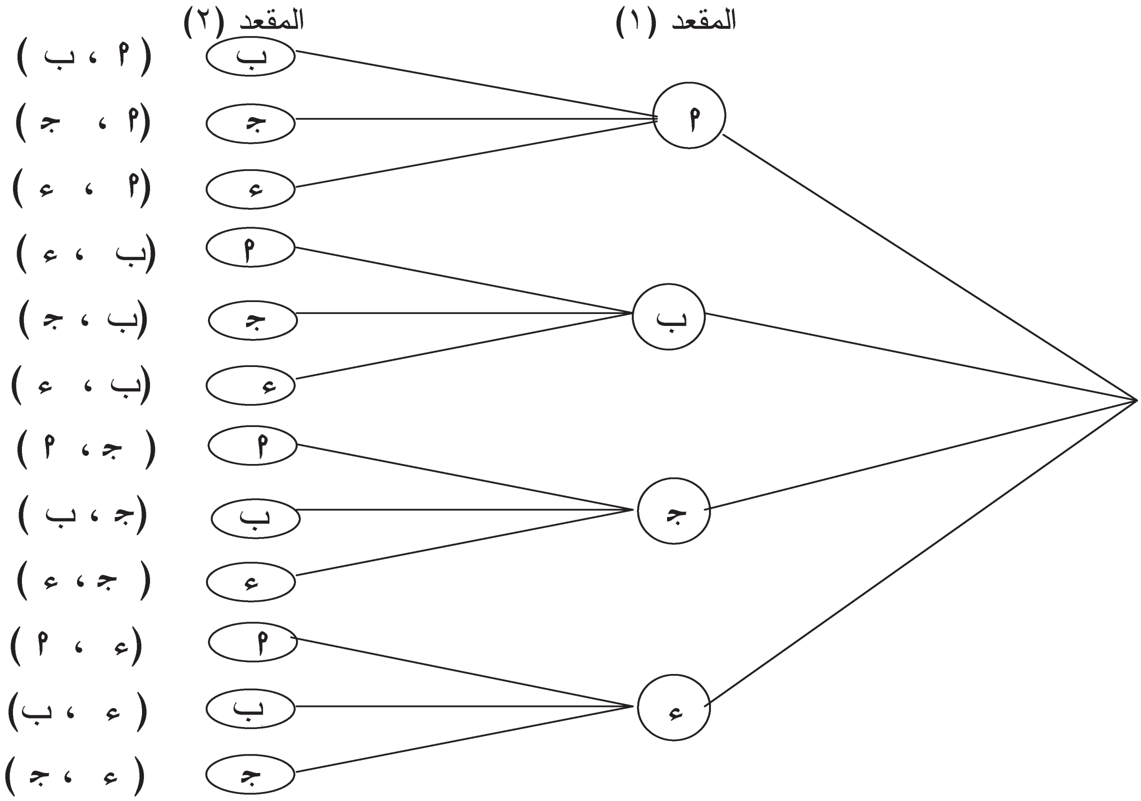
ثانيا : لا يسمح بتكرار الرقم .

٣- أرادت بسمه أن تسافر من الإسكندرية إلى المنصوره ماراً بمدينة بنها فإذا كان عدد طرق المواصلات من الاسكندريه إلى بنها أربعة ، وبين مدينة بنها والمنصورة ثلاث طرق – فبكم طريقة يمكن أن تسافر بسمــة بها من الإسكندريه إلى المنصورة ؟ وضح ذلك بشجرة بيانيه .

التباديل [الترائيب]

مثال [١] تمهيدي :

باستخدام الشجرة البيانية أوجد بكم طريقة يمكن أن يجلس طالبين من بين أربعة طلاب (م ، ب ، ج ، ء) في مقعدين متجاورين في صف واحد .



يسمى كل ترتيب من هذه التراتيب ((تبديلة)) ،

وبالتالي يكون عدد التبديلات =١٢ من المثال السابق نجد ان :

١- التبـــاديل يهتم فيها بالترتيب فالتبديلة (أ ، ب) تختلف عن التبديلة(ب ، أ)

٢- التبديلة الواحدة هنا تحتوي على طالبين تم اختيارهما من بين اربعة طــلاب،

وسنرمز لذلك بالرمز ل$_{٢}^{٤}$ (تقرأ أربعة لام اثنين) ، وهي تدل على عدد تباديــل أربعة طلاب المأخوذة اثنين اثنين . أي أن :

ل$_{٢}^{٤}$ = ١٢ =حاصل ضرب عددين صحيحين متتاليين اكبرهما٤ = ٤ × ٣ وبالمثل

ل$_{٤}^{٩}$ = حاصل ضرب أربعه أعداد صحيحه متتاليه اكبرها ٩ = ٩×٨×٧×٦

ل$_{٣}^{٢٠}$ = حاصل ضرب ثلاثه أعداد صحيحه متتاليه أكبرهما ٢٠= ٢٠×١٩×١٨

وبصفه عامه فان :

$^{ن}ل_{ر}$ = حاصل ضرب $ر$ من الأعداد صحيحه متتاليه أكبرها $ن$

$= ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\,.....\,(ن-ر+١)$ ، $١ \leqslant ر \leqslant ن$ ، $ن \in ص_{+}$

مثال [٢] :

اوجد قيمة : $^{٥}ل_{٢}$ ، $^{٧}ل_{٣}$ ، $^{ن}ل_{٢}$ ، $^{(ن-١)}ل_{٣}$ ، $^{(ن+١)}ل_{٥}$

الحل :

$^{٥}ل_{٢} = ٥\times٤ = ٢٠$ ،

$^{٧}ل_{٣} = ٧\times٦\times٥ = ٢١٠$ ،

$^{ن}ل_{٢} = ن\,(ن-١)$

$^{(ن-١)}ل_{٣} = (ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣)$ ،

$^{(ن+١)}ل_{٥} = (ن+١)\,(ن)\,(ن-١)\,(ن-٢)\,(ن-٣)$

مضروب العدد :

إذا كانت $ر = ن = ٣$ ، فإن

$^{ن}ل_{ر} = {}^{٣}ل_{٣} = ٣\times٢\times١$ ، ويسمى مضروب ثلاثة ويرمز له بالرمز $\underline{\lfloor ٣}$

$^{٥}ل_{٥} = \underline{\lfloor ٥} = ٥\times٤\times٣\times٢\times١$

$^{٨}ل_{٨} = \underline{\lfloor ٨} = ٨\times٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١$

$^{٩}ل_{٩} = \underline{\lfloor ٩} = ٩\times٨\times٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١ = ٩\,\underline{\lfloor ٨} = ٩\times٨\,\underline{\lfloor ٧}$

وعموما :

$^{ن}ل_{ن} = \underline{\lfloor ن} = ن\,(ن-١)\,(ن-٢)\,.........\times٣\times٢\times١$

$\underline{\lfloor ن} = ن\,\underline{\lfloor (ن-١)} = ن(ن-١)\,\underline{\lfloor ن-٢} = ...$

مثـال [٣] :

اختصر $\dfrac{\underline{\lfloor ١٠٠}}{\underline{\lfloor ٩٧}}$

الحـل :

$\dfrac{\underline{\lfloor ١٠٠}}{\underline{\lfloor ٩٧}} = \dfrac{١٠٠\times٩٩\times٩٨\times\underline{\lfloor ٩٧}}{\underline{\lfloor ٩٧}} = ١٠٠\times٩٩\times٩٨$

ملاحظة : ${}^{100}L_3 = \dfrac{\lfloor 100}{\lfloor 100 - 3}$

> **وعموماً :**
> ${}^{n}L_r = \dfrac{\lfloor n}{\lfloor n - r}$ $\quad 0 \leqslant r \leqslant n$

يلاحظ أن : ${}^{n}L_r = {}^{n}L_m$ إذا و فقط إذا كان $r = m$

مثـال [٤] :

أوجد قيمة n إذا كان ${}^{n}L_2 = 20$

الحـل :

نحلل العدد ٢٠ إلى عددين متتالين فيكون أكبرهما مساوياً n

${}^{n}L_2 = 20 = 5 \times 4 = {}^{5}L_2$ $\quad \therefore n = 5$

أو يمكن اتباع الخطوات الآتية :

$\because {}^{n}L_2 = n(n-1)$

$\therefore n(n-1) = 20$ $\quad \therefore n^2 - n - 20 =$ صفراً

$\therefore (n-5)(n+4) =$ صفراً $\quad \therefore n = 5$ أو $n = -4$ (مرفوض)

$\therefore n = 5$

مثـال [٥] :

أوجد قيمة r إذا كان ${}^{10}L_r = 720$

الحـل :

٧٢٠	١٠
٧٢	٩
٨	٨
١	

نحلل العدد ٧٢٠ إلى عوامل من الأعداد المتتالية أكبرها العدد ١٠ فيكون عدد العوامل مساوياً للعدد ر

${}^{10}L_r = 720 = 10 \times 9 \times 8 = {}^{10}L_3$

$\therefore r = 3$

مثـال [٦] :

أوجد قيمة ن إذا كان $\underline{|\text{ن}}$ = ١٢٠

١٢٠	١
١٢٠	٢
٦٠	٣
٢٠	٤
٥	٥
١	

الحـل :

نحلل العدد ١٢٠ إلى عوامل من الأعداد المتتالية أصغرهـا العدد واحد ، فيكون العدد ن مسـاوياً لأكبر هذه العوامل .

$\underline{|\text{ن}}$ = ١٢٠ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١   ∴ ن = ٥

مثـال [٧] :

أوجد عدد التباديل التي يمكن تكوينها من جميع حروف كلمة (بديع)

الحـل :

أحرف كلمة بديع عددها أربعة و هي: ب ، د ، ي ، ع

∴ عدد التباديل المكونة من جميع هذه الأحرف = ^{٤}ل$_{٤}$ = $\underline{|٤}$

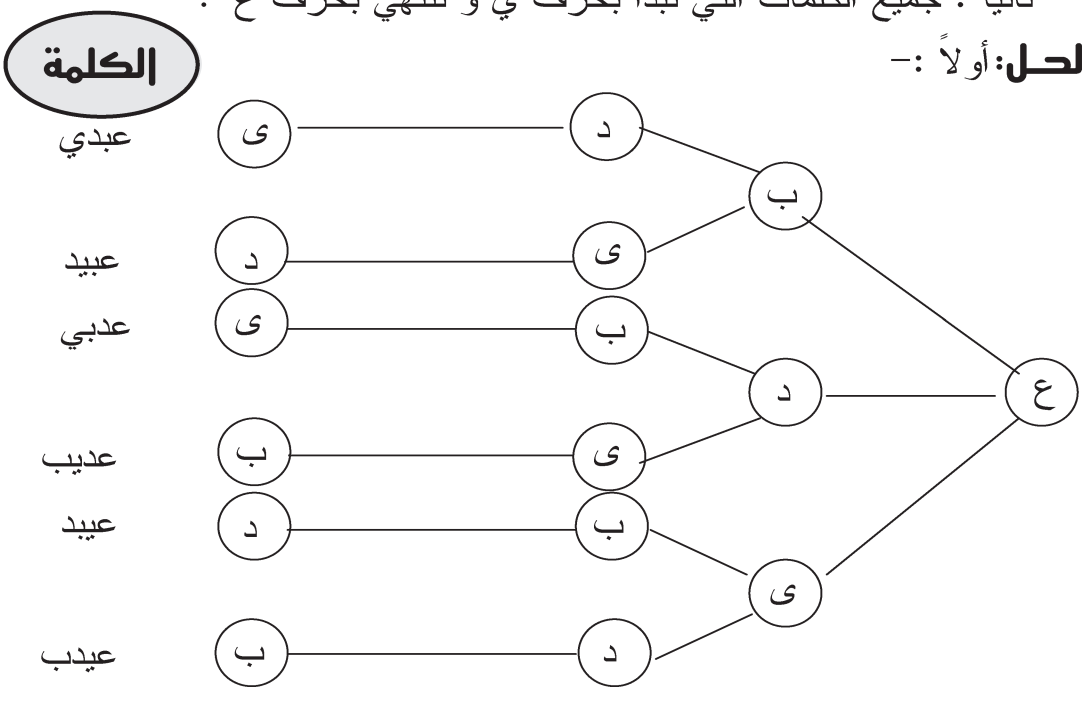
= ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤

مثـال [٨] : من المثال السابق أوجد بطريقة الشجرة البيانية :

أولاً : جميع الكلمات التي تبدأ بحرف ع .

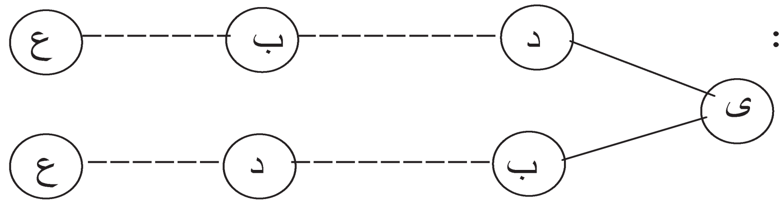
ثانياً : جميع الكلمات التي تبدأ بحرف ي و تنتهي بحرف ع .

الحـل: أولاً :-



الكلمة

ثانياً :



يدبع

يبدع

تـذكر أن :

١ – $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن – ١)(ن – ٢) .....(ن – ر +١) ،

١ ≤ ر ≤ ن ، ن ∈ $ص_{+}$

٢ – $^{ن}ل_{ن}$ = $\underline{|ن}$ = ن (ن – ١) (ن – ٢) ....× ٣ × ٢ × ١

٣ – $\underline{|ن}$ = ن $\underline{|ن - ١}$ = ن (ن – ١) $\underline{|ن - ٢}$ = ...

٤ – $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$ ٠ ≤ ر ≤ ن

٥ – $^{ن}ل_{٠}$ = ١ ، $\underline{|٠}$ = ١

تمرين[٢]

١– اختصر : $\dfrac{\underline{|٦}}{\underline{|٤}}$ ، $\dfrac{\underline{|١٣}}{\underline{|١٠}}$ ، $\dfrac{\underline{|٩}}{\underline{|١٠}}$

٢ – أوجد قيمة ر إذا كان $^{٧}ل_{ر}$ = ٢١٠

٣ – إذا كان $\underline{|ن}$ = ٦ فأوجد قيمة $^{٢ن}ل_{٢}$

٤ – فأوجد قيمة كل من س ، ص إذا كان

$^{(س + ص)}ل_{٢}$ = ٢١٠ ، $\underline{|س - ٢ ص}$ = ٦

٥ – نزل ٤ سياح بفندق به ١٠ حجرات خالية . بكم طريقة يمكن توزيع هؤلاء السياح على هذه الحجرات بشرط أن يشغل كل منهم حجرة واحدة على انفراد .

٦ – إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فأوجد كم عدد مكون من ٥ أرقام يمكن تكوينه من عناصر س بفرض عدم تكرار أي رقم .

٧ – أوجد عدد الكلمات التي تتكون من ثلاثة أحرف من حروف كلمة " العريش "

التوافيق

مثال [١] تمهيدي :

أوجد بكم طريقه يمكن أن نختار طالبين من أربعة طلاب للذهاب إلى معرض الكتاب .

الحل :

لنفرض أن الطلاب الأربعة هم ٩ ، ب ، جـ ، ء بذلك يمكن نختار { ٩ ، ب } أو {٩ ، جـ } أو {٩ ، ء } أو { ب ، جـ } أو { ب ، ء } أو { جـ ، ء } فنجد أن عدد الاختيارات ٦

يسمي كل اختيار من هذه الاختيارات " توفيقة " وبالتالي فإن عدد التوافيق = ٦

ملاحظات :

١- التوافيق لا يهتم فيها بالترتيب ، ولــذا اســتخدمنا أقــواس المجموعــات فالتوفيقتين .

{ ٩ ، ب } ،{ ب ، ٩ } متساويتين بينما فـي التباديـل تجــد أن الأقــواس المستخدمة .

هي الأقواس التي تدل على الترتيـب فالتبديلتين (٩ ، ب) ، (ب ، ٩) غيـر متساويتين .

٢- التوفيقة الواحدة في هذا المثال عبارة عن مجموعة تحتوي على طالبين تم أخيارهم من بين أربعة طلاب ، ويرمز لعدد عناصر مجموعة مثل هــذه التوافيق بالرمز ${}^{٤}\text{ق}_{٢}$ [وتقرأ أربعة قاف أثنين] ، وهي تدل علــى عــدد التوافيق المأخوذة من أربعة أثنين أثنين .أي أن :

$$٦ = \frac{٣ \times ٤}{١ \times ٢} = \frac{{}^{٤}\text{ل}_{٢}}{\underline{|٢}} = ٦ = {}^{٤}\text{ق}_{٢}$$

وبالمثل $$١٢٦ = \frac{٦ \times ٧ \times ٨ \times ٩}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = \frac{{}^{٩}\text{ل}_{٤}}{\underline{|٤}} = {}^{٩}\text{ق}_{٤}$$

$$٧ = \frac{٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦} = \frac{{}^{٧}\text{ل}_{٦}}{\underline{|٦}} = {}^{٧}\text{ق}_{٦}$$

وبصفة عامة $^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}}$ ، $0 \leq ر \leq ن$

مثال [٢] :

أوجد قيمة $^{12}ق_{3}$ ، $^{10}ق_{0}$.

الحل :

$$^{12}ق_{3} = \frac{^{12}ل_{3}}{|\underline{3}} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$$

$$^{10}ق_{0} = \frac{^{10}ل_{0}}{|\underline{0}} = \frac{1}{1} = 1$$

مثال[٣] :

إذا كان $^{ن}ل_{ر} = 30$ ، $^{ن}ق_{ر} = 15$ فأوجد قيمة كل من ن ، ر

الحل :

$$15 = {}^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{|\underline{ر}} = \frac{30}{|\underline{ر}}$$

∴ $|\underline{ر} = 2$ أي $ر = 2$

$^{ن}ل_{ر} = 30$ ومن ثم $^{ن}ل_{2} = 30$

∴ $ن(ن-1) = 30$ $ن^{2} - ن - 30 =$ صفرا

$(ن-6)(ن+5) =$ صفراً

∴ $ن = 6$ ، $ن = -5$ (مرفوض)

∴ $ن = 6$ ، $ر = 2$

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{|\underline{ن}}{|\underline{ر}\ |\underline{ن-ر}}$$

نتائج :

١ – $^{ن}ق_{.} = ١$ ، $^{ن}ق_{ن} = ١$ ، $^{ن}ق_{١} = ن$

٢ – $^{ن}ق_{ر} = {^{ن}ق_{ن-ر}}$

٣ – إذا كان $^{ن}ق_{س} = {^{ن}ق_{ص}}$ ، فإنه إما س = ص أو س + ص = ن

مثال [٤] :

إذا كان $^{ن}ق_{ن-٢} = ٣٦$ فأوجد قيمة ن

الحل :

$^{ن}ق_{ن-٢} = {^{ن}ق_{٢}}$ أي أن $^{ن}ق_{٢} = ٣٦$

$\because {^{ن}ق_{٢}} = \frac{^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$ $\therefore ٣٦ = \frac{^{ن}ل_{٢}}{\underline{|٢}}$ $\therefore {^{ن}ل_{٢}} = ٧٢$

ن (ن – ١) = ٧٢

$ن^{٢}$ – ن – ٧٢ = صفراً

(ن – ٩) (ن + ٨) = صفراً

ن = ٩ أو ن = – ٨ (مرفوض) $\therefore$ ن = ٩

أو مباشرة $^{ن}ل_{٢} = ٧٢ = ٩ \times ٨ = {^{٩}ل_{٢}}$ $\therefore$ ن = ٩

مثال [٥] :

إذا كان $^{٨}ق_{٤س-١} = {^{٨}ق_{س+٥}}$ ، فأوجد قيمة س

الحل :

$\because {^{٨}ق_{٤س-١}} = {^{٨}ق_{س+٥}}$

$\therefore$ إما ٤ س – ١ = س + ٥ ⇐ ٣ س = ٦ ⇐ س = ٢

أو (٤س – ١) + (س + ٥) = ٨ ⇐ ٥ س = ٤ ⇐ س = $\frac{٤}{٥}$ (مرفوض)

مثال [٦] :

بكم طريقة يمكن أختيار لجنة من مجموعة مكونة من خمسة أساتذة ، ١٠ طلاب في الحالات الآتية :

١) إذا كانت اللجنة تتكون من أستاذين وثمانية طلاب

٢) إذا كانت اللجنة تتكون من أستاذ وتسعة طلاب .

الحل :

١) عدد طرق أختيار الأساتذة = ${}^{٥}ق_{٢}$

عدد طرق أختيار الطلاب = ${}^{١٠}ق_{٨}$ = ${}^{١٠}ق_{٢}$

من مبدأ العد يكون :

عدد طرق أختيار اللجنة = ${}^{٥}ق_{٢} \times {}^{١٠}ق_{٢} = \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times \frac{١٠ \times ٩}{٢ \times ١}$

٢)عدد طرق أختيار الأساتذة = ${}^{٥}ق_{١}$

عدد طرق أختيار الطلاب = ${}^{١٠}ق_{٩}$ = ${}^{١٠}ق_{١}$ = ١٠

من مبدأ العد يكون :

عدد طرق أختيار اللجنة = ${}^{٥}ق_{١} \times {}^{١٠}ق_{٩}$ = ٥ × ١٠ = ٥٠ طريقة

تذكر أن

١) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{{}^{ن}ل_{ر}}{\underline{\lvert ر}}$ ، $٠ \leqslant ر \leqslant ن$

٢) ${}^{ن}ق_{ر} = \frac{\underline{\lvert ن}}{\underline{\lvert ر}\ \underline{\lvert ن - ر}}$ ، $٠ \leqslant ر \leqslant ن$

٣) ${}^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

٤) إذا كان ${}^{ن}ق_{ص} = {}^{ن}ق_{س}$ فإن س = ص أو س + ص = ن

٥) ${}^{ن}ق_{ن} = {}^{ن}ق_{٠} = ١$

تمرين[٣]

١) أوجد قيمة كل من:

$${}^{20}\text{ق}_{5} \quad ، \quad {}^{17}\text{ق}_{0} \quad ، \quad {}^{30}\text{ق}_{30} \quad ، \quad {}^{100}\text{ق}_{98}$$

٢) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{3} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{7}$ ، أوجد قيمة ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{10}$

٣) إذا كان ${}^{30}\text{ق}_{2\text{ر}-1} = {}^{30}\text{ق}_{\text{ر}+1}$ ، أوجد قيمة ر

٤) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} = 45$ ، ${}^{\text{س}}\text{ق}_{\text{ن}} = {}^{\text{س}}\text{ق}_{\text{ن}-5}$ فأوجد قيمة س

٥) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{2} = 28$ فأوجد قيمة ن

٦) إذا كان الفريق القومي لكرة القدم به ١٨ لاعبا ، منهم ٢ لحراسة المرمي ، ٩ للدفاع ، ٧ للهجوم ، فأوجد بكم طريقة يمكن اختيار فريق يتكون من ١١ لاعباً منهم حارس للمرمي ٧ للدفاع ، ٣ للهجوم .

٧) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية من مجموعة مكونة من ٦ رجال ، ٣ سيدات في الحالات الآتية :

١) إذا كان الأشخاص الثلاثة من أي جنس.

٢) إذا كان الأشخاص الثلاثة من نفس الجنس.

٣) إذا كانت اللجنة بها رجلين وسيدة .

٨) إذا كان ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{4} : {}^{\text{ن}-1}\text{ق}_{2} = 35 : 6$ فما قيمة ن

نماذج أختبارات للمراجعة

[الفصل الدراسي الأول]

النموذج الأول

السؤال الأول :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) إذا كان ٩، ب ، ج في تتابع حسابي فإن الوسط الحسابي ب = ...

{ (٩ − ج) ، (٩ + ج) $\frac{١}{٢}$ ، (٩٢ + ٢ج) ، (٩ + ج) }

(٢) نهاية الخطأ المطلق للعدد ١.٤٠٥ = ...

{ ± ٠.٠٠٠٠٥ ، ± ٠.٠٠٠٥ ، ± ٠.٠٠٥ ، ± ٠.٥ }

(٣) عيار السبيكة هو نسبة المعدن النفيس فيها إلى.....................

{ وزن المعدن الأخر ، الوزن الكلي للسبيكة }

(٤) ^{١٢}ق$_{٣}$ = ... { ٢٢٠ ، ١٣٢٠ ، ٣٦ }

السؤال الثاني :

(١) أوجد مجموع الستة حدود الأولي من المتتابعة الهندسية

(٤ ، −١٢ ، ٣٦ ، −١٠٨ ، ....)

(٢) إذا كان ^{ن}ل$_{ر}$ = ٢٤ ، ^{ن}ق$_{ر}$ = ٤ فما قيمة ن .

السؤال الثالث :

(١) أوجد الحل البياني لزوج المتباينات الأتية أنياً.

ص > ٢س + ٦ ، ص ⩽ −٣س − ١

(٢) في المتتابعة الحسابية (٤٤ ، ٣٩ ، ٣٤ ، ....، − ١٥١)

أوجد عدد حدود المتتابعة ثم أوجد قيمة ح$_{١٥}$ من النهاية .

السؤال الرابع :

(١) سبيكتان من الذهب عيار الأولى ٠.٩٥٠ وعيار الثانية ٠.٨٠٠ فما مقدار ما يلزم أخذه من كل سبيكة لتكوين سبيكة أخرى وزنها من الكيلوجرامات وعيارها ٠.٩٠٠ .

(٢) مكعب من الخشب طول ضلعه ٨.٥ سم مقرباً لآخر رقم فيه أحسب النهايتين اللتين ينحصر بينهما حجم المكعب مقرباً لرقمين عشريين .

النموذج الثاني

<u>السؤال الأول</u> :

أكمل مایاتي :–

(١) إذا كان $\underline{|ن}$ = ١٢٠ فإن ن = ...

(٢)الخطأ المطلق = ...– القيمة المضبوطة

(٣) الثالث المتناسب للعددين ١ ، ٥ هو = ...

(٤) من أسباب الخلط والمزج ....

<u>السؤال الثاني</u> :

(١) ينتج مصنع في اليوم ٩٠ مروحة علي الأكثر من نوعين مختلفين ويحقق ربحاً في كل مروحة من النوع الأول قدره ٥ جنيهات وربحاً في كل مروحة من النوع الثاني قدره ٧ جنيهات . فإذا كان مايباع من النوع الأول لا يقل عن ضعف ما يباع من النوع الثاني ، أوجد عدد المراوح التي يجب إنتاجها من كل نوع لكي يحقق المصنع أكبر ربح ممكن .

(٢) إذا كان $^{ن}ق_{٤}$: $^{ن-١}ق_{٢}$ = ٣٥ : ٦ فما قيمة ن .

<u>السؤال الثالث</u> :

(١) إذا كان ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، .... متتابعة هندسية أوجد قيمة الحد التاسع ومجموع ١٤ حد الأولى منها .

(٢) أوجد نهايتي الخطأ المطلق في حساب مساحة مثلث طول قاعدته ٣٧.٧٥ سم وأرتفاعه ١٢.٥ سم مع العلم بأن كلا من هذين العددين عرضة لخطأ لا يتجاوز ± ١ % من قيمته.

<u>السؤال الرابع</u> :

(١) ثلاثة أعداد تكون متتابعة حسابية بحيث يكون مجموعها ٢٤ ومجموع مربعي الثاني والثالث ١٨٥ . فما هي الأعداد الثلاثة .

(٢) خلط تاجر نوعين من الفحم ثمن الطن من النوع الأول ٦٠ جنيها و ثمن الطن من النوع الثاني ٨٠ حنيها وباع الخليط بسعر الطن ٩٤.٥ جنيهاً رابحاً ٤٠% فبأي نسبة خلط النوعين .

الأختبار الثالث

السؤال الأول:

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس:

(١)٧٥.٢٨٤٥ كيلو جرام لأقرب جرام هو ....

{ ٧٥.٢٨٥ ، ٧٦ ، ٧٥ ، ٧٥.٢٨ }

(٢) الخطأ المئوي = ...× ١٠٠ {الخطأ المطلق، الخطأ النسبي ،القيمة التقريبية}

(٣) الوسط الهندسي لعددين .... الوسط الحسابي لنفس العددين.

{ أكبر من ، أصغر من ، يساوي }

(٤) إذا كان ^١٠^ل~ر~ = ٧٢٠ فإن ر = ... { ٧٢ ، ١٠ ، ٣ }

السؤال الثاني:

(١) بأي نسبة يخلط تاجر نوعين من الفحم ثمن الطن من النوع الأول ٦٤ جنيهاً وثمن الطن من النوع الثاني ٨٠ جنيهاً ليكون ثمن طن الخليط ٧٠ جنيهاً.

(٢) إذا كان ٩ ، ٤ ، −١ ، −٦ ، .... متتابعة حسابية أوجد مجموع العشرة حدود الأولى منها.

السؤال الثالث:

(١) حل المتباينتين الأنيتين الآتيتين بيانياً :

س − ٣ ص ⩽ ٦ ، ٢ ص − س > ١

(٢) حل المعادلة |ن + ١ : |ن − ١ = ٩٠ ثم أوجد قيمة ^ن^ل~١~ + ^ن^ل~٢~ .

السؤال الرابع:

(١) عددان موجبان أحدهما أربعة أمثال الأخر ووسطهما الهندسي يساوي ٨ أوجد العددين.

(٢) قيس طول سلك من النحاس في درجة حرارة معينة فوجد أنه ٢٠.٢٥ متراً وقيس مرة أخري في درجة حرارة أعلي من الدرجة الأولي فوجد أن طول السلك أصبح ٢٠.٨٧ متراً فإذا كان كل من هذين العددين مقرباً لآخر رقم فأوجد نهايتي الخطأ المئوي في حساب التغير في طول هذا السلك.

الأختبار الرابع

<u>السؤال الأول</u> :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) الحد النوني لممتابعة حسابية حدها الأول أ وأساسها ء هو ....

{ أ + (ن − ١)×ء ، أ + (ن + ١)×ء ، أ − (ن − ١)×ء }

(٢) الخطأ المطلق عند تقريب العدد ٤٨.٣ إلى أقرب وحدة هو ....

{ ٣ ، −٠.٣ ، ٠.٣ }

(٣) إذا كان ^ن^ل~٢~ = ١١٠ فإن ن = ... { ٢٠ ، ٥ ، ١٠، ١١ }

(٤) إذا كان أ، ب ، ج في تتابع هندسي فإن الوسط الهندسي ب = ...

{ (± √أج) ، (− √أج) ، (√أج) }

<u>السؤال الثاني</u> :

(١) أوجد الحل البياني للمتباينتين الآنيتين الآتيتين :

ص ≥ ٢ س + ٣ ، ص < − ٢ س − ١

(٢) بأي نسبة يمزج تاجر نوعين من الشراب ثمن اللتر من النوع الأول ١٨٠ قرشاً وثمن اللتر من النوع الثاني ٢٥٠ قرشاً ليكون ثمن اللتر من المزيج ٢٢٥ قرشاً .

<u>السؤال الثالث</u> :

(١) أوجد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة التي حدها النوني

ح~ن~ = (١/٣)^ن − ١^

(٢) قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ٥٠ متراً وعرضها ٣٢.٦ متراً وكل من الطول والعرض مقرباً لآخر رقم فيه − أحسب نهايتي الخطأ المطلق في حساب مساحة تلك الأرض .

<u>السؤال الرابع</u> :

(١) إذا كان ^ن + م^ل~٢~ = ٩٠ ، ^ن − م^ل~٢~ = ٣٠ ، فأوجد ^ن + م^ق~م − ن~

(٢) إذا كانت (٩٣ ، ٣س ، ....، س ، ٢٧) متتابعة حسابية فأوجد قيمة س وقيمة ح~١٢~ من النهاية.

الأختبار الخامس

السؤال الأول :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١) الخطأ المئوي عند تقريب العدد ٣.٥٦٧٨ لأقرب جزء من ألف هو ....

{٠.٨٤ ، ٠.٠٠٨٤ ، ٠.٠٠٠٠٨٤}

(٢) الوسط الحسابي للعددين س ، ص هو ......

{ $\frac{١}{٢}$(س + ص) ، (س + ص) ، ٢(س + ص)}

(٣) مجموع المتتابعة الهندسية التناقصية التي حدها الأول أ وأساسها ر هو .....

{ $\frac{١}{أ + ر}$ ، $\frac{أ}{١ - ر}$ ، $\frac{١}{أ - ر}$ }

(٤) إذا كان ${}^{ن}ق_{ن-٢}$ = ٣٦ فإن ن = ...

{ ٩ ، −٨ ، ٧٢ ، ١٨ }

السؤال الثاني :

(١) مجموع ثلاثة أعداد في تتابع حسابي −٣ وحاصل ضربهم ٨ أوجد الأعداد .

(٢) إذا كان ${}^{٧}ل_{ر} = ٤ \times {}^{٧}ل_{ر-١}$ فأوجد قيمة ر ثم أثبت أن :

$$\frac{\lfloor ر + ٢}{\lfloor ر + ٣} + \frac{\lfloor ر - ١}{\lfloor ر} = \frac{١١}{٢٨}$$

السؤال الثالث :

(١) حل المتباينة الآتية مع تمثيلها بيانياً على خط الأعداد :

٣ (٨ − ٢ س) + ٥ (س − ٢) > ٢ س − ١

(٢) سبيكة كتلتها ٥.٥ من الكيلوجرامات تحتوى على ثلاثة معادن رصاص وزنك وألمونيوم بنسبة ٢ : ٣ : ٦ على الترتيب أوجد وزن كل معدن في السبيكة.

السؤال الرابع :

(١) أدخل ثمان أوساط حسابية بين ٥ ، ٢٣

(٢) ملف مقاومته ١٥ أوم قاس طالب مقاومة هذا الملف في المعمل فوجد أنها ١٥.٤٥ أوم أحسب الخطأ المئوي في قياس الطالب للمقاومة.

الفصل الدراسي الثاني

المحتويات

- الأسس والجذور .
- اللوغاريتمات .
- حساب المثلثات .
- الهندسة المستوية .
- المساحات.

الوحدة الأولى

أهداف الوحدة

الأسس والجذور

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتذكر القوانين الأساسية للأسس .
- يكون قادراً على أجراء العمليات الحسابية .
- يعرف مفهوم الدالة الأسية .
- يتذكر مفهوم الأسس والجذور .
- يتدرب على حل أنواع مختلفة من تمارين الأسس والجذور .
- يفرق بين مفهوم الأس والجذر .

دروس الوحدة :

- القوانين الأساسية للأسس .
- الدالة الأسية .
- الجـــــــــذور .
- العمليات الحسابية على الجذور الصماء .

الأسس والجذور

سبق دراسة موضوع الأسس في المرحلة الأعدادية ، وسنقوم بمراجعة سريعة للقوانين السابق دراستها حيث أنها ستكون أساساً لدراسة بعض الأبواب التالية .

تعريف :-

الأس يعبر عن عدد مرات ضرب الأساس في نفسه .

فإذا كان (أ) عدداً حقيقيا ، ن عددا صحيحاً موجباً ، فإن

$أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times أ \times .... \times أ$ (حيث أ تكرر ن من المرات)

ويقرأ : أ أس ن أو القوة النونية للعدد أ

فمثلاً : $٢^{٥} = ٢\times٢\times٢\times٢\times٢$ وتقرأ ٢ أس ٥ أو القوة الخامسة للعدد ٢

ويلاحظ أن :

١) القوة الصفرية لأي مقدار تساوي ١

فمثلاً ، $٥^{٠} = ١$ ، $(\frac{٢}{٣})^{٠} = ١$ ، $(-٩)^{٠} = ١$

حيث الأساس في جميع الأمثلة المعطاة لا يساوي الصفر

٢) القوة النونية للواحد الصحيح تساوي ١

فمثلاً ، $١^{ن} = ١$ ، $(١)^{١٠} = ١$ ، $(١)^{٢٠} = ١$

٣) تتغير اشارة الأس إذا تغير موضع المقدار من البسط أو المقام .

فمثلاً $٧^{-٢} = \frac{١}{٧^{٢}} = \frac{١}{٤٩}$

$\frac{١}{٢^{-٤}} = ٢^{٤} = ١٦$

$\frac{٣^{-٢}}{٥^{-٣}} = \frac{٥^{٣}}{٣^{٢}} = \frac{١٢٥}{٩}$

$(\sqrt{٣})^{-٤} = \frac{١}{(\sqrt{٣})^{٤}} = \frac{١}{٩}$

$(\frac{أ}{ب})^{-ن} = (\frac{ب}{أ})^{ن}$

القوانين الأساسية للأسس

القانون الأول :

في حالة الضرب تجمع أسس الرموز (الأساسات) المتشابهة أي $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$

فمثلاً $٣^{٢} \times ٣^{٤} \times ٣^{-٥} \times ٣ = ٣^{٢+٤-٥+١} = ٣^{٢} = ٩$

القانون الثاني :

في حالة القسمة تطرح أسس الرموز المتشابهة ، أي $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$

فمثلاً $\frac{٣^{-٤}}{٣^{-٧}} = ٣^{-٤+٧} = ٣^{٣} = ٢٧$

القانون الثالث :

إذا رفعت مجموعة من العوامل إلى قوة معينة فعند فك الأقواس نضرب هذه القوة في كل من قوى هذه العوامل ، أي $(أ^{م} ب^{هـ})^{ن} = أ^{م ن} ب^{ن هـ}$

فمثلاً $(٣^{-٢})^{-٣} = ٣^{٦} = ٧٢٩$ ، $\left(\frac{أ^{٢} ب^{\frac{١}{٤}}}{جـ^{\frac{١}{٢}}}\right)^{٤} = \frac{أ^{٨} ب}{جـ^{٢}}$

ملاحظات :

١) يجب التفرقة بين $(أ^{٢})^{٣}$ التي تساوي $أ^{٦}$ وبين $أ^{٢} \times أ^{٣} = أ^{٥}$

٢) يجب مراعاة أن $(أ + ب)^{٣} \neq (أ^{٣} + ب^{٣})$ ولكن $(أب)^{٣} = أ^{٣} ب^{٣}$

مثال [١] :

أوجد قيمة كل من المقادير الآتية :-

(أ) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}}$ (ب) $(٣^{-\frac{١}{٢}})^{٨}$ (جـ) $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} \times (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$

(د) $\frac{(١٦)^{\frac{٣}{٤}}}{(٨)^{\frac{٢}{٣}}}$ (هـ) $\frac{(٧٢)^{٣} \times (٨)^{-٤}}{(٩)^{٤} \times (١٢)^{-٢}}$

الحل:

(أ) $(٣٢)^{\frac{١}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}} = ٢$

(ب) $(٣^{-\frac{١}{٢}})^{٨} = ٣^{-٤} = \frac{١}{٣^{٤}} = \frac{١}{٨١}$

(جـ) $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} \times (٦٤)^{\frac{٥}{٦}} = (٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}} \times (٢^{٦})^{\frac{٥}{٦}}$

$= ٣^{٢} \times ٢^{٥} = ٩ \times ٣٢ = ٢٨٨$

(د) $\dfrac{(١٦)^{\frac{٣}{٢}}}{(٨)^{\frac{٢}{٣}}} = \dfrac{(٢^{٤})^{\frac{٣}{٢}}}{(٢^{٣})^{\frac{٢}{٣}}} = \dfrac{٢^{٦}}{٢^{٢}} = ٢^{٦-٢} = ٢^{٤} = ١٦$

(هـ) $\dfrac{(٧٢)^{٣} \times (٨)^{-٤}}{(٩)^{٤} \times (١٢)^{-٢}} = \dfrac{(٢^{٣}\times ٣^{٢})^{٣} \times (٢^{٣})^{-٤}}{(٣^{٢})^{٤} \times (٣\times ٢^{٢})^{-٢}} = \dfrac{(٢)^{٩} \times (٣)^{٦} \times ٢^{-١٢}}{(٣)^{٨} \times (٣)^{-٢} \times ٢^{-٤}}$

$= ٢^{٩-١٢+٤} \times ٣^{٦-٨+٢} = ٢\times ٣^{٠} = ٢ \times ١ = ٢$

مثال [٢] :

اثبت أن $\dfrac{٥^{-٢} \times (٢^{\frac{١}{٢}})^{٢} \times (٢ \times ٥^{\frac{١}{٢}})^{٢}}{٦^{٣} \times ٣^{-٣} \times ٥^{-٢} \times ٣^{٢}} = \dfrac{٥}{٩}$

الحل:

الطرف الأيمن $= \dfrac{٥^{-٢} \times (٢^{\frac{١}{٢}})^{٢} \times (٢ \times ٥^{\frac{١}{٢}})^{٢}}{(٢\times ٣)^{٣} \times ٣^{-٣} \times ٥^{-٢} \times ٣^{٢}} = ٥^{-٢+١+٢} \times ٢^{١+٢-٣} \times ٣^{-٣+٣-٢}$

$= ٥ \times ٢^{٠} \times ٣^{-٢}$

$= \dfrac{٥}{٣^{٢}} = \dfrac{٥}{٩} =$ الطرف الأيسر

تدريب شفهي

(أ) $أ^{٥} \times أ^{٣} \times أ^{٤} =$ ....

(ب) $(٨١)^{\frac{٣}{٥}} =$ ....

(جـ) $س^{\frac{١}{٢}} \times س^{\frac{١}{٤}} \times س^{-\frac{٣}{٤}} =$ ....

(د) $(٦٤)^{\frac{١}{٣}} =$ ....

(هـ) $(١٢٥)^{\frac{٢}{٣}} \times (٨)^{\frac{١}{٣}} =$ ....

(و) $(٣^{-٥})^{-٢} \times (٣^{٤})^{-٢} =$ ....

(ز) $\dfrac{(س+٥)^{٢} \times (س+٥)^{-٤}}{(س+٥)^{-٣}} =$ .... ، $س \neq -٥$

تذكر أن

أولاً : قوانين الأسس :

١- $ا^م \times ا^ن = ا^{م+ن}$

٢- $ا^م \div ا^ن = ا^{م-ن}$

٣- $(ا^م)^ن = ا^{م ن}$

٤- $(ا^م ب^ن)^هـ = ا^{م هـ} ب^{ن هـ}$

٥- $\left(\frac{ا^م}{ب^ن}\right)^هـ = \frac{ا^{م هـ}}{ب^{ن هـ}}$

ولكن $(ا^م + ب^ن)^هـ \neq ا^{م هـ} + ب^{ن هـ}$

ثانياً : الأستنتاجات:

١) $ا^{صفر} = ١$ ٢) $١^ن = ١$

٣) $ا^م = \frac{١}{ا^{-م}}$ ٤) $ا^{-م} = \frac{١}{ا^م}$

٥) $\left(\frac{ا}{ب}\right)^{-م} = \left(\frac{ب}{ا}\right)^م$

قاعدة هامة :

(١) إذا كان $ا^م = ا^ن \Leftrightarrow م = ن$ ، $ا \in ح - \{ ١ ، -١ ، ٠ \}$

مثلاً : $٢^س = ٨ \Leftarrow ٢^س = ٢^٣ \Leftarrow س = ٣$

(٢) إذا كان $ا^م = ب^م \Leftrightarrow ا = ب$ لكل $م \in ص_+$ وإذا كانت $ا \neq ب \neq ٠$ فإن $م = ٠$

مثلاً : $٥^{س-٣} = ٧^{س-٣} \Leftarrow س - ٣ = صفر \Leftarrow س = ٣$

(٣) $ا^م = ب^م \Leftrightarrow ا = ب$ لكل $م \in ص^+$ ، م عدد فردي

$ا = \pm ب$ لكل $م \in ص^+$ ، م عدد زوجي

تدريب :

أوجد قيمة س إذا كانت :

(١) $٥^{س-٢} = ١٢٥$ (٢) $(٢٥)^{س٢ - ١} = (١٢٥)^{-س}$

(٣) $س^{٢س-٥} = ٣^{٤س-١٠}$ (٤) $س^{\frac{١}{٣}} = ٢$

الدالة الأسية

الدالة الأسية هي الدالة التي تكون على الصورة :

ص = $ء^{س}$ أو د (س) = $ء^{س}$ أو د : س ⟵ $ء^{س}$ حيث ء ∈ $ح^{+}$ ، ء ≠ ١

- ملاحظة :

إذا كان ء = ١ فإن د (س) تكون دالة ثابتة .

مثال [١] :

إذا كان د (س) = $٣^{س}$ فأوجد قيمة :

د (−٣) ، د (٠) ، د $(\frac{١}{٢})$ ، د (٢) ، د(ء) ، د (س+ ١)

الحل :

د (−٣) = $٣^{-٣}$ = $\frac{١}{٢٧}$

د (٠) = $٣^{صفر}$ = ١

د $(\frac{١}{٢})$ = $٣^{(\frac{١}{٢})}$ = $\sqrt{٣}$

د (٢) = $٣^{٢}$ = ٩

د(ء) = $٣^{ء}$

د (س+ ١) = $٣^{(س+١)}$ = $٣^{س}$ × ٣

مثال [٢] :

إذا كان د (س) = $٣^{س}$ أوجد مجموعة حل المعادلة :

د (س + ١) + د (س − ١) = ٩٠

الحل :

$٣^{(س+١)}$ + $٣^{(س-١)}$ = ٩٠

$٣^{(س-١)}$ ($٣^{٢}$ + ١) = ٩٠

$٣^{(س-١)}$ × ١٠ = ٩٠

$٣^{(س-١)}$ = ٩

$٣^{(س-١)}$ = $٣^{٢}$

س− ١ = ٢ ∴ س = ٣

مجموعة الحل = { ٣ }

تمرين[١]

١- أوجد قيمة كل من :

(أ) $\frac{(١٠)^{\text{س}}}{(٢٥)^{\frac{١}{٢}\text{س}} \times (٣٢)^{\frac{١}{٥}(\text{س}-١)}}$

(ب) $\frac{(١٢١)^{\frac{٣}{٢}\text{س}} \times (٢٢)^{-٣\text{س}}}{(١٦)^{-\frac{٣}{٤}(\text{س}+٢)}}$

٢- أختصر إلى أبسط صورة :

(أ) $\frac{٣^{٥} \times ٩^{-٢} \times (٨١)^{-\frac{٣}{٤}}}{(٢٧)^{-١}}$

(ب) $\frac{٧^{٢\text{س}+١} \times ١٥^{٢\text{س}}}{٢١^{٢\text{س}} \times ٥^{٢\text{س}+١}}$

(حـ) $\frac{٢٢^{٢\text{س}} \times ٣^{٢\text{س}+١}}{١١^{٢\text{س}+١} \times ٦^{٢\text{س}}}$

(د) $\frac{٢٥^{\text{س}+٣} \times ١٠^{\text{س}} \times ٨^{\text{س}+٢}}{٥^{٣\text{س}+٥} \times ١٦^{\text{س}+٢}}$

٣- أثبت أن :

(أ) $\frac{(١٥)^{\text{س}}}{(١٢٥)^{\frac{١}{٣}\text{س}} \times (٩)^{\frac{١}{٢}\text{س}}} = ١$

(ب) $\frac{(٤٠)^{-١} \times (٣٢)^{٢} \times ٢٥}{٥ \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{-٢}} = ٨$

(حـ) $\frac{(١٠)^{٣\text{س}+٢}}{(١٢٥)^{\text{س}+\frac{٢}{٣}} \times (٨)^{\text{س}+١}} = \frac{١}{٢}$

(د) $\frac{(١٠٠)^{٣\text{س}-١} \times (٢٥)^{\text{س}+١}}{(١٦)^{\text{س}-١} \times (١٢٥)^{٢\text{س}}} = ٤$

٤- إذا كانت د (س) = ٣ $^{\text{س}}$ أوجد قيمة :

د(٠) ، د(١) ، د(-٢)

وإذا كان د (٢س) - ٨ د (س) = ٩ أوجد قيمة س

٥- إذا كان د (س) = ٢ $^{\text{س}}$ حل المعادلة :

د (س+ ٢) + د (س - ٢) = ١٣٦

٦- إذا كانت د (س) = ٣ $^{\text{س}}$ فحل المعادلة :

د (س - ٢) + د (س - ١) + د (س) = ١١٧

الجــذور

إذا كانت $س^{ن} = ب$ فإن س تسمي الجذر النوني للعـــدد ب ، وتكتــب $\sqrt[ن]{ب} = س$ ويسمي ب العدد المجذور ويسمي ن دليل الجذر ويجب أن يكون ن عدداً صحيحاً موجباً أكبر من واحد

أمثـــــلة:

☜ $٨١ = ٣^{٤}$ ومن ثم فإن $\sqrt[٤]{٨١} = ٣$

☜ $-٢٧ = (-٣)^{٣}$ ومن ثم فإن $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

☜ $-٣٢ = (-٢)^{٥}$ ومن ثم فإن $\sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$

نتيجة:

إذا رفع جذر إلي قوة مساوية لدليل الجذر كان الناتج مساويًا للمقدار المجذور .

أمثـلة :

$$(\sqrt[ن]{أ})^{ن} = أ \quad ، \quad (\sqrt{٣})^{٢} = ٣ \quad ، \quad (\sqrt[٣]{٩})^{٣} = ٩$$

خاصية:

أي أساس مرفوع إلي أس كسري يمكن وضعه في صورة جذرية ،حيــث يكــون مقام الكسر هو دليل الجذر والبسط هو قوة هذا الأساس.

$$أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}} \quad ، \quad ٧^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{٧^{٢}} = \sqrt[٣]{٤٩}$$

يلاحظ ان دليل الجذر دائماً موجب :

$$٢^{٢\frac{١}{٢}} = ٢^{\frac{٥}{٢}} = \sqrt{٢^{٥}} = \sqrt{٣٢}$$

$$٥ = \sqrt{٥^{٢}} = \sqrt[٣]{٥^{٣}} = \sqrt[٤]{٥^{٤}} = \sqrt{٢٥} = \sqrt[٣]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٦٢٥}$$

$$٣\sqrt{٥} = \sqrt{٣^{٢} \times ٥} = \sqrt{٤٥}$$

$$٢\sqrt[٣]{٧} = \sqrt[٣]{٢^{٣} \times ٧} = \sqrt[٣]{٥٦}$$

أي أنه يمكن وضع أي مقدار تحت علامة الجذر لأي دليل وذلك برفعه إلى قوة (أس) مساوياً لدليل الجذر .

والعكس أي مقدار مجذور يمكن وضعه في صورة أسية بجعله أساس مرفوع إلى أس كسري بسطه هو قوة المقدار المجذور ومقامه هو دليل الجذر .

أمثلة :

$$\sqrt[ن]{أ^{م}} = أ^{\frac{م}{ن}}$$

$$\sqrt[٤]{٣^{٨}} = ٣^{\frac{٨}{٤}} = ٣^{٢} = ٩$$

$$\left(\sqrt[٣]{٣^{٢}}\right)^{٦} = \left(٣^{\frac{٢}{٣}}\right)^{٦} = ٣^{٤} = ٨١$$

$$\sqrt[٤]{١٦٢} = \sqrt[٤]{٣^{٤} \times ٢} = ٣^{\frac{٤}{٤}} \times \sqrt[٤]{٢} = ٣\sqrt[٤]{٢}$$

$$\sqrt[٣]{١٩٢} = \sqrt[٣]{٢^{٦} \times ٣} = ٢^{\frac{٦}{٣}} \times \sqrt[٣]{٣} = ٤\sqrt[٣]{٣}$$

نتيجة :

عند تحليل المقدار المجذور إلى عوامله الأولية وكان أحد هذه العوامل مرفوع إلى قوة مساوية لدليل الجذر أو مكرراته فإنه يمكن إخرجه من تحت علامـــة الجـــذر بأس صحيح ناتج من قسمة الأس على دليل الجذر وتسمي هذه العمليـــة بتبســـيط الجذور كما هو موضح بالأمثلة السابقة .

الجذور الصم :

الجذر الأصم هو الذي لا يمكن ايجاد قيمته بالضبط أما المقدار الجذري فهو الذي يمكن ايجاد قيمته بالضبط.

أمثلة للجذور الصم :

$$\sqrt{٧} \ ، \ \sqrt[٣]{٥} \ ، \ \sqrt[٣]{٩} \ ، \ \sqrt[٤]{١١}$$

أمثلة للمقادير الجبرية :

$$\sqrt{٢٥} \ ، \ \sqrt[٣]{-٨} \ ، \ \sqrt[٥]{-٢٤٣}$$

$$\sqrt{٠.٠٠٠٩} = \frac{\sqrt{٩}}{\sqrt{١٠٠٠٠}} = \frac{٣}{١٠٠} = ٠.٠٠٣$$

الكمية التخيلية :

إذا كان دليل الجذر عدد زوجي والمقدار المجذور سالباً سمي هذا المقـدار كميـة تخيلية . **أمثلة:** $\sqrt{-٩}$ ، $\sqrt[٤]{-١٦}$ ، حيث لا يوجد عدد حقيقي إذا ضرب في نفسة كان الناتج -٩ أو إذا ضرب في نفسه ٤ مرات كان الناتج - ١٦

(حيث - × - = +)

الجذور المتشابهه :

هي التي تتحد بعد تبسيطها في المقادير المجذورة وكذا تتحد في الأدلة .

أمثـلة :

(أ) $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{١٠}$ **جذور غير متشابهة**

(ب) $٣\sqrt{٣}$ ، $-٥\sqrt{٣}$ ، $\frac{١}{٤}\sqrt{٣}$ جذور متشابهه

(جـ) $\sqrt[٣]{١٠}$ ، $\sqrt[٥]{١٠}$ ، $\sqrt{١٠}$ جذورغير متشـــابهه

(د) $\sqrt{٢٨}$ ، $\sqrt{٦٣}$ ، $\sqrt{١٧٥}$ نجري تبسيط هذه الكسور فتصبح

$٢\sqrt{٧}$ ، $٣\sqrt{٧}$ ، $٥\sqrt{٧}$ ∴ فهي جذور متشابهة

تدريب شفهي

١- أوجد قيمة :

$(\sqrt{١٥})^{٢}$ ، $(\sqrt[٤]{٩})^{٤}$ ، $(\sqrt[٥]{٢٥})^{٥}$

٢- عبر عن كل من الجذور الأتية على صورة أس كسري :

$\sqrt[٤]{٥}$ ، $\sqrt[٧]{٣^{-٢}}$ ، $\sqrt[٥]{١١^{٤}}$ ، $\sqrt[٣]{(-٥)^{٩}}$

٣- عبرعن كل من المقادير الأتية على هيئة جذور :

$١١^{\frac{٢}{٥}}$ ، $١٣^{-\frac{٣}{٤}}$ ، $٧^{\frac{١}{٣}}$

٤-ضع علامة(✓) أمام التعبير الصحيح وعلامة(✗) أمام التعبير الخطأ فيما يلي :

$\sqrt[٣]{٢٧}$ كمية جذرية (   )

$\sqrt{-٤}$ كمية تخيلية (   )

$\sqrt{٨}$ كمية جذرية (   )

$\sqrt{٢٥}$ جذر أصم (   )

$\sqrt[٥]{٤}$ كمية تخيلية (   )

العمليات الحسابية على الجذور الصماء

أولاً: جمع وطرح الجذور :

الخطوات :

١- نضع كل جذر في أبسط صورة .

٢-نتبع طريقة جمع وطرح الحدود الجبرية على الجذور المتشابهة .

أمثلة :

(أ) $8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 13\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

(ب) $7\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$

(جـ) $\sqrt{75} - \frac{1}{2}\sqrt{48} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12}$

$= \sqrt{5^2\times 3} - \frac{1}{2}\sqrt{4^2\times 3} + 2\sqrt{3^2\times 3} - \sqrt{2^2\times 3}$

$= 5\sqrt{3} - \frac{1}{2}\times 4\sqrt{3} + 2\times 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

(ء) $\sqrt[3]{40} - 2\sqrt[3]{135} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{320}$

$= \sqrt[3]{2^3\times 5} - 2\sqrt[3]{3^3\times 5} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4^3\times 5}$

$= 2\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$

ثانياً: ضرب وقسمة الجذور :

إذا إتحدت أدلة الجذور فإن عمليتي الضرب والقسمة تجري علــى المقــادير المجذورة ومعاملات هذه الجذور .

أمثلة :

$\sqrt[n]{\text{أ}} \times \sqrt[n]{\text{ب}} = \sqrt[n]{\text{أ}\times\text{ب}}$ ، $\frac{\sqrt[n]{\text{أ}}}{\sqrt[n]{\text{ب}}} = \sqrt[n]{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$

(١) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{20}$

(٢) $2\sqrt[5]{7} \times 3\sqrt[5]{4} = 6\sqrt[5]{28}$

(٣) $8\sqrt[4]{10} \div 4\sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{\frac{10}{5}} = 2\sqrt[4]{2}$

(٤) $\frac{3\sqrt{12} \times 2\sqrt{45} \times \sqrt{50}}{45\sqrt{60}} = \frac{3\sqrt{2^2\times 3} \times 2\sqrt{3^2\times 5} \times \sqrt{5^2\times 2}}{45\sqrt{2^2\times 5\times 3}}$

$= \frac{3\times 2\sqrt{3} \times 2\times 3\sqrt{5} \times 5\sqrt{2}}{45\times 2\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3} \times 6\sqrt{5} \times 5\sqrt{2}}{90\sqrt{5} \times \sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$

تذكر أن

١- $أ^{\frac{م}{ن}} = \sqrt[ن]{أ^{م}}$ وبالعكس

٢- $(\sqrt[ن]{أ})^{ن} = أ$

٣- $أ = \sqrt{أ^{٢}} = \sqrt[٣]{أ^{٣}} = \sqrt[٤]{أ^{٤}}$ وبالعكس

٤- $\sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب} = \sqrt[ن]{أ \times ب}$ وبالعكس

٥- $\frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}} = \sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}}$ ، ب $\neq$ ٠ وبالعكس

تمرين[٢]

١-أجمع جمعاً جبريًا الجذور الآتية :

(أ) $٤\sqrt{٦} - ٦\sqrt{٦} + ٥\sqrt{٦}$

(ب) $٣\sqrt[٤]{٥} - ٦\sqrt[٤]{٥} - ٢\sqrt[٤]{٥} + ٣\sqrt[٤]{٥}$

(حـ) $٢\sqrt[٣]{٥٤} + ٤\sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{٢٥٠}$

(ء) $٧\sqrt[٣]{٤٨} - \sqrt[٣]{-١٦٢} + ٣\sqrt[٣]{-٦}$

(هـ) $٢\sqrt[٣]{٥٤} + ٣\sqrt[٣]{-١٢٨} + ٦\sqrt[٣]{١٦}$

(و) $\frac{١}{٣}\sqrt[٥]{٣} - \frac{١}{٢}\sqrt[٥]{٣} + \frac{١}{٦}\sqrt[٥]{٣} - \sqrt[٥]{٩٦}$

٢-أوجد مجموعة حل المعادلة :

$$\sqrt[٥]{س^{-٣}} = \frac{١}{٢٧}$$

٣- أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :-

- $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٧\sqrt[٣]{س} + ١٠ = ٠$
- $س - \sqrt{س} - ٢ = ٠$

٤- إذا كان $٢\sqrt[٣]{س^{٥}} = \sqrt{ص^{٣}} = ٦٤$

إثبت أن:

$$\sqrt[٣]{س} + \sqrt{ص} = ٦$$

الوحدة الثانية

اللوغاريتمات

أهداف الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يعرف معني الدالة اللوغاريتمية .
- يتذكر حل المعادلة الأسية .
- يتقن حل المعادلة اللوغاريتمية .
- يعرف قوانين اللوغاريتمات .
- يفرق بين اللوغاريتمات المعتادة وغيرها .

دروس الوحدة :

- الدالة اللوغاريتمية .
- حل المعادلة الأسية .
- حل المعادلة اللوغاريتمية .
- قوانين اللوغاريتمات .
- اللوغاريتمات المعتادة .

اللوغاريتمات

الدالة اللوغاريتمية :

الدالة د(س) = $ا^{س}$ ، حيث ا عدد حقيقي موجب،تسمي الدالة الأسية،وممكن كتابتها على الصورة : ص = $ا^{س}$ ، حيث ا الأساس،س الأس ، ص العدد ا مرفوع للأس س .

ص = $ا^{س}$ تكتب على الصورة المكافئة س = $لو_{ا}$ ص ، وتقرأ : س لوغاريتم العدد ص للأساس ا ، وتسمى الدالة اللوغاريتمية .

ونجد أنه في الصورة الأسية للأساس ا: س تسمى الأس

أما في الصورة اللوغاريتمية : س تسمى اللوغاريتم

مثال [١] :

٨١ = $٣^{٤}$ يمكن تحويلها إلى الصورة اللوغاريتمية ٤ = $لو_{٣}$ ٨١

كذلك ٣٢ = $٢^{٥}$ $\longleftarrow$ ٥ = $لو_{٢}$ ٣٢

٦٢٥ = $٥^{٤}$ $\longleftarrow$ ٤ = $لو_{٥}$ ٦٢٥

٥ = $(٢٥)^{\frac{١}{٢}}$ $\longleftarrow$ $\frac{١}{٢}$ = $لو_{٢٥}$ ٥

٣ = $(٢٤٣)^{\frac{١}{٥}}$ $\longleftarrow$ $\frac{١}{٥}$ = $لو_{٢٤٣}$ ٣

وهكذا :

وبالعكس يمكن تحويل الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية :

مثل $لو_{٣}$ ٢٤٣ = ٥ $\longleftarrow$ $٣^{٥}$ = ٢٤٣

$لو_{٥}$ ١٢٥ = ٣ $\longleftarrow$ $٥^{٣}$ = ١٢٥

$لو_{٤}$ ٦٤ = ٣ $\longleftarrow$ $٤^{٣}$ = ٦٤

$لو_{٢}$ ٦٤ = ٦ $\longleftarrow$ $٢^{٦}$ = ٦٤

خواص الدالة اللوغاريتمية :

س = $لو_{ا}$ ص ، حيث ا عدد حقيقي موجب ، ا $\neq$ ١

نطاق الدالة ، وهو قيم ص ، هو مجموعة الأعداد الحقيقية $ح^{+}$ فقط. ولذلك يكون

١- ليس للأعداد الحقيقية السالبة لوغاريتمات .

٢- لكل عدد حقيقي موجب لوغاريتم وحيد فقط هو قيمة من قيم س.

٣- الدالة اللوغاريتمية تزايدية ، أي أنه كلما زادت قيمة المتغير المستقل ص زادت قيمة المتغير التابع س.

٤- إذا تساوت الأعداد تساوت لوغاريتماتها لنفس الأساس ، وإذا تساوت لوغاريتمات كميات لنفس الأساس تساوت الكميات.

أي انه إذا كانت $ج = ء$ ، فإن $لو_{م}\ ج = لو_{م}\ ء$

كذلك إذا كانت $لو_{م}\ س = لو_{م}\ ص$ فإن $س = ص$

ولذلك إذا كانت $س = ١٠٠$ ، فإن $لو_{١٠}\ س = لو_{١٠}\ ١٠٠$

وكذلك إذا كانت $لو_{٢}\ ج = لو_{٢}\ ٢٥$ ، فإن $ج = ٢٥$

حل المعادلة الأسية [٧-٢] :

سبق حلها بإستخدام القاعدة التي تقول أنه :

إذا تساوت الأساسات تساوت الأسس

مثال [١] :

حل المعادلة $٦٢٥ = ٥^{س}$

الحل:

$٦٢٥ = ٥^{٤} = ٥^{س}$ $\qquad$ $\therefore\ س = ٤$

مثال [٢] :

حل المعادلة $(\sqrt{٣})^{س} = ٢٤٣$

الحل:

$(٣^{\frac{١}{٢}})^{س} = ٣^{٥}$ $\qquad$ $\therefore\ ٣^{\frac{س}{٢}} = ٣^{٥}$

$\therefore\ \frac{س}{٢} = ٥$ $\qquad$ $\therefore\ س = ١٠$

حل المعادلة اللوغاريتمية :

الطريقة : تحول المعادلة اللوغاريتمية إلي معادلة أسية ثم تحل كما سبق .

مثال [١] :

أوجد قيمة كل مما يأتي :

(م) $لو_{٢}\ ٦٤$ ، (ب) $لو_{٤}\ ٢٥٦$ (ج) $لو_{٣}\ \frac{١}{٢٤٣}$ (د) $لو_{١٠}\ ١٠٠٠$

الحل:

(أ) نفرض أن $لو_{٢}\ ٦٤ = س$ ∴ $٢^{س} = ٦٤ = ٢^{٦}$

∴ س = ٦

(ب) نفرض أن $لو_{٤}\ ٢٥٦ = ص$ ∴ $٤^{ص} = ٢٥٦ = ٤^{٤}$

∴ ص = ٤

(جـ) نفرض أن $لو_{٣}\ \frac{١}{٢٤٣} = ع$ ∴ $٣^{ع} = \frac{١}{٢٤٣} = ٣^{-٥}$

∴ ع = −٥

(د) نفرض أن $لو_{١٠}\ ١٠٠٠ = م$ ∴ $١٠^{م} = ١٠٠٠ = ١٠^{٣}$

∴ م = ٣

ملحوظة :

المعادلة $ص = لو_{أ}\ س$ يوجد فيها ثلاث قيم مجهوله وهـــي ص ، س ، أ إذا علـــم اثنان منهما أمكن حلها وإيجاد قيمة المجهول الثالث .

مثال [٢] :

أوجد قيمة المجهول في كل معادلة من المعادلات الآتية :

(أ) $لو_{٥}\ \frac{١}{١٢٥} = س$ (ب) $لو_{أ}\ ٠.٠٠١ = ٣$

الحل:

(أ) $لو_{٥}\ \frac{١}{١٢٥} = س$ ∴ $٥^{س} = \frac{١}{١٢٥}$

∴ $٥^{س} = ٥^{-٣}$ ∴ س = −٣

(ب) $لو_{أ}\ ٠.٠٠١ = ٣$ ∴ $أ^{٣} = ٠.٠٠١ = \frac{١}{١٠^{٣}}$

∴ $\frac{١}{١٠^{٣}} = أ^{٣}$ ∴ $أ = \frac{١}{١٠}$

مثال [٣] :

حل المعادلة $لو_{\sqrt{٥}}\ (س - ٢) = صفراً$

الحل :

$لو_{\sqrt{٥}}\ (س - ٢) = صفراً$ ∴ $(\sqrt{٥})^{صفراً} = س - ٢$

∴ ١ = س − ٢ ∴ س = ٣

تمارين [١]

(١) أكمل الجدول الآتي :

المعادلة اللوغاريتمية	المعادلة الأسية	قيمة المجهول
لو$_{٥}$ س = ٥	....	س =.....
لو$_{٩}$ ص = صفراً	....	ص =.....
لو$_{٤}$ ع = −٤	....	ع =.....
....	$٢^{س}$=٣٢	س =.....
....	$١٠^{م}$ =١٠	م =.....
لو$_{٣}$ ٨١ = ل	....	ل =.....

(٢) حل المعادلات اللوغاريتمية الآتية :

(أ) لو$_{\sqrt{٣}}$ س = صفراً   (ب) لو$_{٥}$ (٢س − ٣) = ٢

(ج) لو$_{٢س}$ ٨١ = ٤   (د) لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = $\sqrt{س}$

(٣)أوجد القيمة العددية لكل مما يأتي :

(أ) لو$_{\frac{٥}{٣}}$ $\frac{٦٢٥}{٨١}$ (ب) لو$_{\frac{١}{١٠}}$ ٠.٠٠١

(ج) لو$_{\sqrt{٢}}$ ٤$\sqrt{٢}$ (د) لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢٥٦}$

قوانين اللوغاريتمات

علمنا مما سبق بأنه في الصورة الأسية ص = $أ^{س}$ يسمي س الأس ، وفي الصورة اللوغاريتمية س = $لو_{أ}$ ص يسمي س باللوغاريتم. ولذلك نجد أن كل القوانين التي تستخدم في الأسس لها نظيرفي اللوغاريتمات

القانون الأول :

عند تساوي الأساسات تجمع الأسس في حالة الضرب أي :

$$أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م + ن}$$

وتجمع اللوغاريتمات في الصورة اللوغاريتمية، أي أن :

$$\boxed{لو_{أ} (س \times ص) = لو_{أ} س + لو_{أ} ص}$$

نتيجة :

$$لو_{أ} (س \times س) = لو_{أ} س + لو_{أ} س = لو_{أ} س^{٢} = ٢ لو_{أ} س$$

القانون الثاني :

عند تساوي الأساسات تطرح الأسس في حالة القسمة أي :

$$أ^{م} \div أ^{ن} = أ^{م - ن}$$

وتطرح اللوغاريتمات في الصورة اللوغاريتمية، أي أن :

$$\boxed{لو_{أ} \left(\frac{س}{ص} \right) = لو_{أ} س - لو_{أ} ص}$$

القانون الثالث :

أي كمية غير صفرية مرفوعة إلى الأس صفر تساوي الواحد الصحيح ، أي :

$$(أ)^{صفر} = ١ \quad حيث \quad أ \neq صفر$$

ولوغاريتم الواحد الصحيح لأي أساس يساوي الصفر، أي أن .

$$\boxed{لو_{أ} ١ = صفر}$$

القانون الرابع :

إذا رفعت أي كمية إلي أس الواحد الصحيح لا تتغير قيمتها ، أي :

$(ﺃ)^{١} = ﺃ$ ، ولوغاريتم أي كمية بالنسبة لنفسها كأساس يساوي ١، أي أن :

$$\boxed{\text{لو}_{ﺃ}\ ﺃ = ١}$$

نتائج :

١) يمكن تطبيق القوانين في حالات تكرار الضرب والقسمة ، أي أن :

$$\text{لو}\ \frac{س \times ص}{ع \times ل} = \text{لو}\ س + \text{ل}\ ص - \text{لو}\ ع - \text{لو}\ ل$$

٢) العملية العكسية صحيحة ، أي أنه يمكن تحويل جمع وطرح لوغاريتمات كميات بأساس مشترك إلى لوغاريتم حاصل ضرب وخارج قسمة للكميات لنفس الأساس ، أي أن:

$$\text{لو}\ ع + \text{لو}\ ص - \text{لو}\ م = \text{لو}\ \frac{ع \times ص}{م}$$

وكذلك ، م لو س = لو $س^{م}$

$$\text{وكذلك}\ م\ \text{لو}\ س + ن\ \text{لو}\ ص - ﺟ\ \text{لو}\ ع = \text{لو}\ \frac{س^{م} \times ص^{ن}}{ع^{ﺟ}}$$

ملاحظات هامة :

(١) $\frac{\text{لو}\ س}{\text{لو}\ ص} \neq \text{لو}\ س - \text{لو}\ ص$ ، $\text{لو}\ س \times \text{لو}\ ص \neq \text{لو}\ س \times \text{لو}\ ص$

(٢) لو١٠ = ١ ، لو ١٠٠ = ٢ ، ....

إذا كتبت لو بدون أساس يكون الأساس ١٠

مثال [١] :

١) إذا كان لو ٢ = ٠.٣٠١٠ ، لو ٣ = ٠.٤٧٧١ ، لو٥ = ٠.٦٩٩٠

، لو٧ = ٠.٨٤٥١ فأوجد قيم المقادير الآتية :

لو ١٤ ، لو٢٠٠ ، لو٨١ ، لو$\sqrt{٥}$ ، لو $\frac{٩}{٥}$

الحل :

لو ١٤ =لو٧ × ٢ = لو٧ + لو٢ = ٠.٨٤٥١ + ٠.٣٠١٠ = ١.١٤٦١

لو٢٠٠ = لو٢×١٠٠ = لو٢ + لو١٠٠ = ٠.٣٠١٠+ ٢ = ٢.٣٠١٠

لو ٨١ = لو $٣^{٤}$ = ٤ لو ٣ = ٤ ×٠.٤٧٧١ = ١.٩٠٨٤

$$\text{لو}\sqrt{5} = \text{لو}\ (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ \text{لو}\ (5) = \frac{1}{2} \times 0.6990 = 0.3495$$

$$\text{لو}\ \frac{9}{5} = \text{لو}\ 9 - \text{لو}\ 5 = \text{لو}\ 3^{2} - \text{لو}\ 5 = 2\ \text{لو}\ 3 - \text{لو}\ 5 =$$

$$= 2 \times 0.3010 - 0.6990$$

$$= 0.9542 - 0.6990 = 0.2552$$

مثال [٢] :

اختصر لو ٦٢٥ – لو ١٢٥ – لو ٥

الحل :

المقدار

$$\text{لو}\ 5^{4} - \text{لو}\ 5^{3} - \text{لو}\ 5 = 4\text{لو}\ 5 - 3\ \text{لو}\ 5 - \text{لو}\ 5 = 4\text{لو}\ 5 - 4\text{لو}\ 5 = \text{صفر}$$

مثال [٣] :

اختصر لو ٢٧ + ٢ لو ٣ – ٥ لو ٣ + لو ٢٥ + لو ٤

الحل :

$$\text{لو}\ 27 + 2\ \text{لو}\ 3 - 5\ \text{لو}\ 3 + \text{لو}\ 25 + \text{لو}\ 4 =$$

$$\text{لو}\ 27 + \text{لو}\ 3^{2} - \text{لو}\ 3^{5} + \text{لو}\ 5^{2} + \text{لو}\ 4$$

$$= \text{لو}\ \frac{27 \times 9 \times 25 \times 4}{243} = \text{لو}\ 100 = 2$$

مثال [٤] :

أثبت أن $\frac{\text{لو}\ 343}{\text{لو}\ 49} = \frac{3}{2}$

الحل :

$$\frac{\text{لو}\ 343}{\text{لو}\ 49} = \frac{\text{لو}\ 7^{3}}{\text{لو}\ 7^{2}}$$

$$= \frac{3\text{لو}\ 7}{2\text{لو}\ 7} = \frac{3}{2}$$

تمرين[٢]

١) ضع إحدى العلامات الآتية بين كل كميتين (> ، < ، =) :

(أ) لو$_{٣}$ ٦٤ (......) لو$_{٣}$ ١٠٠ (ب) لو$_{٧}$ ٤.٥٣ (......) لو$_{٧}$ ٣.٩٥

(حـ) لو$_{٥}$ ٢٥ (......) ٢ (ء) لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ (......) لو$_{٢}$ ٦٤

٢) اختصر : لو$_{٢}$ ١٠٠٠ + لو$_{٢}$ ٣٥ − لو$_{٢}$ ٧٠ − لو$_{٢}$ ٤٠ − لو$_{٢}$ ٢٥

٣) اختصر : لو$_{٧}$ ٢٤٣ ÷ لو$_{٧}$ ٢٧

٤) اختصر : لو$_{٢}$ ٦.٢٥ + ٢ لو$_{٢}$ ١٠ − $\frac{٣}{٢}$ لو$_{٢}$ ٦٤٠٠ + لو$_{٢}$ $\frac{٣٢}{٥}$

٥) اثبت أن : لو٨٢٥ ينحصر بين ٢ ، ٣

٦) إذا كان لو س ينحصر بين ١ ، ٢ ، فاثبت أن س تنحصر بين ١٠ ، ١٠٠

٧) إذا كان لو ٢ = ٠.٣٠١٠أوجد قيم كلا من الكميات الآتية :

لو٨ ، لو٠.٠٤ ، لو٠.٠٢ ، لو ٠.٠٦٤

اللوغاريتمات المعتادة

اللوغاريتم المعتاد هو اللوغاريتم الذي أساسه ١٠ وقد أتفق على حذف هذا الأساس عند كتابة اللوغاريتم .

لإيجاد اللوغاريتم المعتاد لعدد موجب معلوم :

(بأستخدام الألة الحاسبة)

نضغط على مفاتيح الألة الحاسبة حسب الترتيب الآتي :

نضغط المفتاح **Log** ثم نكتب على العدد المعلوم ثم **=** فيظهر اللوغاريتم المطلوب .

مثال [١] :

أوجد بأستخدام الألة الحاسبة لو١٥

الحل :

لإيجاد قيمة لو ١٥ نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتي من اليسار :

Log **1** **5** **=** فيظهر الناتج ← **1.176**

∴ لو ١٥ = ١.١٧٦

لإيجاد العدد إذا علم لوغاريتمه المعتاد:

نضغط على مفاتيح الألة الحاسبة حسب الترتيب الآتي :

نضغط المفتاح **Shif** ثم **Log** ثم نكتب اللوغاريتم المعلوم ثم نضغط على مفتاح **=**

مثال [٢] :

أوجد قيمة س إذا كان لو س = ١.٢٣٤٥ ذلك بأستخدام الألة الحاسبة.

الحل :

لإيجاد قيمة س نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتي من اليسار :

Shif **Log** **1** **.** **2** **3** **4** **5** **=**

يظهر على الألة الناتج ← **17.1593**

∴ س = ١٧.١٥٩٣

مثال [٣] :

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة لو ٣٨.٠٥ مقرباً الناتج إلى أربعة أرقام عشرية.

الحل :

لإيجاد قيمة لو ٣٨.٠٥ نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتي من اليسار

Log	3	8	.	0	5	=	1.580354661

∴ لو ٣٨.٠٥ = ١.٥٨٠٤ تقريباً

مثال [٤] :

باستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة لو ٠.٠٠٨٠٥ مقرَباَ الناتج إلي أربعـــة أرقـــام عشرية .

الحل :

لإيجاد قيمة لو ٠.٠٠٨٠٥نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتى من اليسار

Log	.	0	0	8	0	5	=	-2.4196

∴ لو ٠.٠٠٨٠٥ = − ٢.٤١٩٦ تقريباً

مثال [٥] :

أوجد قيمة س إذا كان لو س = ١.٥٨٧١

الحل :

لإيجاد قيمة س نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتي من اليسار

Shif	Log	1	.	5	8	7	1	=	38.64

∴ س = ٣٨.٦٤

مثال [٦] :

أوجد قيمة س إذا كان لو س = − ٠.٦٨١٣

الحل :

لإيجاد قيمة س نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتى من اليسار

Shif	Log	-	.	6	8	1	3	=	0.2083

∴ س = ٠.٢٠٨٣

مثال [٧] :

باستخدام اللوغاريتمات أوجد قيمة $\sqrt[٤]{٢٤.٠٣}$

الحل :

نفرض أن س = $(٢٤.٠٣)^{\frac{١}{٤}}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نجد أن

لو س = لو $(٢٤.٠٣)^{\frac{١}{٤}}$ ⇐ لو س = $\frac{١}{٤}$ لو (٢٤.٠٣)

لإيجاد قيمة س نضغط على المفاتيح حسب الترتيب الآتي من اليسار

Shif	Log	2	4	.	0	3	÷	4

وبالتالي يكون قيمة $\sqrt[٤]{٢٤.٠٣}$ هو ٢.٢١٤٠٥٥٢ ⟵ **2.2140552**

مثال [٨] :

باستخدام اللوغاريتمات أوجد قيمة $\frac{\sqrt{٣٦٢.٩} \times \sqrt[٥]{٢٧٧٧}}{\sqrt[٣]{(٦.٢٧٩)^{٢}}}$

الحل :

نفرض أن س = $\frac{\sqrt{٣٦٢.٩} \times \sqrt[٥]{٢٧٧٧}}{\sqrt[٣]{(٦.٢٧٩)^{٢}}}$

$$= \frac{(٣٦٢.٩)^{\frac{١}{٢}} \times (٢٧٧٧)^{\frac{١}{٥}}}{(٦.٢٧٩)^{\frac{٢}{٣}}}$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين ينتج أن :

لو س = $\frac{١}{٢}$ لو ٣٦٢.٩ + $\frac{١}{٥}$ لو٢٧٧٧ − $\frac{٢}{٣}$ لو ٦٠٢٧٩

ويمكن إيجاد قيمة س بالضغط على المفاتيح وفق الترتيب التالي من اليسار إلى اليمين

Log	3	6	2	.	9	÷	2
+	Log	2	7	7	7	÷	5
-	Log	6	.	2	7	9	×
2	÷	3	=	Shif	Log	Ans	=

27.332647

∴ س = ٢٧.٣٣٢٦ تقريباً

تمارين [٣]

١ – بإستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة س في كل مما يأتي :

(أ) س = لو ١٤٢ (ب) س = لو ٠.٠٠٠٧٩ (حـ) س = لو $\frac{\text{٧}}{\text{٦}}$

(د) س = لو $\frac{\text{٣}}{\text{١٩}}$ ٥ (هـ) $\text{س}^{\text{٢}}$ = لو ٠.٥٦٣١ (و) س = لو $(\text{٧.٠٢٣})^{\text{٢}}$

(ز) لو س = ٠.١٤٢٣ (ح) لو $\text{س}^{\text{٢}}$ = ٠.٠٠٠٢٣٥ (ط) لو س = – ٠.٢٧٣١

٢ – حل المعادلات الآتية :

(أ) س = $(\text{١٠})^{\text{٢.٣٤١}}$ (ب) س = $(\text{١٠٠٠})^{\text{٠.٩٣١٢}}$

(حـ) $\text{٧}^{\text{س}}$ = ٥ (د) $\text{٢}^{\text{س}+\text{١}}$ = ٩

(هـ) $\text{لو}_{\text{س}}$ (٥س + ٦) = ٢ (و) $\text{٣}^{\text{س}+\text{١}} = \text{٢}^{\text{س}-\text{١}}$

٣ – أوجد قيمة ما يأتي :

(أ) $\dfrac{(\text{٣.٠٢٥})^{\text{٤}} \times (\text{٠.٠٢٢٥})^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}}}{\sqrt{\text{١٢٥.٢}}}$

(ب) $\sqrt[\text{٣}]{\dfrac{\text{١٧٠٨.٢}}{\text{٣.١٤١٦} \times \text{١٢٠٦}}}$

الوحدة الثالثة

أهداف الوحدة

حساب المثلثات

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يعرف الزاوية الموجهة .
- يعرف الوضع القياسي للزاوية الموجهة .
- يتقن الفرق بين القياس الستيني ، القياس الدائري .
- يتقن أستخدام حاسبة الجيب .
- يعرف مفهوم وقيم الدوال المثلثية .
- يميز ويتقن بعض الخواص للدوال المثلثية .
- يستطيع إيجاد قياس زاوية معلوم أحدى قيم الدوال المثلثية .

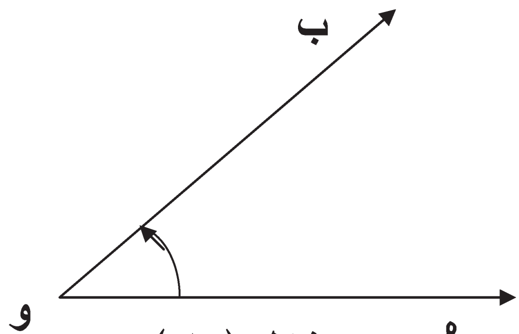
دروس الوحدة :

- الزاوية الموجهة .
- الوضع القياسي للزاوية الموجهة .
- القياس الستيني ، القياس الدائري .
- حاسبة الجيب .
- الدوال المثلثية .
- بعض الخواص للدوال المثلثية .
- إيجاد قياس زاوية معلوم أحدى قيم الدوال المثلثية لها
- حل المثلث .
- زوايا الأرتفاع والأنخفاض .

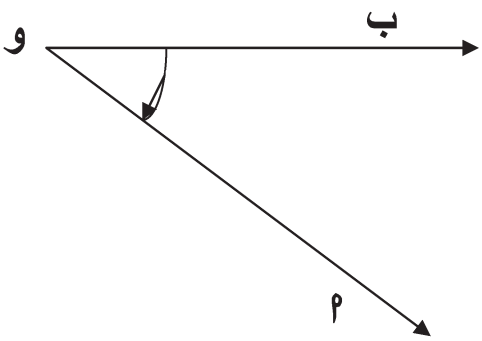
حساب المثلثات

الزاوية الموجهة :

سبق لنا أن درسنا في مرحلة التعليم الأساسي تعريف الزاوية على أنها إتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة . تسمي رأس الزاوية والشعاعان هما ضلعا الزاوية وذلك دون التعرض لقياس الزاوية أو لاتجاهها من حيث كونها موجبة أو سالبة.



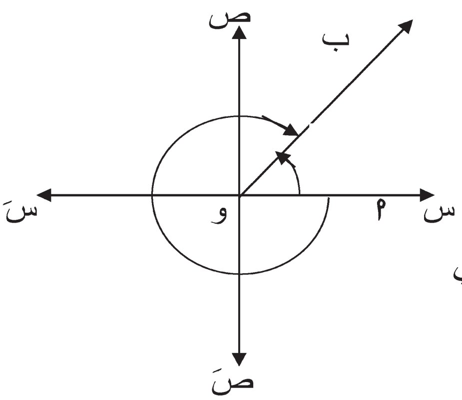
شكل (١)



شكل (٢)

فإذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية
في شكل (١) نحصل على الزوج المرتب (و أ ، و ب)العنصر الأول و أ الضلع الابتدائي ، العنصر الثاني و ب الضلع النهائي ، النقطة و رأس الزاوية
بينما في شكل (٢) نحصل على الزوج المرتب (وب ، و أ) العنصر الأول وب الضلع الابتدائي العنصر الثاني و أ الضلع النهائي ، النقطة و رأس الزاوية
ويلاحظ أن (و أ ، وب) ≠ (وب ، و أ) .
فالأولى تسمى ∠ أ و ب والثانية تسمى ∠ ب و أ .
ويكون للزاوية الموجهه قياس موجب إذا كان الأتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي ضد إتجاه حركة عقارب الساعة كما في شكل (١) .
ويكون للزاوية الموجهه قياس سالب إذا كان الأتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع إتجاه حركة عقارب الساعة كما في شكل (٢) .

الوضع القياسي للزاوية الموجهة :



تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا كان رأسها هو نقطة الأصـــل لنظام إحداثي متعامد وضلعها الابتدائي $\overrightarrow{\text{وس}}$.

وعلي ذلك يكون لكل زاوية موجهة في الوضع القياسي لها قياسان أحدهما موجب والآخر سالب .

والمجموع العددي للقياسان ٣٦٠°

فمثلا أ و ب لها قياسان هما ٤٠° ، – ٣٢٠°

ويقال للزاوية الموجبة أ و ب في وضعها القياسي أنها تقع في الربع الأول

وإذا كان $\overrightarrow{\text{وب}}$ بين $\overrightarrow{\text{وص}}$ ،$\overrightarrow{\text{وسَ}}$ يقال أن الزاوية تقع في الربع الثاني

وإذا كان $\overrightarrow{\text{وب}}$ بين $\overrightarrow{\text{وسَ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وصَ}}$ يقال أن الزاوية تقع في الربع الثالث

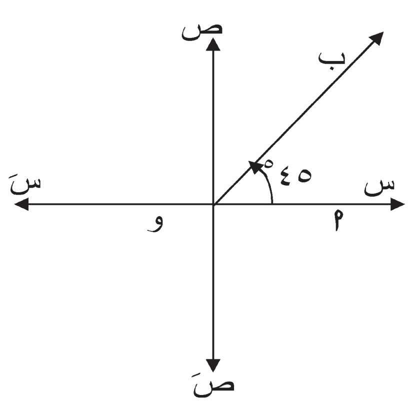
وإذا كان $\overrightarrow{\text{وب}}$ بين $\overrightarrow{\text{وصَ}}$ ، $\overrightarrow{\text{وس}}$ يقال أن الزاوية تقع في الربع الرابع

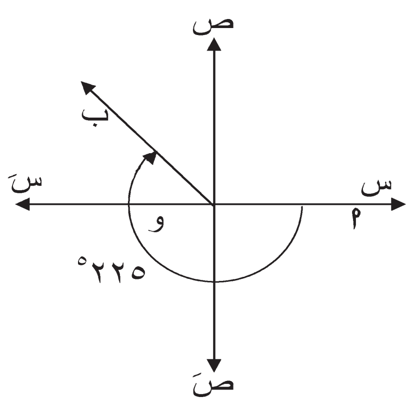
> وتكون عدة زوايا في الوضع القياسي متكافئة إذا كان الشعاع النهائي لها جميعا واحدا

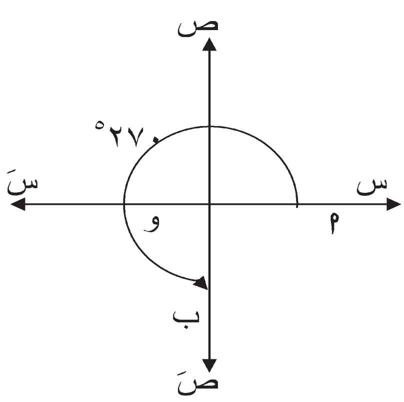
فالزوايا س° = هـ × ٣٦٠° جميعا تكافئ الزاوية هـ

تدريب :

أكتب القياسات الأخري لكل من الزوايا الموجهة المبينة بالأشكال الآتية:–







وحدات قياس الزاوية :

يوجد أكثرمن وحدة لقياس الزاويا وسوف نتناول نوعين من وحدات قياس الزوايا هما :

أولا : القياس الستيني :-

وهو القياس الذي سبق أن تعرفنا عليه في مرحلة التعليم الأساسي وذلك بأستخدام المنقلة

١ درجة = ٦٠دقيقة ، ١ دقيقة = ٦٠ثانية

ثانيا : القياس الدائري :-

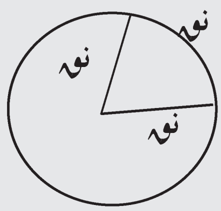
يعتمد على طول القوس من الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز ء .

تعريف :-

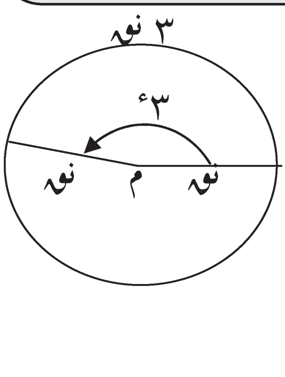
القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$

هـ ء = $\frac{\text{ل}}{\text{نق}}$ حيث هـ ء قياس الزاوية المركزية ، ل طول القوس الذي تحصره الزاوية .

تعريف الزاوية النصف قطرية :-



الزاوية النصف قطرية هي الزاوية التي تحصر قوسا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة .



علي ذلك تكون الزاوية التي قياسها ٣ء هي الزاوية المركزية في دائرة والتي تحصر قوساً من هذه الدائرة طوله يساوي ثلاث أمثال طول نصف قطرهذه هى الدائرة.

العلاقة بين التقديرين الدائري والستيني :-

إذا كانت لدينا زاوية قياسها بالتقدير الدائري هـ^{ء} وبالتقدير الستيني س$^{\circ}$ فإن :-

$$\frac{س^{\circ}}{١٨٠} = \frac{هـ^{ء}}{ط}$$

أو

$$هـ^{ء} = س^{\circ} \times \frac{ط}{١٨٠^{\circ}}$$

$$س^{\circ} = هـ^{ء} \times \frac{١٨٠^{\circ}}{ط}$$

مثال [١] :

زاوية قياسها ١.٤^{ء} أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة ·

الحل :-

$$س^{\circ} = ١.٤^{ء} \times \frac{١٨٠}{ط} = ٨٠.٢١٤^{\circ}$$

$$٠.٢١٤ = ٠.٢١٤ \times ٦٠' = ١٢.٨٤' = ١٣'$$

$$١.٤^{ء} = ٨٠^{\circ} \quad ١٣'$$

ويمكن أستخدام الألة الحاسبة مباشرة للقيام بهذا التحويل

مثال [٢] :

حول للتقدير الدائري كلا من (١) ٦٠$^{\circ}$ ، (٢) ١٢' ٣٠$^{\circ}$

الحل :-

$$(١)\ هـ^{ء} = ٦٠^{\circ} \times \frac{ط}{١٨٠} = ١.٠٤٧^{ء}$$

$$(٢)\ ١٢' \quad ٣٠^{\circ} = ٣٠^{\circ} + \frac{١٢}{٦٠} = ٣٠^{\circ} + ٠.٢^{\circ} = ٣٠.٢^{\circ}$$

$$هـ^{ء} = ٣٠.٢^{\circ} \times \frac{ط}{١٨٠^{\circ}} = ٠.٥٢٧٠٨^{ء} = ٠.٥٣^{ء}$$

مثال [٣] :

النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٢ : ٣ : ٤ أوجد القياس الستيني والدائري لكلا من زواياه .

الحل :-

نفرض أن قياسات زوايا المثلث هي ٢ س ، ٣ س ، ٤ س

∴ ٢ س + ٣ س + ٤ س = ١٨٠°

∴ ٩ س = ١٨٠°

∴ س = ٢٠°

القياس الستيني للزاوية الأولى = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

القياس الستيني للزاوية الثانية = ٣ × ٢٠° = ٦٠°

القياس الستيني للزاوية الثالثة = ٤ × ٢٠° = ٨٠°

القياس الدائري للزاوية الأولي = ٤٠° × $\frac{\text{ط}}{١٨٠^\circ}$ = ٠.٧ ء

القياس الستيني للزاوية الثانية = ٦٠° × $\frac{\text{ط}}{١٨٠^\circ}$ = ١.٠٧ ء

القياس الستيني للزاوية الثالثة = ٨٠° × $\frac{\text{ط}}{١٨٠^\circ}$ = ١.٤ ء

مثال [٤] :

م ب جـ مثلث فيه ق∠ م = ٥٥° ، ق∠ ب = ١.٦ ء أوجد قياس زاوية جـ بالقياس الدائري لأقرب رقمين عشريين .

الحل :-

∵ ق∠ ب = ١.٦ × $\frac{١٨٠^\circ}{\text{ط}}$ = ٩١° ٤٠َ

∵ م ب جـ مثلث

∴ ق∠ جـ = ١٨٠° − (٥٥° + ٩١° ٤٠َ) = ٣٣° ٢٠َ

ق∠ جـ بالقياس الدائري = ٣٣° ٢٠َ × $\frac{\text{ط}}{١٨٠^\circ}$ = ٠.٥٨ ء

مثال [٥] :

إستخدم الألة الحاسبة في حساب التقدير الستيني لزاوية قياسها الدائري يساوي ١.٤ ء

الحل :-

إذا كانت س° هي القياس الستيني فإن :

س° = ١.٤ ء × $\frac{١٨٠^\circ}{ط}$ = بعد الضغط على مفتاح التشغيل نضغط على المفاتيح بالترتيب من جهه اليسار .

1	·	4	×	1	8	0	÷	Sh	Exp	=	‹‹‹

يظهر على الشاشه °80 12 50 .73

١.٤ ء = ٥١ً ١٢َ ٨٠°

مثال [٦] :

زاوية قياسها ٤٢ً ٢٥َ ١١٢° أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقرباً الجواب إلى رقمين عشريين .

الحل :-

هـ ء = س° × $\frac{ط}{١٨٠^\circ}$

بعد الضغط على مفتاح التشغيل نضغط على المفاتيح بالترتيب من جهه اليسار .

1	1	2	‹‹‹	2	5	‹‹‹	4	2	‹‹‹	×	π

÷	1	8	0	=

يظهر على الشاشة 1.96224458

∴ ٤٢ً ٢٥َ ١١٢° = ١.٩٦ ء

تدريب :-

١) أوجد القياس الستيني للزاوية التي قياسها ٢ء

٢) أوجد القياس الدائري للزاوية التي قياسها ١٥ً ٢٢َ ٣٨°

٣) أيهما أكبر الزاوية التي قياسها ١.٥ء أم الزاوية التي قياسها ٧٠°

تمارين[١]

١) حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا التي قياساتها كالآتي :-

٢) ١٤َ ١٣٠°	ب) ٣٠َ ٨٩°
ج) - ١٥٠°	هـ) - ٣٠٠°

٢) أوجد القياس الدائري للزوايا التي قياساتها كالأتي لرقمين عشريين .

٢) ٢٢٥°	ب) ٣٠٠°
ج) ١°	ء) - ١٣٥°
هـ) ١٤َ ٧٨°	و) ١٢ً ٥٠َ ١١٥°

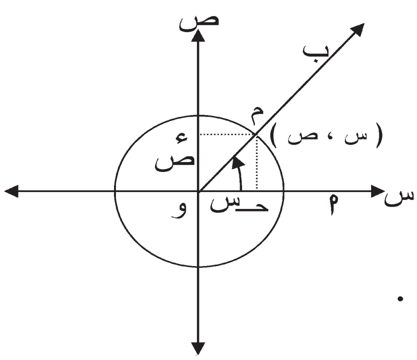
٣) أوجد القياس الستيني للزوايا الآتية :-

٢) ٠.٤٨ء	ب) ١.٤٩ء
ج) ٣.٥٥ء	ء) $\frac{٥}{٢٤}$ ط

٤) أوجد زاويتين أحدهما قياسها موجب والأخري قياسها سالب مكافئة لكل زاوية من الزوايا التي قياساتها كالآتي :-

٢) ٢٠°	ب) ١٥٠°
ج) - ٣٠°	ء) $\frac{٣}{٤}$ ط

الدوال المثلثية وإيجاد قيمها بالآلة الحاسبة لأي زاوية :



الدوال المثلثية (الدوال الدائرية)

لنفرض أن الزاوية الموجهة $\hat{٢وم}$ في الشكل الآتي

حيث م (س ، ص) ∋ دائرة الوحدة .

ملاحظة : دائرة الوحدة هي الدائرة التي طول نصف قطرها وحدة الأطوال ومركزها نقطة الأصل .

تعريف :- [الدوال الأساسية]

١) جيب الزاوية هـ = حا هـ = وء = ص = الإحداثي الصادي

٢) جيب تمام الزاوية هـ = حتا هـ = وحــ = س = الإحداثي السيني

٣) ظل الزاوية هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ حيث س ≠ صفر

مقلوبات الدوال الأساسية [الدوال الدائرية] :

١) قاطع تمام الزاوية هـ = $\frac{1}{\text{حاهـ}}$ = قتا هـ = $\frac{1}{\text{ص}}$ حيث ص ≠ صفر

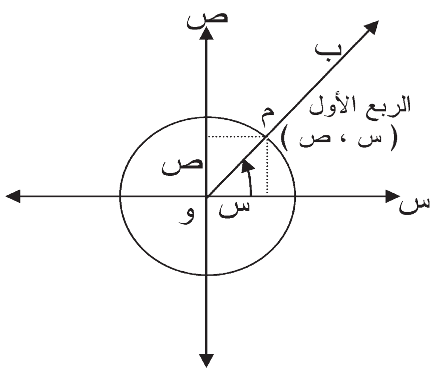
٢) قاطع الزاوية هـ = $\frac{1}{\text{حتاهـ}}$ = قا هـ = $\frac{1}{\text{س}}$ حيث س ≠ صفر

٣) ظل تمام الزاوية هـ = $\frac{1}{\text{ظاهـ}}$ = ظتا هـ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ حيث ص ≠ صفر

ملاحظات :-

١) هذه التعاريف تعتمد علي إحداثي نقطة ب = (س ، ص) حيث

س^{2} + ص^{2} = ١ في دائرة الوحدة س ، ص ∋ ح

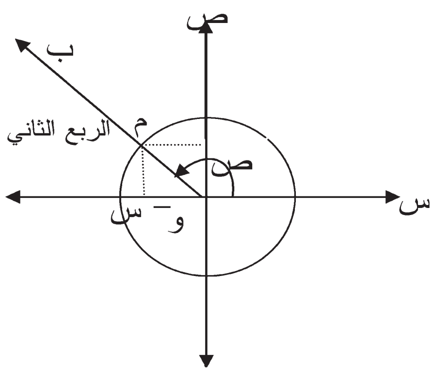


٢) إذا وقع $\overleftarrow{\text{وب}}$ في **الربع الأول**

هـ ∋] ٠ ، $\frac{\text{ط}}{2}$ [وتكون س > ٠

، ص > ٠ وعلى ذلك تكون

جميع الدوال المثلثية موجبة .



٣) إذا وقع $\overleftarrow{\text{وب}}$ في **الربع الثاني**

هـ ∋] $\frac{\text{ط}}{2}$، ط [وتكون س < ٠

، ص > ٠ وعلي ذلك يكون

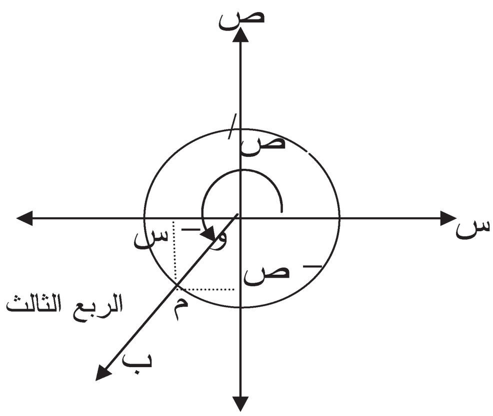
الجيب فقط موجباً .

٤) إذا وقع وب في **الربع الثالث**

هـ ∈] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [وتكون س < ٠

، ص < ٠ وعلي ذلك يكون

ظل الزاوية فقط موجباً .

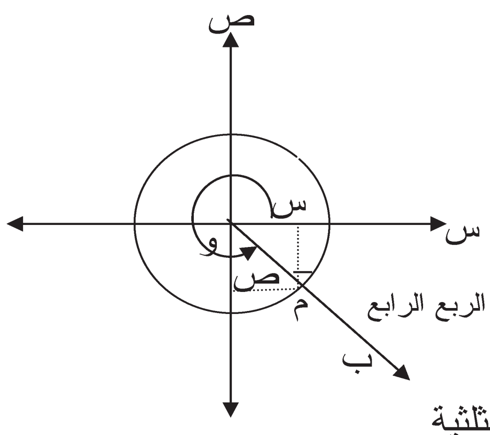


٥) إذا وقع $\overleftarrow{\text{وب}}$ في **الربع الرابع**

هـ ∈] $\frac{٣ط}{٢}$ ، ٢ ط [وتكون س > ٠

، ص < ٠ وعلى ذلك يكون

جيب تمام فقط موجباً .



٦) مجموعة الزوايا المتكافئة لها نفس الدوال المثلثية

٧) في دائرة الوحدة :-

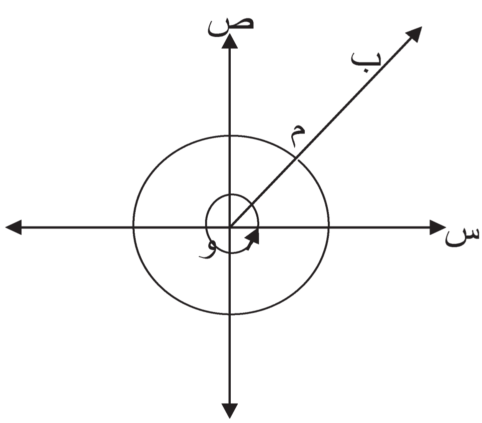
حا (هـ + ٢ ن ط) = ص = حا هـ

حتا (هـ + ٢ ن ط) = س = حتا هـ

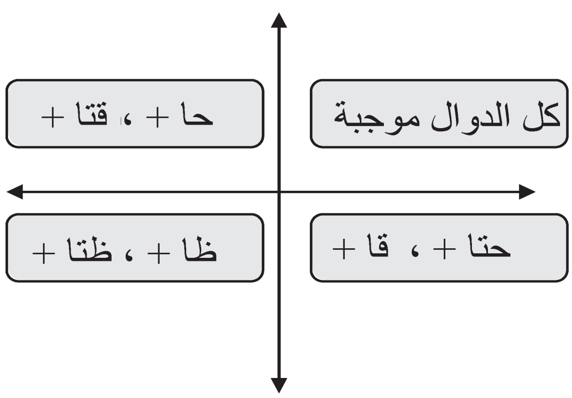
ظا (هـ + ٢ ن ط) = $\frac{ص}{س}$ = ظا هـ

حيث ن ∈ ص (مجموعة الأعداد الصحيحة)

وس ≠ صفر .



٨) يمكن تلخيص إشارة الدوال المثلثية جميعا في الشكل المقابل .



بعض الخواص للدوال المثلثية" بدون برهان"

أولا : الدوال المثلثية للزاويتين المتتامتين اللتين قياسهما هـ° ، (٩٠− هـ°) :

حا (٩٠− هـ°)= حتا هـ	قتا (٩٠− هـ°)= قا هـ
حتا (٩٠− هـ°)= حا هـ	قا (٩٠− هـ°)= قتا هـ
ظا (٩٠− هـ°)= ظتا هـ	ظتا (٩٠− هـ°)= ظا هـ

ثانيا : الدوال المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما هـ° ، (−هـ°) :

حا (−هـ°) = − حا هـ	قتا (−هـ°)= − قتا هـ
حتا (−هـ°)= حتا هـ	قا (−هـ°) = قا هـ
ظا (−هـ°)= − ظا هـ	ظتا (−هـ°)= − ظتا هـ

ثالثاً : الدوال المثلثية للزاويتين المتكاملتين اللتين قياسهما :

(هـ°) ، (١٨٠− هـ°)

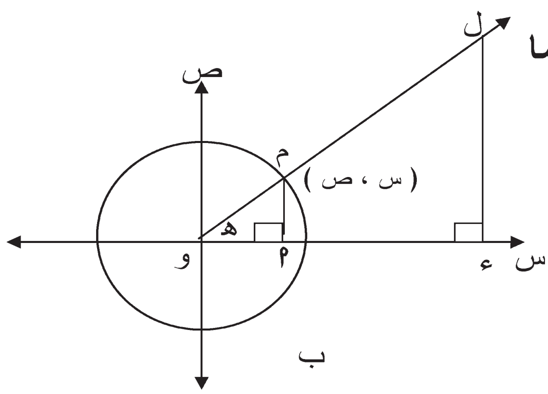
حا (١٨٠− هـ°) = حا هـ	قتا (١٨٠− هـ°) = قتا هـ
حتا (١٨٠− هـ°) = − حتا هـ	قا (١٨٠− هـ°) = − قا هـ
ظا (١٨٠− هـ°) = − ظا هـ	ظتا (١٨٠− هـ°) = − ظتا هـ

رابعاً : الدوال المثلثية لأي زاويتين قياسهما هـ° ، (١٨٠− هـ°) :

حا (١٨٠+ هـ°) = − حا هـ	قتا (١٨٠+ هـ°) = − قتا هـ
حتا (١٨٠+ هـ°) = − حتا هـ	قا (١٨٠+ هـ°) = − قا هـ
ظا (١٨٠+ هـ°) = ظا هـ	ظتا (١٨٠+ هـ°) = ظتا هـ

الدوال المثلثية للزاوية الحادة :

لنفرض أن الزاوية الموجهة أ̂وم الحادة



حيث م (س ، ص) ∈ دائرة الوحدة كما في الشكل المقابل نأخذ نقطة ل ∈ $\overleftarrow{وم}$

ونرسم $\overline{ل ء}$ ⊥ $\overleftrightarrow{و س}$ ، $\overline{م جـ}$ // $\overline{ل ء}$

∴ △ م جـ و يشابه △ ل ء و

∴ $\frac{م\ جـ}{ل\ ء} = \frac{جـ\ و}{ء\ و} = \frac{م\ و}{ل\ و}$

$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{ل ء}} = \frac{\text{س}}{\text{ء و}} = \frac{١}{\text{ل و}}$ $\therefore$ ص $= \frac{\text{ل ء}}{\text{ل و}}$ ، س $= \frac{\text{ء و}}{\text{ل و}}$

أي أن في المثلث القائم ل ء و يكون

حا هـ $= \frac{\text{ل ء}}{\text{ل و}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، حتا هـ $= \frac{\text{ء و}}{\text{ل و}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

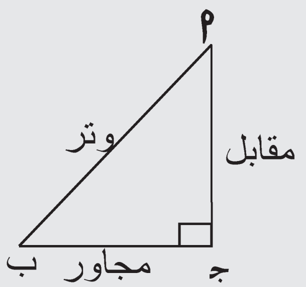
طا هـ $= \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{\text{ل ء}}{\text{ل و}} \div \frac{\text{ء و}}{\text{ل و}} = \frac{\text{ل ء}}{\text{ء و}} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

وعلي ذلك في أي مثلث قائم يمكن تعريف الدوال المثلثية كالآتي :-

حا ب $= \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول وتر المثلث}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

حتا ب $= \frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول وتر المثلث}} = \frac{\text{جـ ب}}{\text{أ ب}}$

طا ب $= \frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{ب جـ}}$



مثال [١] :

إذا كانت $\widehat{\text{أوم}}$ زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة أوجد الدوال المثلثية للزاوية $\widehat{\text{أوم}}$ إذا كانت إحداثي نقطة م هي :-

أ) $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}} \right)$ ب) ($-$ س ، س) ، س $\in$ $ح^+$

جـ) $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢} \right)$ حيث س $\in$ $ح^+$

الحل :-

أ) حتا $\widehat{\text{أوم}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا $\widehat{\text{أوم}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ $\therefore$ طا $\widehat{\text{أوم}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} =$ ....$= ١$

ب) $(-س)^٢ + س^٢ = ١$ ∴ $٢ س^٢ = ١$ ∴ $س^٢ = \frac{١}{٢}$

$س = \pm \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∵ $س \in ح^+$

∴ حتا $\widehat{أوم} = - \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، حا $\widehat{أوم} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، طا $\widehat{أوم} = -١$

ج) حتا $\widehat{أوم} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ حا $\widehat{أوم} = \frac{١}{٢}$

∴ طا $\widehat{أوم} = \frac{١}{٢} \div \frac{\sqrt{٣}}{٢} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثال [٢] :

عين أشارة كل من الدوال الآتية :-

(أ) حا ٤٠٠° (ب) طا ٣٠٠° (ج) حتا $\frac{١٠ط}{٣}$

الحل :-

(أ) حا ٤٠٠° = جا $(٤٠٠ - ٣٦٠)$ = حا ٤٠°

الزاوية التي قياسها ٤٠° تقع في الربع الأول ∴ الأشارة موجبة

(ب) طا٣٠٠° الزاوية التي قياسها٣٠٠° تقع في الربع الرابع

∴ الأشارة سالبة

(ج) حتا $\frac{١٠ط}{٣}$ = حتا $\frac{١٠ \times ١٨٠^\circ}{٣}$ = حتا ٦٠٠° = حتا $(٣٦٠^\circ + ٢٤٠^\circ)$

= حتا ٢٤٠° = حتا $(١٨٠^\circ + ٦٠^\circ)$ = − حتا ٦٠°

الزاوية التي قياسها٢٤٠° تقع في الربع الثالث ∴ الأشارة سالبة

مثال [٣] :

إذا كانت حا $(س + ٤٠^\circ)$ = حتا $(٣ س + ٢٠^\circ)$

حيث $٠ < س < ٩٠^\circ$ أوجد قيمة س

الحل :-

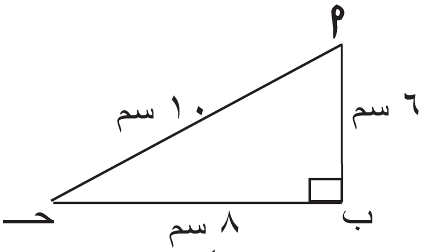
∵ حا $(س + ٤٠^\circ)$ = حتا $(٣ س + ٢٠^\circ)$

∴ $س + ٤٠^\circ + ٣ س + ٢٠^\circ = ٩٠^\circ$

$٤ س = ٩٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠^\circ$ ∴ $س = \frac{٣٠}{٤} = ٧.٥^\circ$ ∴ $س = ٧^\circ \; ٣٠'$

مثال [٤] :

أب ج مثلث قائم الزاوية في ب ، أب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم أوجد قيم الدوال المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ج .



الحل :-

بتطبيق نظرية فيثاغورث

(أ ج)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب ج)^{٢}

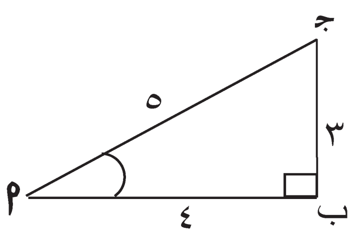
٣٦ + ٦٤ = ١٠٠   ∴ أ ج = ١٠   ∴ حاأ = ٨/١٠ = ٤/٥

حتا أ = ٦/١٠ = ٣/٥   ، حتا ج = .../...... = ...

طا أ = ٨/٦ = ٤/٣   ، طا ج = .../...... = ...

مثال [٥] :

إذا كانت ٤ قا أ = ٥ فأوجد قيم جميع الدوال المثلثية الأساسية للزاوية أ



الحل :-

∵ ٤ قا أ = ٥   ∴ قا أ = ٥/٤

نرسم المثلث القائم أ ب حـ فيه أج = ٥ ، أب = ٤

بتطبيق نظرية فيثاغورث (أ ج)^{٢} = (أب)^{٢} + (ب ج)^{٢}

(ب ج)^{٢} = (.....)^{٢} − (.....)^{٢} ب ج = ٣

حا أ = ٣/٥   جتا أ = ٤/٥   طا أ = ٣/٤

تدريب :-

إذا كانت ٤طا أ= −٣ حيث ٩٠° < أ < ١٨٠° فإن

حا أ = ... ، حتا أ = ...

قتا أ = ... ، قا أ = ...

طا أ= ......

تمارين[٢]

١-إذا كانت هـ زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية $\widehat{ا و م}$ إذا كان أحداثي نقطة م هي :-

ا) $\left(\frac{١}{٢}- ، \frac{\sqrt{٣}}{٢} \right)$

ب) (س ، − س)

ج) (− ٠.٦ ، ص)   حيث س ، ص $\in$ $ح^{+}$

٢- عين أشارة كل من الدوال الآتية :-

ا) حا ١٥٠°   ب) جتا٣٠٠°

ج) طا $\frac{٣ط}{٤}$ ء) قا ١٠٠٠°

٣ – إذا كانت ٠ < س < ٩٠° أوجد قيمة س لكي تكون حلاً في كل مما يأتي :-

ا) طتا (س − ٣٠°) = طا (٩٠° + س)

ب) حا (س + ٢٠°) = حتا (٣ س + ٣٠°)

ج) طا (س + ٢٥َ ١٨°) = طتا (س + ٣٥َ ١٩°)

ء) حا ٢ س = جتا ٣ س

٤ – إذا كانت طتا ج = $\frac{٥}{١٢}$ فأوجد قيم جميع الدوال المثلثية للزاوية **ج** الحادة .

٥ – إذا كان ٩ طتا ا = ٤٠ حيث ا زاوية حادة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية ا .

٦ – إذا كانت ق $(\widehat{ج})$ $\in$] ٩٠° ، ١٨٠° [وكان حا ج = ٠.٨ أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية ج .

٧ – إذا كانت ق (ب) $\in$] $\frac{٣ط}{٢}$ ، ٢ ط [وكان ٥ حتا ب = ٤ أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية ب .

٨ – اذ كان ١٥ طا ا + ٨ = ٠ وكان ٩٠° < ا < ١٨٠° أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية ا .

٩ – اذ كان حا ا = − $\frac{٨}{١٧}$ وكان ١٨٠° < ا < ٢٧٠° أوجد قيم الدوال المثلثية للزاوية ا .

إستخدام الآلة الحاسبة :

في إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية :

يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية بالرسم ولكن نحتاج إلى دقة كبيرة كما أنها تعطي نتائج تقريبية ولا يمكن إستخدام الرسم في حساب الدوال المثلثية لزوايا تشمل كسوراً من الدرجة ويمكن أستخدام الحاسبة في إيجاد الدوال المثلثية لأي زاوية مهما كانت قيمتها وذلك بأستخدام المفاتيح.

$\boxed{\text{Sin}}$ وتعني جيب الزاوية والذي يرمز لها بالرمز (حا)

$\boxed{\text{Cos}}$ وتعني جيب تمام الزاوية والذي يرمز لها بالرمز (حتا)

$\boxed{\text{Tan}}$ وتعني ظل الزاوية والذي يرمز لها بالرمز (ظا)

$\boxed{\text{° ' ''}}$ ويستخدم لتحويل كسور الدرجة من دقائق وثواني إلى كسر من عشرة من الدرجة .

مثال[١] :

أوجد قيم الدوال المثلثية للزوايا الآتية :-

(أ) ٥٠° (ب) ١٧ ١٢٥° (حـ) ٤٢.٤°

الحل :-

(أ) لأيجاد حا٥٠° نضغط على المفاتيح التالية بالترتيب

$\boxed{\text{Sin}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ → يظهرعلى الشاشة → $\boxed{0.7660444}$

∴ حا٥٠° = ٠.٧٦٦٠

لأيجاد قتا ٥٠° بعد الخطوة الأخيرة نضغط على $\boxed{1/x}$

يظهر على الشاشة 1.30407289 ∴ قتا٥٠° = ١.٣٠٤٠

لأيجاد جتا ٥٠° نضغط علي المفاتيح التالية بالترتيب

$\boxed{\text{Cos}}$ $\boxed{5}$ $\boxed{0}$ $\boxed{=}$ → يظهرعلى الشاشة → $\boxed{0.64278760}$

لأيجاد قا ٥٠° بعد الخطوة الأخيرة نضغط على $\boxed{1/x}$

قا ٥٠° = ١.٥٥٥٧

لأيجاد طا ٥٠° نضغط على المفاتيح التالية بالترتيب

Tan | 5 | 0 | = → يظهر على الشاشة → 1.191753593

لأيجاد طتا ٥٠° بعد الخطوة الأخيرة نضغط على 1/x

طتا ٥٠°= ٠.٨٩٣

(ب) لأيجاد حا ١٧َ ١٢٥° نضغط على المفاتيح التالية بالترتيب

Sin | 1 | 2 | 5 | ‹‹‹ | 1 | 7 | ‹‹‹ | = | 0.8163056

لأيجاد قتا ١٧َ ١٢٥° بعد الخطوة الأخيرة نضغط على 1/x

قتا ١٧َ ١٢٥° = ١.٢٢٥٠

لأيجاد حتا ١٧َ ١٢٥° نضغط على المفاتيح التالية بالترتيب

Cos | 1 | 2 | 5 | ‹‹‹ | 1 | 7 | ‹‹‹ | = | - 0.577620

لأيجاد قا ١٧َ ١٢٥° بعد الخطوة الأخيرة نضغط على 1/x

قا ١٧َ ١٢٥° = 1.7312

(ج)لأيجاد الدوال المثلثية للزاوية ٢.٤ء

نحول الزاوية أولاً إلى التقدير الستيني ٢٠٤ء = ٢.٤ × ——— = ١٣٧.٥٠٩°

وبنفس الخطوات السابقة يمكن

وبنفس الخطوات السابقة يمكن إيجاد

حا ١٣٧.٥٠٩° = ٠.٦٧٥٥	قتا ١٣٧.٥٠٩° = ١.٤٨٠٥
حتا ١٣٧.٥٠٩° = ٠.٧٣٧٤	قا ١٣٧.٥٠٩° = ١.٣٥٦١
طا ١٣٧.٥٠٩° = ٠.٩١٦٠	طتا ١٣٧.٥٠٩° = ١.٠٩١٧

ملاحظة :

بعض الحاسبات بها مفتاح للتحويل من وحدة قياس الدرجات(الستيني) إلى القياس الدائري (راديان) .

والنظام الستيني Grd والنظام الدائري Rad وبالتالي يمكن إيجاد قيم الدوال المثلثية مباشرة دون تحويل نوع القياس إلى ستيني وذلك بمفتاح التحويل إلى الأنظمة المختلفة Mode

إيجاد قياس زاوية معلوم أحدي قيم الدوال المثلثية لها :

سنجد على حاسبة الجيب فوق المفاتيح

Sin | Cos | Tan مطبوعاً باللون الأحمر بالترتيب

Sin^{-1} ، Cos^{-1} ، Tan^{-1} وهذا يعني حا$^{-1}$ ، حتا$^{-1}$ ، طا$^{-1}$ والتي

تسمي بالدوال العكسية للدوال حا ، جتا ، طا علي الترتيب فمثلاً حا هـ = ٠.٥

فإن هـ = حا$^{-1}$ ٠.٥

ملحوظة هامة :-

إذا كان المطلوب إيجاد أي شئ مكتوب باللون الأحمر على الحاسبة لابد من الضغط على مفتاح Inv أو Shift حسب نوع الألة

مثال [١] :

إذا كان المطلوب طا س = ٢.٧٥٣١ فأوجد قياس $\hat{س}$ لأقرب دقيقة حيث $\hat{س}$ تقع في الربع الأول .

الحل :-

بعد تشغيل الألة الحاسبة أضغط على المفاتيح بالترتيب الآتي من اليسار

Inv | Tan | 2 | . | 7 | 5 | 3 | 1 | 7 → 70.0376143

→ Inv | ° ′ ″ = 70° 12′ 15″

∴ س = ١٥″ ٢′ ٧٠°

مثال [٢] :

حل المعادلة حا س = − ٠.٥٣٢١ ، ٠° < س < ٣٦٠°

الحل :-

حا س = − ٠.٥٣٢١ ، ٠° < س < ٣٦٠° س تقع في الربع الثالث أو الرابع

ونعلم أن حا (١٨٠° + هـ) = − جا هـ ، حا (٣٦٠° − هـ) = − جا هـ

نوجد الزاوية الحادة التي جيبها ٠.٥٣٢١

Inv | Sin | . | 5 | 3 | 2 | 1 → 32.1474

→ Inv | ° ′ ″ → 32° 8′ 51″

س = ٥١″ ٨′ ٢١٢°

أو س = ٩″ ٥١′ ٣٢٧°

تمارين [٣]

١) أوجدالدوال المثلثية الأساسية للزوايا الآتية مقرباً الجواب لأربع أرقام عشرية :

(أ) ٥٥° (ب) ١٥٤° ٣٢َ (ج) ٣.٥ ء

٢) حل المعادلات الآتية علماً بأن : ٠° < س < ٣٦٠°

(أ) طا س = ١.٣٩٨١

(ب) حتا س = − ٠.٦٢٣٩

(ج) قتا س = ١.٣٤٦١

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة في دائرة الوحدة :

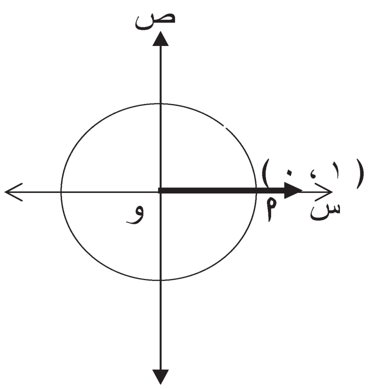
نعلم أن حا هـ = ص = الأحداثي الصادي

حتا هـ = س = الأحداثي السيني

طا هـ = ص ÷ س

ومن ثم سوف نوجد الدوال المثلثية للدوال الخاصة

الدول المثلثية للزاوية (صفر°):-



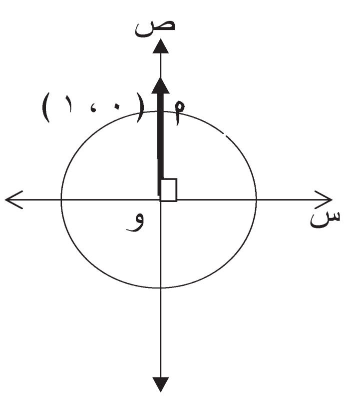
إحداثي أ = (١ ، ٠)

ص = حا ٠° = ٠

س = حتا ٠° = ١

$\frac{ص}{س}$ = طا ٠° = ٠

الدول المثلثية للزاوية (٩٠°):-



إحداثي أ = (٠ ، ١)

ص = حا ٩٠° = ١

س = حتا ٩٠° = ٠

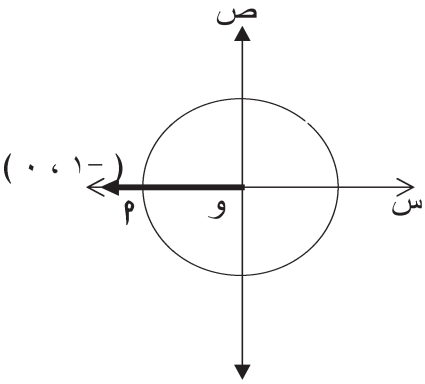
$\frac{ص}{س}$ = طا ٩٠° = $\frac{١}{٠}$ = "غير معرف "

الدول المثلثية للزاوية (١٨٠$^{\circ}$):-

إحداثي م = (– ١ ، ٠)

ص = حا ١٨٠$^{\circ}$ = ٠

س = حتا ١٨٠$^{\circ}$ = – ١



$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = طا ١٨٠$^{\circ}$ = ٠

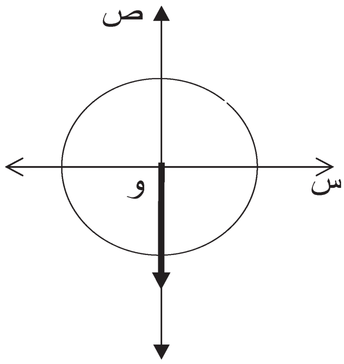
الدول المثلثية للزاوية (٢٧٠$^{\circ}$):-

إحداثي م = (٠ ، –١)

ص = حا ٢٧٠$^{\circ}$ = –١

س = حتا ٢٧٠$^{\circ}$ = ٠

= طا ٢٧٠$^{\circ}$ = $\frac{-١}{٠}$ = "غير معرف "

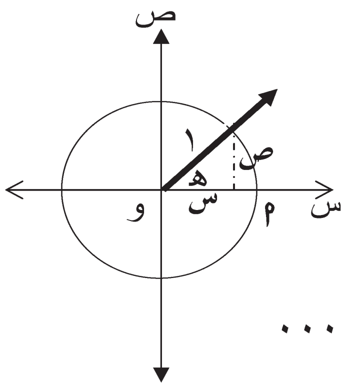


الدول المثلثية لبعض الزوايا الخاصة:-

- إذا كان قياس هـ = ٤٥$^{\circ}$ فإن س = ص

ومن نظرية فيثاغرث س^{٢} + ص^{٢} = ١

٢س^{٢} =١   س^{٢} = $\frac{١}{٢}$ س = ص = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$



∴ جا ٤٥$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠ ، جتا ٤٥$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠ طا ٤٥$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠

- إذا كان قياس هـــ = ٦٠$^{\circ}$ فإن س = $\frac{١}{٢}$

الضلع المقابل للزاوية ٣٠$^{\circ}$ في المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١   ⇐ ص = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا ٦٠$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠ ، جتا ٦٠$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠ طا ٦٠$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠

- إذا كان قياس هـ = ٣٠$^{\circ}$ فإن ص = $\frac{١}{٢}$

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١   ⇐ س = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جا ٣٠$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠ ، جتا ٣٠$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠ طا ٣٠$^{\circ}$ = ٠٠٠٠٠

ونلخص النتائج السابقة في الجدول الآتي :−

قياس الزاوية الدالة المثلثية	٣٠°	٤٥°	٦٠°
حا	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
جتا	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{٢}$
طا	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$	١	$\sqrt{٣}$

تمارين[٤]

- بدون أستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة :−

١) حا ٢٤٠° ٢) حتا ٣١٥° ٣) طا ٢١٠°

٤) إذا كان حا جـ = ٠.٥ فإوجد قياس زاوية جـ الموجبة إذا كانت أصغر من ٣٦٠°

٥) أوجد الزاوية الموجبة التي جيب تمامها = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٦) إذا كانت أ تقع بين ١٨٠°، ٢٧٠°، طا أ = ١ فأوجد قيمة حا أ ، قا أ

٧) إذا كانت حتا أ = ٠.٥ ، أ تقع بين ٢٧٠°، ٣٦٠° فأوجد قيمة حا أ ، طا أ

- أثبت أن " بدون أستخدام الألة الحاسبة "

٨) حتا ٦٠° = ٢ حتا^{٢} ٣٠° − ١

٩) جا ٩٠° = ٢ حا ٤٥° حتا٤٥°

١٠) حتا ٩٠° = حتا^{٢}٤٥° − حا^{٢} ٤٥°

- أوجد قيمة كل ممايأتي " بدون أستخدام الألة الحاسبة "

١١) حتا ٩٠° + ٢ حتا ١٨٠° + ٣ حتا ٢٧٠° − ٤ حتا (−٦٠°)

١٢) حتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا^{٢} ٤٥° حا ٣٠° − حتا ٢٣٠° حا ١٨٠°

١٣) حتا ٤٨٠° طا (−٥٨٥°) + قتا (−٦٧٥°) حتا ٩٤٥°

حل المثلث

المقصود بحل المثلث إيجاد المجهول من عناصر المثلث الستة وهى أطوال ثلاث أضلاع وقياسات ثلاث زوايا .

حل المثلث القائم :-

لحل المثلث القائم الزاوية لابد من معرفة :

١) طول ضلعين فيه .

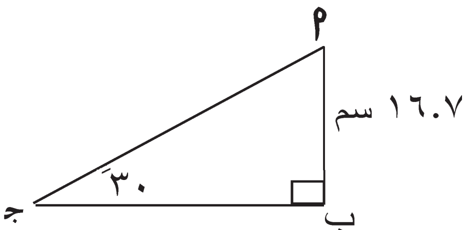
٢) طول ضلع وقياس احدى زاويتيه الحادتين .

مثال [١] :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب حل المثلث إذا كان أ ب = ١٦.٧ سم ،

ق(ج^) = ٣٠َ ٥٢°

الحل:-



ق(أ^) = ٩٠° − ٣٠َ ٥٢° = ٣٠َ ٣٧°

$\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$ = طا ٣٠َ ٣٧°

∴ ب ج = أ ب طا ٣٠َ ٣٧°

= ١٦.٧ × طا ٣٠َ ٣٧° = ١٢.٨١سم

$\frac{\text{أ ج}}{\text{أ ب}}$ = قتا ٣٠َ ٥٢°

أ ج = أ ب قتا ٣٠َ ٥٢°

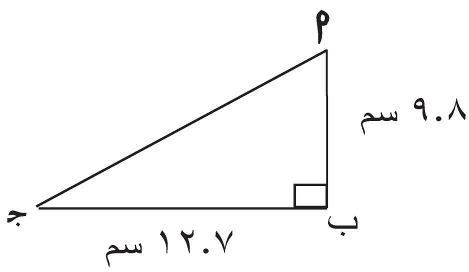
أ ج = ١٦.٧ × قتا ٣٠َ ٥٢° = ٢١.٠٥ سم (بأستخدام الألة الحاسبة)

مثال [٢] :

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب حل المثلث

إذا كانأ ب = ٩.٨ سم ، ب ج = ١٢.٧ سم

الحل:-



طا ج = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$ = $\frac{٩.٨}{١٢.٧}$

ق (ج^) = ٢١ً ٣٩َ ٣٧°

ق($\hat{أ}$) = ٩٠° − ٣٧° ٣٩َ ٢١ً = ٥٢° ٢٠َ ٣٩ً

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ = قا ٥٢° ٢٠َ ٣٩ً

أ جـ = أ ب × قا ٥٢° ٢٠َ ٣٩ً = ١٦.٠٤ سم

تمارين [٥]

١- حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في حـ إذا كان:-

أ) أ ب = ٥٠ سم ق($\hat{ب}$) = ٢٥° ٢٥َ

ب) ب جـ = ١٤ سم أ جـ = ١٣ سم

جـ) أ ب = ١٧ سم ق($\hat{ب}$) = ٧٠°

د) أ جـ = ٥.٤ سم ق($\hat{أ}$) = ٤٥°

٢- يستند سلم طوله ٣.٦ متراً بطرفه على حائط رأسي وطرفه الثاني علي أرض أفقية فإذا كان الطرف الموجود على الأرض يبعد عن الحائط ٢ متر أوجد زاوية ميل السلم على الأرض .

٣- مسمار قلاووظ زاوية ميله ٤° ١٢َ وارتفاع خطوته ٤.٩٨ مم أوجد نصف قطر دائرته وطول مسار السن .

٤- $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في دائرة مركزها و طول نصف قطرها ١٥ سم فإذا كان ق (أ $\hat{و}$ ب) = ١٥٠° فإحسب طول أ ب ، و م حيث م منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

٥ – أ ب حـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ حـ = ١٤.٨ سم

ق ∠ أ = ٦٤° ٣٢َ أوجد طول ب حـ لرقم عشري واحد .

٦ – قطعة أرض على شكل معين أ ب حـ د طول ضلعه ١٠ متر

ق ∠ أ ب حـ = ١٠٤° ١٦َ أوجد طولا قطريه $\overline{\text{أ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$

تطبيقات على حل المثلث

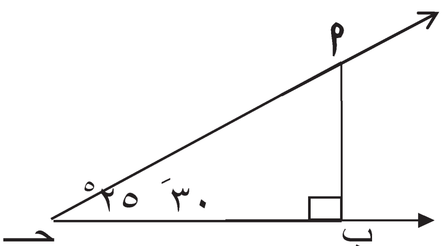
زوايا الإرتفاع والأنخفاض :

زاوية الأرتفاع أوالأنخفاض هي إتحاد الشعاع الأفقي من الراصد مع الشعاع البادئ من الراصد ماراً بالجسم المرصود.

مثال [١] :

من نقطة على بعد ٢٠ مترا من قاعدة سارية علم رصد شخص قمة السارية فوجد أن قياس زاوية أرتفاعها ٢٠َ ٢٥° أحسب أرتفاع قمة سارية العلم.

الحل:-



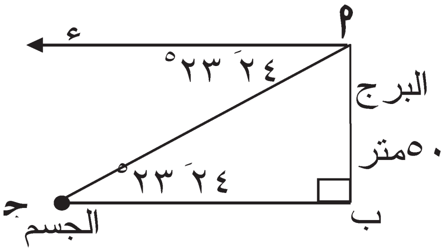
$$\frac{\text{أ ب}}{٢٠} = \text{طا } ٢٠َ \ ٢٥°$$

∴ أ ب = ٢٠ طا ٢٠َ ٢٥° = ٩.٤٧ متر

مثال [٢] :

من قمة برج أرتفاعه ٥٠ متراً وجد أن قياس زاوية إنخفاض جسم واقع في المستوي الأفقي المار بقاعدة البرج تساوي ٢٤َ ٢٣° أوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل:-



بفرض أن أ ب يمثل أرتفاع البرج

∴ ∠ ء أ جـ هي زاوية انخفاض الجسم

∴ ق (جـ) = ق (∠ ء أ جـ)= ٢٤َ ٢٣°

لأن $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ طتا ٢٤َ ٢٣° = $\frac{\text{جـ ب}}{٥٠}$

حـ ب = ٥٠× طتا ٢٤َ ٢٣° = ١١٦ متر تقريباً

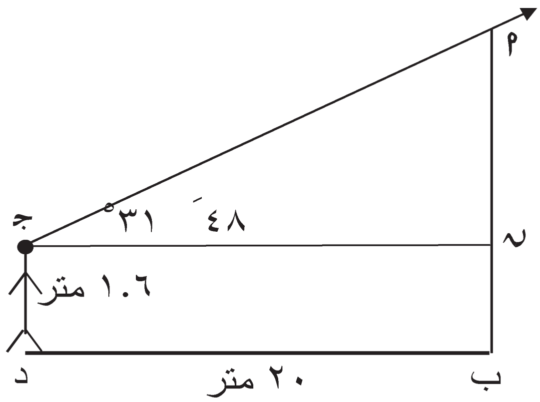
مثال [٣] :

شخص طوله ١٦٠ سم ويقف علي سطح الأرض وعلي بعد ٢٠ متر من شجرة رأسية وجد أن قياس زاوية أرتفاع أعلى نقطة في الشجرة تساوي ٤٨َ ٣١°

فما أرتفاع الشجرة ؟

الحل:-

نفرض أن أب يمثل أرتفاع الشجرة



نرسم جـ ن // د ب حيث ن ∈ أب

طا ٤٨َ ٣١° = $\frac{\text{أ ن}}{٢٠}$

∴ أ ن = ٢٠× طا ٤٨َ ٣١° = ٨.٠٨ متر

∵ طول اب = ا ن + ن ب .

حيث ن ب = جـ د = ١.٦ متر

∴ اب (طول الشجرة) = ٨.٠٨ + ١.٦ = ٩.٦٨ متر

تمارين [٦]

١) شاهد رجل أن زاوية أرتفاع قمة برج ٢١َ ٣٩° فإذا كان الرجل يبعد عن قاعدة البرج ٥٠ متراً فما أرتفاع البرج ؟

٢) أوجد قياس زاوية أرتفاع الشمس عندما يكون ظل سارية علم طولها ٣.٥ متر هو ٢ متر .

٣) من قمة برج أرتفاعه ٢٢٠ مترًا مقام علي شاطئ بحر رصدت سفينة فكانت زاوية إنخفاضها ٢١َ ٢٦° أوجد بعد السفينة عن قاعدة البرج لأقرب متر

٤) من نقطة علي سطح الأرض تبعد ٢٠ متراً عن قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية ارتفاع المنزل هي ٤٣َ ٢٧° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر.

٥) من قمة برج ارتفاعه ١٦٠ متراً وجد أن قياس زاوية انخفاض نقطة في المستوي الأفقي المار بقاعدة البرج هي ٣٥° أوجد بعد هذا الجسم عن كل من قاعدة البرج وقمته لأقرب متر.

٦) رصد شخص من مكانه علي بعد ٥٠ مترا من قاعدة ساري تليفزيون زاوية أرتفاع قمة الساري فوجدها ٥٢°. أوجد أرتفاع الساري عن المستوي الأفقي المار بقاعدة الساري .

٧) شخص طوله ١.٦٥ مترًا يقف علي بعد ٧ أمتار أمام تمثال ارتفاعه ٤ أمتار فوق مستوي سطح الأرض ، أحسب قياس الزاوية التي يرصد بها المسافة بين قاعدة التمثال وقمته .

الوحدة الرابعة

أهداف الوحدة

المضلعات

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يدرك معنى المضلع وأنواعه .
- إيجاد عدد أقطار وقياسات زوايا أي مضلع .
- يدرك الفرق بين دائرة داخل مضلع ومضلع داخل دائرة .

دروس الوحدة :

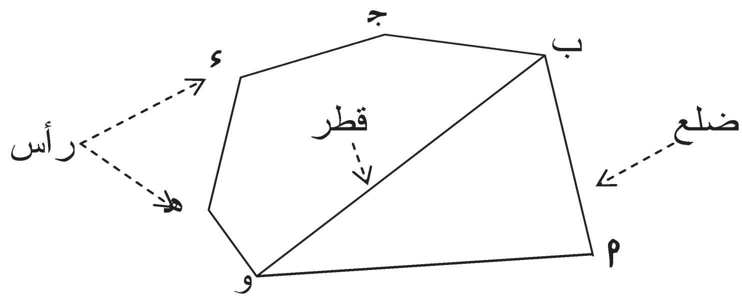
- المضلعات وأنواعها .
- الدائرة .
- الدائرة الداخلة لمضلع .
- المضلع الداخل للدائرة .

الهندسة
المضلعات

كثيراً من الأشياء الطبيعية والمصنوعة بيد الإنسان على أشكال مضلعات أمثلة لذلك : البلاط العادي والسيراميك والأقلام وصواني الفرن و المباني و نوافذها.

وكما ذكر من قبل في المرحلة الإعدادية فإن المضلع هو خط منكسر مغلق في المستوى.

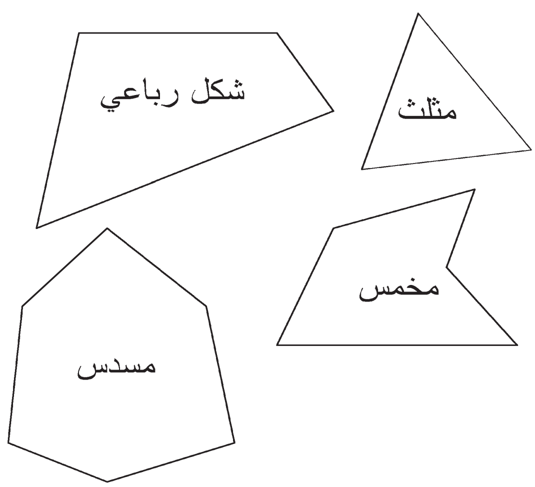
تسمي القطع المستقيمة أضلاع المضلع وتسمي نقط نهايات القطع المستقيمة رؤوس المضلع ونقطتي نهايتي نفس ضلع المضلع تسميان رأسين متجاورين للمضلع وقطر المضلع هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متجاورين من رؤوسه.



م ب جـ ء هـ و مضلع رؤوسة النقط : م ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و

وأضلاعه القطع المستقيمة : $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{و م}}$

وأقطاره القطع المستقيمة : $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ ،......أكتب بقية الاقطارماهي رؤوس المضلع المتجاورة ؟



ومن أنواع المضلعات :-

المثلث : هو مضلع له ثلاثة أضلاع

الشكل الرباعي : هو مضلع له أربعة أضلاع

المخمس : هو مضلع له خمسة أضلاع

المسدس : هو مضلع له ستة أضلاع

.... : ....

.... : ....

وبصفة عامة : المضلع النوني هو مضلع له ن من الأضلاع.

ويكون المضلع الذي له أكثر من ثلاثة أضلاع محدباً أو مقعراً.

تعاريف :

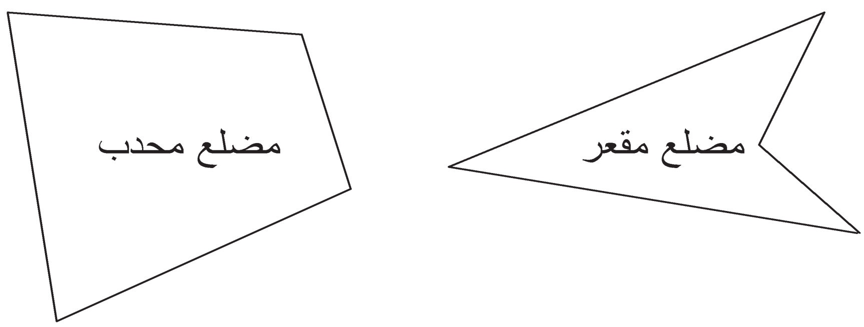
– المضلع المحدب : مضلع كل زاوية من زواياه قياسها أقل من ١٨٠°

– المضلع المقعر : مضلع أحدي زواياه قياسها علي الأقل يكون أكبر من ١٨٠°

– المضلع المتساوي الأضلاع : مضلع كل أضلاعه متساوية الطول .

– المضلع المتساوي الزوايا : مضلع كل زواياه متساوية القياس .

– المضلع المنتظم: مضلع متساوي الأضلاع ومتساوي الزوايا ، والأشكال الرباعية التالية توضح هذه الأنواع من المضلعات .



مضلع متساوي الزوايا   مضلع منتظم

تمارين شفهية:

١–ماعدد رؤوس كل مضلع من المضلعات التالية:

مضلع عشاري ، مضلع أثنى عشر ، مخمس ، مضلع نوني

٢–كم عدد الأقطارالتي يمكن رسمها من رأس واحدة من رؤوس كل مضلع من المضلعات التالية ؟ كم عدد المثلثات الناتجة في كل حالة ؟

مخمس ، مثلث ، شكل رباعي ، مضلع نوني

٣–كم عدد أضلاع المضلع الذي عدد أقطاره المرسومة من رأس واحدة هو

٦ ، ٢٤ ، ١٠ ، ١ ، ن

تمارين [١]

(١) أرسم المضلعات التالية :

أ – مخمس محدب   ب – مسدس مقعر

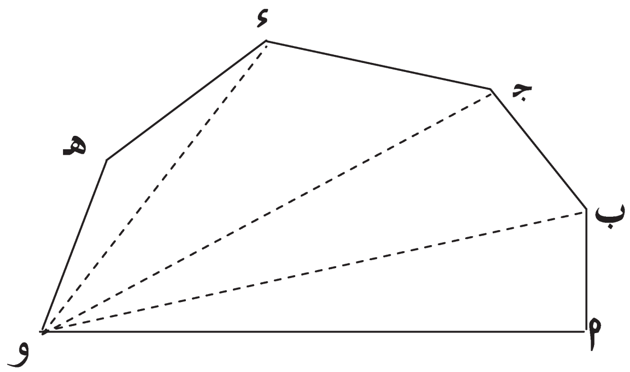
جـ – مثمن متساوي الأضلاع   د – مثلث منتظم

هـ – مثمن محدب   ح – معشر منتظم

(٢) أوجد قياس كل زاوية من زواياالشكل الرباعي المنتظم

(٣) ما هو مجموع قياس زوايا المسدس ؟

أقطار المضلع النوني المرسومة من رأس من رؤوسه تقسمه إلى (ن – ٢) من المثلثات



مثلاً :

إذا كان الشكل سداسي يكون عدد الأضلاع ٦

∴ عدد الأقطار المرسومة من الرأس و = ٣ أقطار

∴ عدد المثلثات المرسومة من الرأس و = ٤ مثلثات

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع النوني يساوي (ن – ٢) × ١٨٠°

قياس كل زاوية داخلة من زوايا مضلع نوني منتظم يساوي $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن}$

مثال [١] :

ماهو مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه

٣ أضلاع ، ٤ أضلاع ، ٨ أضلاع ، ٣٥ ضلع

الحل :

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ٣ أضلاع (مثلث)

$= (٣ - ٢) \times ١٨٠° = ١٨٠°$

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ٤ أضلاع (شكل رباعي)

$= (٤ - ٢) \times ١٨٠° = ٣٦٠°$

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ٨ أضلاع (مثمن)

$= (٨ - ٢) \times ١٨٠° = ١٠٨٠°$

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ٣٥ ضلع

$= (٣٥ - ٢) \times ١٨٠° = ٥٩٤٠°$

مثال [٢] :

ما هو قياس كل زاوية من زوايا المضلعات في المثال السابق إذا كانت المضلعات منتظمة .

الحل :

قياس كل زاوية من زوايا المثلث المنتظم (متساوي الأضلاع) = $\frac{١٨٠°}{٣} = ٦٠°$

قياس كل زاوية من زوايا الشكل الرباعي المنتظم (المربع) = $\frac{٣٦٠°}{٤} = ٩٠°$

قياس كل زاوية من زوايا الشكل المثمن المنتظم = $\frac{١٠٨٠°}{٨} = ١٣٥°$

قياس كل زاوية من زوايا الشكل ٣٥ ضلع المنتظم = $\frac{٥٩٤٠°}{٣٥} = ١٦٩° \; ٥١' \; ٢٤''$

مثال [٣] :

كم عدد أضلاع مضلع مجموع قياس زواياه ٥٤٠° ؟

الحل :

$٥٤٠° = (ن - ٢) \times ١٨٠°$

$\therefore ٣ = ن - ٢$

$\therefore ن = ٥$

تمارين [٢]

١) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه :

٧ أضلاع ، ١٠ أضلاع ، ١٥ ضلع ، ٢٥ ضلع

٢) أوجد عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه :

900° ، 720° ، 1080° ، 3240°

٣) ما هوقياس كل زاوية من زوايا المضلعات المنتظمة التالية :

الخماسي ، السداسي ، العشاري

٤) ما هوعدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى زواياه 140° ؟

٥) شكل سداسي قياسات ثلاث زوايا من زواياه 60° ، 100° ، 120° ، أوجد قياس كل زاوية من زوايا الثلاث الأخرى إذا كانت النسب بين قياساتها ٢ : ٣ : ٥

٦) ﺃ ب ﺟ د شكل رباعي النسب بين قياسات زواياه ﺃ ، ب ، ﺟ ، د هي على الترتيب ١ : ٢ : ٣ : ٤

(ﺃ) اوجد قياس كل زاوية من زواياه.

(ب) **لماذا يكون** $\overline{\text{د ﺟ}} \parallel \overline{\text{ﺃ ب}}$ ؟

٧) شكل سداسي قياسات زوايـاه 60° ، 70° ، 110° ، س° ، ٢س° ، ٣س° ، أوجد قيمة س° .

٨) مد كل ضلع من أضلاع شكل خماسي منتظم على استقامتة من كلتا طرفيه لينشأ عن ذلك نجمة أثبت أن مجموع قياسات زوايا هذه النجمة يساوي 180° .

٩) كم عدد أضلاع مضلع مجموع قياسات زواياه الداخلة يساوي ثلاثة أمثال مجموع قياسات زوايا شكل سداسي ؟

١٠) ارسم الشكل ﺃ ب ﺟ د الذي فيه ق (∠ ﺃ) = 150° ، ق (∠ ب) = 90° ، ق (∠ ﺟ) = 90° ، ﺃ ب = ٣ سم ، ب ﺟ = ٢ سم .

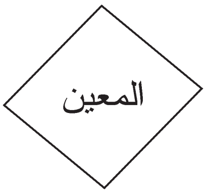
هناك عدد من الأشكال الرباعية التي سبق دراستها مثل:

شبه المنحرف:

هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط .

شبه المنحرف المتساوي الساقين وهو شبه منحرف فيه الضلعان غير المتوازيان متساويان في الطول.

متوازي الأضلاع:



هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .

المعين:

وهو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متساوية في الطول.

المستطيل:

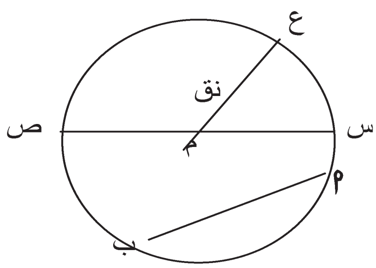
هو متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة.

المربع:

هو مستطيل جميع أضلاعه متساوية في الطول.

الدائرة

تعتبر الدائرة من أكثر المنحنيات التي تمربنا في حياتنا اليومية . فهي لا تظهر فقط في الطبيعة ولكن من النادر أن نجد قطعة من ألة لا تحتوي على جزء دائري بصورة ما .



الدائرة :

هي مجموعة نقط المستوى التي بعد كل منها عن نقطة ثابتة في المستوى يساوي مقداراً ثابتاً .

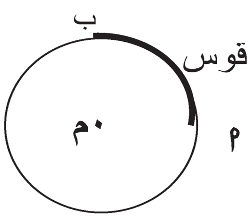
النقطة الثابتة تسمى **مركز الدائرة** ويرمز لها بالرمز(م)

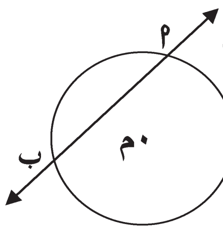
المقدارالثابت يسمى طول **نصف قطر الدائرة** (نق) وهو القطعة المستقيمة التي تصل بين مركز الدائرة وأي نقطة من نقاط الدائرة.

وتر الدائرة :هو القطعة المستقيمة التي تصل بين أي نقطتين من نقاط الدائرة

قطر الدائرة: هو وتر في الدائرة يمر بمركزها

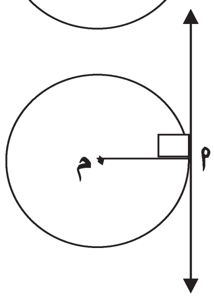
قوس الدائرة: هو جزء منها يتكون من نقطتي نهاية على الدائرة





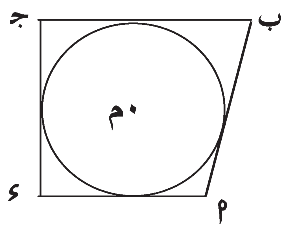
وجميع نقط الدائرة الواقعة بينهما ويسمي القوس بنقطتي نهايته كالقوس أ ب (ويكتب $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) .

قاطع الدائرة : هو الخط المستقيم الذي يقطع الدائرة في نقطتين



المماس : هو المستقيم المشترك مع الدائرة في نقطة واحدة ويكون عمودياً على نصف قطر الدائرة المشترك معها في تلك النقطة وتسمى **نقطة التماس** .

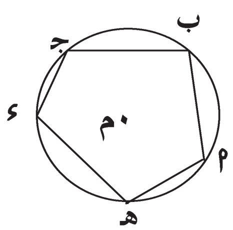
الدائرة الداخلة لمضلع :



هي الدائرة التي تقع داخل المضلع وتكون أضلاعه مماسات للدائرة الواقعة داخله.

المضلع الداخل للدائرة :

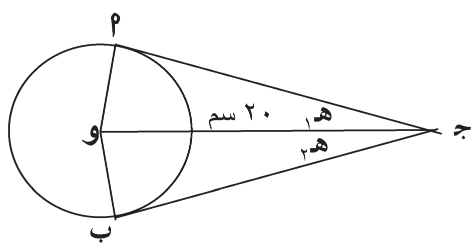
هو المضلع الذي جميع رؤوسه نقاط في الدائرة (ويسمي مضلع داخل دائرة) أو (دائرة خارج مضلع)



مثـال [١] :

من نقطة تبعد ٢٠ سم من مركزالدائرة رسم مماسين للدائرة إذا كان قياس الزاوية بين المماسين ٦٠°، فأوجد طول نصف قطر الدائرة وطول المماس .

الحـل :



ق ($\angle$ هـ$_1$) = ق ($\angle$ هـ$_2$) = ٣٠°

ق ($\angle$ و أ ج) = ٩٠°

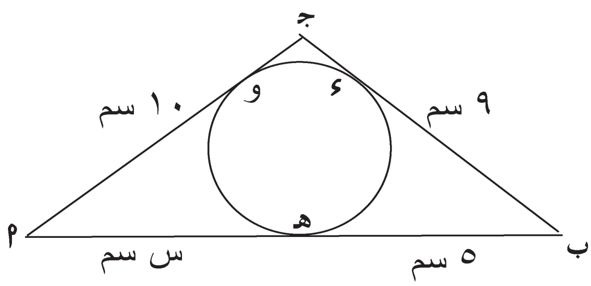
$\therefore$ و أ = و ج حا هـ = ٢٠ حا ٣٠°

= ٢٠ × $\frac{1}{2}$ = ١٠ سم

أ ج = و ج حتا هـ = ٢٠ حتا ٣٠°

= ٢٠ × $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = ١٠ $\sqrt{3}$

مثـال [٢] :



في الشكل المقابل رسمت الدائرة داخل المثلث أوجد قيمة س .

الحـل :

∵ ب هـ = ٥ سم ∴ ب ء = ٥ سم

∵ ب جـ = ٩ سم ∴ ء جـ = ٤ سم ∵ ء جـ = جـ و ∴ جـ و = ٤ سم

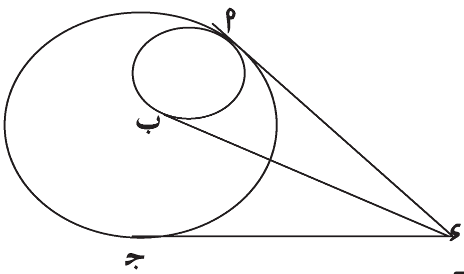
∵ جـ ٢ = ١٠ سم ∴ و ٢ = ٦ سم ∵ و ٢ = ٢ هـ ∴ ٢ هـ = ٦ سم

∴ ٢ هـ = س = ٦ سم

مثـال [٣] :

إذا تماست دائرتان من الداخل **فأثبت** أن المماسات المرسومة لهما من أي نقطة على المماس المشترك لهما تكون متساوية في الطول .

الحـل :



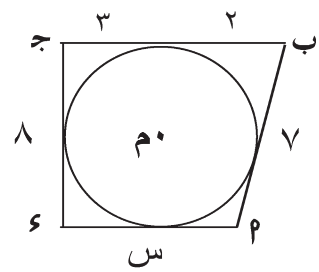
نفرض أن ٢ ء هو المماس المشترك للدائرتين

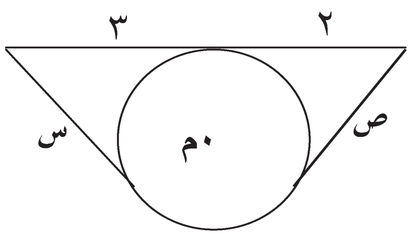
∴ ٢ ء = ب ء ، ٢ ء = جـ ء لماذا ؟

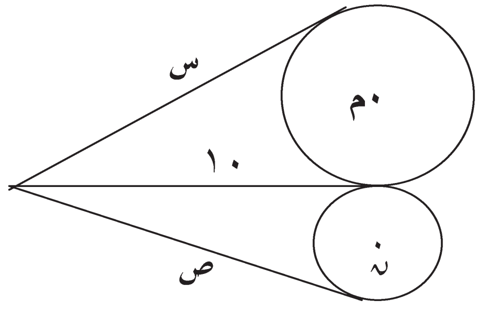
∴ ٢ ء = جـ ء لماذا ؟

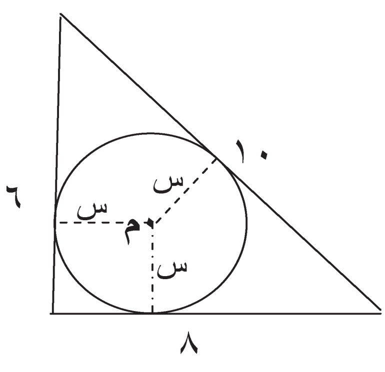
تمرين [٣]

في كل من الأشكال الآتية أوجد قيم س ، ص المجهولة :









الوحدة الخامسة

أهداف الوحدة

المساحات

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادراً على أن :

- يتذكر الطالب قوانين مساحات الأشكال الهندسية .
- يوجد مساحة الأشكال الهندسية المختلفة .
- يعرف الفرق بين الدائرة والقطع الناقص .
- يدرك كيفية إيجاد مساحة القطع الناقص .
- يعرف مفهوم مغير البعد .
- يتذكر التشابهة وعلاقة مساحات المضلعات المتشابهة .

دروس الوحدة :

- مساحة سطح المثلث .
- مساحة القطع الناقص .
- مغير البعد .
- التشابه .

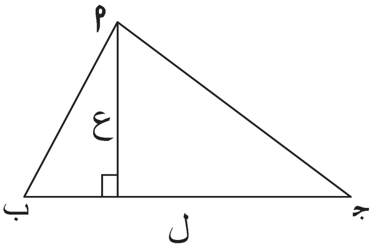
المساحات

حساب المساحات من الأشياء الهامة في حياتنا اليومية فهو مصطلح كثيرالأستخدام فمثلاً عند شراء سجادة يلزم معرفة مساحة الحجرة أولاً وأبعادها لشراء السـجادة المطلوب فرشهاولكي نعرف هذه المساحة يلزم معرفة شكل الحجرة وأبعادها وذلك لشراء السجادة المناسبة وأيضاً من حيث التكلفة .

ومفهوم المساحة هو عدد وحدات المساحة التي يحويها هذا السطح ووحدة المساحة هي مساحة سطح مربع طول ضلعه وحدة الأطوال وقد سبق لك دراسة موضوع المساحات في المرحلة الابتدائية والإعدادية من التعليم الأساسي لذا سنقوم بعرض موجز لبعض التعاريف والمفاهيم التي تلزم لك في هذه المرحلة .

أولاً : مساحة سطح المثلث

سبق أن درسنا أن مساحة سطح المثلث



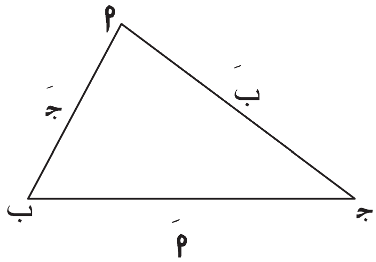
مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × طول الأرتفاع

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ × ل × ع

حيث ل طول قاعدة المثلث ، ع طول أرتفاع المثلث

و بأستخدام حساب المثلثات

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما



أي أن مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ أَ بَ حا جـ

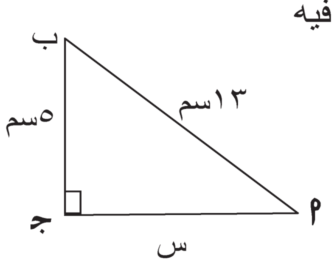
= $\frac{1}{2}$ أَ جَـ حا ب

= $\frac{1}{2}$ جَـ بَ حا أ

مثال :

أوجد مساحة سطح المثلث القائم الزاوية أ ب جـ الذي فيه

أ ب = ١٣ سم ، ب جـ = ٥ سم ، ق (∠ جـ) = ٩٠°



الحل :

نأخذ $\overline{\text{أ ج}}$ على أنها قاعدة المثلث حيث أن $\overline{\text{ج ب}} \perp \overline{\text{ج أ}}$

فإن ج ب هو أرتفاع المثلث ، نفرض أن أ ج = س

∴ ١٦٩ = ١٢٥ + س^{٢} ∴ س = ١٢ سم

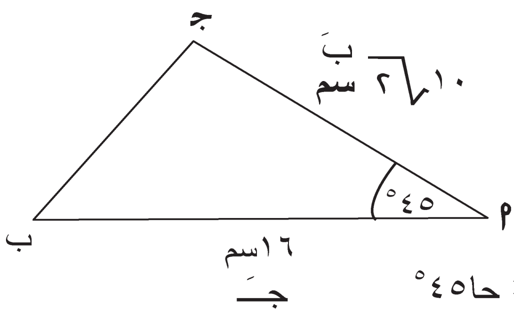
مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم^{٢}

مثال :

أوجد مساحة سطح المثلث أ ب ج الذى فيه

ق (∠أ) = ٤٥° ، أ ج = ١٠ $\sqrt{٢}$ سم

، أ ب = ١٦ سم



الحل :

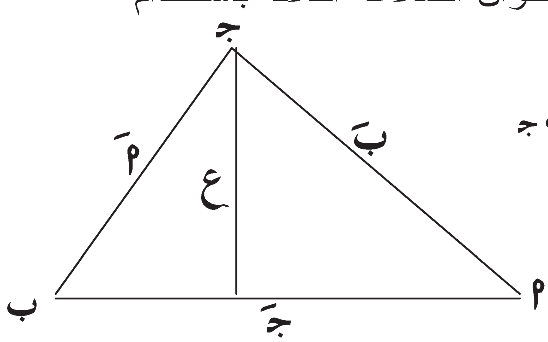
مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ جَـ بَ حا أ

مساحة سطح △ أ ب ج = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٠ $\sqrt{٢}$ × حا٤٥°

= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٠ $\sqrt{٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

= ٨٠ سم^{٢}

ويمكن إيجاد مساحة سطح أي مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة بأستخدام القاعدة التالية .



إذا كانت أَ، بَ، جَ ، أطوال أضلاع △ أ ب ج

إذا كانت أَ + بَ + جَ = ٢ح

∵ ح نصف محيط المثلث

ح = $\frac{١}{٢}$ (أَ + بَ + جَ)

م = $\sqrt{\text{ح (ح − أَ)(ح − بَ)(ح − جَ)}}$

مثال :

أوجد مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه ٥ ، ١٢ ، ١٣ من السنتيمترات

الحل :

بوضع $\bar{أ}$ = ٥ سم ، $\bar{ب}$ = ١٢ سم ، $\bar{جـ}$ = ١٣ سم

فإن ح = $\frac{١}{٢}$ (٥ + ١٢ + ١٣) = ١٥ سم

∴ ح – $\bar{أ}$ = ١٥ – ٥ = ١٠

ح – $\bar{ب}$ = ١٥ – ١٢ = ٣

ح – $\bar{جـ}$ = ١٥ – ١٣ = ٢ ومن ثم

م = $\sqrt{٢ \times ٣ \times ١٠ \times ١٥}$ = ٣٠ سم^{٢}

مثال :

أوجد أرتفاع المثلث الذي أطوال أضلاعه ١٣ ، ١٤ ، ١٥ سم بالنسبة للضلع الذي طوله ١٤ سم .

الحل :

إذا كان أرتفاع المثلث أ ب جـ بالنسبة للضلع الذي طوله $\bar{ب}$

فإن م = $\frac{١}{٢}$ ع $\bar{ب}$ = $\sqrt{ح (ح - \bar{أ})(ح - \bar{ب})(ح - \bar{جـ})}$

∴ ع = $\frac{٢}{\bar{ب}}$ $\sqrt{ح (ح - \bar{أ})(ح - \bar{ب})(ح - \bar{جـ})}$

فإن ح = $\frac{١}{٢}$ (١٣ + ١٤ + ١٥) = ٢١ سم

∴ ح – $\bar{أ}$ = ٢١ – ١٣ = ٨

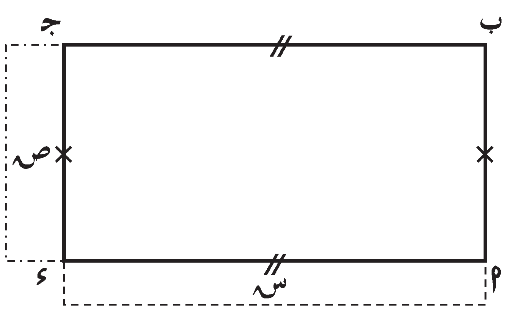
ح – $\bar{ب}$ = ٢١ – ١٤ = ٧

ح – $\bar{جـ}$ = ٢١ – ١٥ = ٦ ومن ثم

ع = $\frac{٢}{١٤}$ $\sqrt{٨ \times ٧ \times ٦ \times ٢١}$

= $\frac{١}{٧}$ × ٨٤ = ١٢ سم

ثانياً: مساحة سطح المستطيل



إذا كان أ ب جـ ء مستطيلاً بعداه هما أ ب ، أ ء فإن

مساحة سطح المستطيل = حاصل ضرب بعديه

فإذا كان الطول = أ ب = س ،

العرض = أ ء = ص

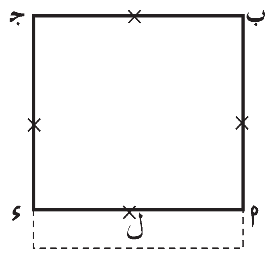
فإن مساحة سطح المستطيل

م = أ ب × أ ء = س ص

، محيط المستطيل = ٢ (أ ب + أ ء)

= ٢ (س + ص)

ثالثاً: مساحة سطح المربع



إذا كان أ ب جـ ء مربع طول ضلعه = ل

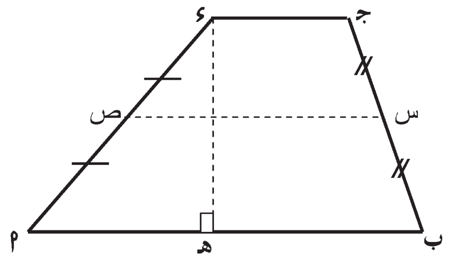
فإن مساحة سطح المربع

م = ل × ل = ل^{٢}

، محيط المربع = ٤ ل

= طول الضلع × ٤

رابعاً: مساحة سطح شبه المنحرف



إذا كان أ ب جـ ء شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ و أرتفاعه $\overline{\text{ء هـ}}$

فإن مساحة سطح شبه المنحرف

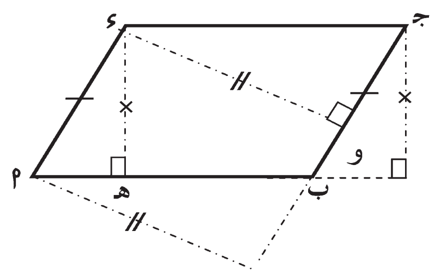
م = $\frac{١}{٢}$ (أ ب + جـ ء) . ء هـ

وإذا كان س ،ص منتصفي $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ على الترتيب فإن $\overline{\text{س ص}}$ تسمى بالقاعدة المتوسطة ويكون س ص = $\frac{\text{أ ب + جـ ء}}{٢}$

وتصبح مساحة سطح شبه المنحرف

م = س ص . ء هـ = طول القاعدة المتوسطة × الأرتفاع

خامساً: مساحة سطح متوازي الأضلاع



إذا كان أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه :

$\overline{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء و}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$

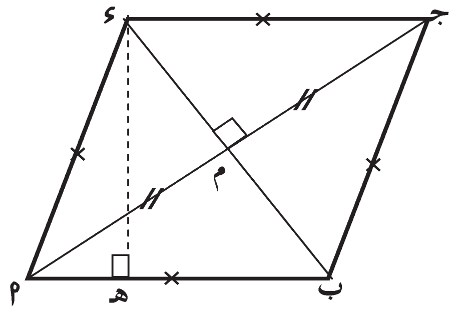
فإن مساحة سطح متوازي الأضلاع

م = ﻫ ب . ءهـ = ب جـ . ء و

= القاعدة × الأرتفاع

سادساً: مساحة سطح المعين

إذا كان ﻫ ب جـ ء معين ، $\overline{ءهـ} \perp \overline{ﻫ ب}$ ،



ﻫ ب = ب جـ = جـ ء = ء ﻫ

القطر $\overline{ﻫ جـ} \perp$ القطر $\overline{ب ء}$

، $\overline{ءهـ} \perp \overline{ﻫ ب}$

فإن مساحة سطح المعين :

م = ﻫ ب . ءهـ

= طول أحد الأضلاع × طول أرتفاع المعين

= $\frac{1}{2}$ (ﻫ جـ . ب ء)

= نصف حاصل ضرب قطريه

مثال[١] :

لوحان من الخشب الأبلكاش أحدهما على شكل مستطيل بعداه ١٢٠سم ، ١٨٠ سم ، والآخر على شكل مربع . فإذا كان محيطيهما متساويين فأوجد مساحة سطــح كل منهما .

الحـل :

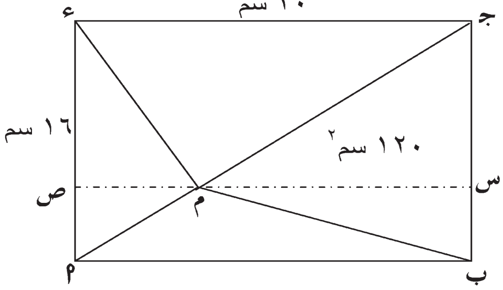
مساحة سطح المستطيل = ١٢٠ × ١٨٠ = ٢١٦٠٠ سم^2

محيط المربع = محيط المستطيل = ٢(١٨٠×١٢٠) = ٦٠٠ سم

∴ طول ضلع المربع = $\frac{\text{المحيط}}{٤}$ = $\frac{٦٠٠}{٤}$ = **١٥٠ سم**

∴ مساحة سطح المربع = ١٥٠ × ١٥٠ = ٢٢٥٠٠ سم^2

مثال[٢] :



ﻫ ب جـ ء صفيحة من الألمونيوم مستطيلة الشكل

بعداها ﻫ ب= ٢٠ سم ، ﻫء = ١٦ سم أخذت نقطة م

داخلها وقطع منها المثلثان م ب جـ ، م أ ء فإذا

كانت مساحة سطح المثلث م ب جـ = ١٢٠ سم^{٢}

فأوجد طول $\overline{\text{م س}}$ ، ثم احسب مساحة سطح المثلث م أ ء وكذا مساحة سطح الجزء الباقي .

الحل :

∵ مساحة سطح △ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ . م س

١٢٠ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × م س

∴ م س = $\frac{١٢٠}{٨}$ = ١٥ سم

بالتالي يكون م ص = ٢٠ – ١٥ = ٥ سم

∴ مساحة سطح △ م أ ء = $\frac{١}{٢}$ أ ء . م ص

= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٥ = ٤٠ سم^{٢}

∴ مساحة المستطيل = أ ب . أ ء

= ٢٠ × ١٦ = ٣٢٠ سم^{٢}

∴ مساحة الجزء الباقي = ٣٢٠ – (١٢٠ + ٤٠) = ١٦٠سم^{٢}

مثال[٣] :

أ ء هـ و شبة منحرف فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{و هـ}}$

و هـ < أ ء ، $\overline{\text{هـ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ ، هـ ء = ١٦ سم

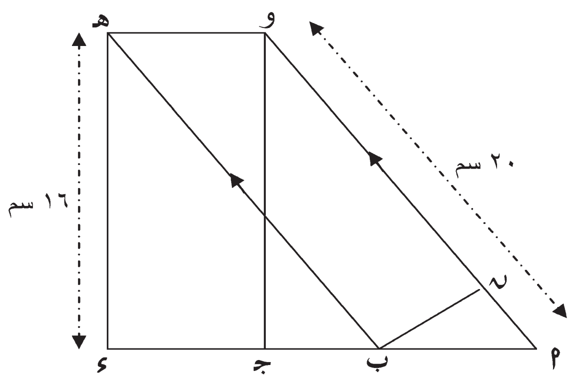
$\overline{\text{و جـ}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$ ، $\overline{\text{هـ ب}}$ // $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{ب ن}}$ ⊥ $\overline{\text{أ و}}$

فإذا كان أ و = ٢٠ سم ، جـ ء = ٨ سم فإحسب

(١) مساحة سطح الشكل أ ب هـ و

(٢) طول $\overline{\text{ب ن}}$

(٣) مساحة سطح شبه المنحرف أ ء هـ و



الحل :

∵ الشكل أ ب هـ و متوازي أضلاع

∴ مساحة سطح أ ب هـ و = أ ب . هـ ء ($\overline{\text{أ ب}}$ قاعدة ، $\overline{\text{هـ ء}}$ إرتفاع)

∵ ٢ ب = و هـ = جـ ء = ٨ سم

∴ م (المستطيل جـ ءهـ و) = ٨ × ١٦ = ١٢٨ سم^{٢}

أيضاً م (متوازي الأضلاع ٢ ب هـ و) = ٢و . ب ن ($\overline{٢و}$ قاعدة ، $\overline{ب ن}$ أرتفاع)

∴ ١٢٨ = ٢٠ × ب ن ومنها ب ن = ٦.٤ سم

∵ ∆ ٢ جـ و قائم الزاوية في جـ

∴ (٢ جـ)^{٢} = (٢ و)^{٢} − (جـ و)^{٢}

= (٢٠)^{٢} − (١٦)^{٢} = ٤٠٠ − ٢٥٦ = ١٤٤

∴ ٢ جـ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

ويكون ٢ ء = ٢ جـ + جـ ء = ١٢ + ٨ = ٢٠ سم

∵ الشكل ٢ء هـ و شبه منحرف

∴ طول قاعدته المتوسطة = $\frac{٢ء + هـ و}{٢}$ = $\frac{٢٠ + ٨}{٢}$ = ١٤ سم

∴ م (شبه منحرف ٢ء هـ و) = ١٤ × ١٦ = ٢٢٤ سم^{٢}

تمرين[١]

أوجد مساحة سطح المثلث ٨ ب ﺟ الذي فيه :

(١) ٨ ب = ١٢ سم ، ٨ ﺟ = ٦ سم ، ق∠ ٨ = ٣٠°

(٢) ٨ ب = ١٠ سم ، ٨ ﺟ = ٨ سم ، ب ﺟ = ١٠ سم

(٣) ٨ ب = ١٢ سم ، ب ﺟ = ١٤ سم ، ق∠ ٨ = ٦٠°

(٤) ٨ ب = ١٠سم ، ٨ ﺟ = ١٣ سم ، ب ﺟ = ١٣ سم

(٥) ﺟ ب = ٤ سم ، ٨ ﺟ = ٢٠ سم ، ق∠ ب = ١٥٠°

(٦) ٨ ب = ٣ سم ، ٨ ﺟ = ٤ سم ، ب ﺟ = ٥ سم

(٧) يراد تبليط أرض حمام مستطيلة الشكل عرضها $\frac{٣}{٤}$ طولها ببلاط سيراميك مربع الشكل محيط البلاطة ١٢٠ سم فإذا كان محيط أرض الحمام ١٤ مترا فأوجد عدد البلاطات من السيراميك المستخدمة.

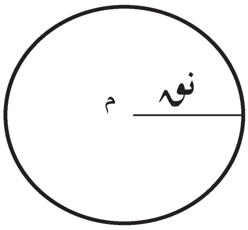
(٨) أرض حجرة علي شكل شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين ٤ م ، ٥ م وضع في وسطها سجادة مستديرة الشكل طول نصف قطرها = ١.٤ م فكانت مساحة سطح الجزء غير المغطي تساوي ١١.٨٤ م^{٢} أحسب ارتفاع شبه المنحرف

(٩) قطعة ارض مربعة الشكل ، شيد علي جزء منها منزل قاعدته علي شكل مستطيل بعداه ١٥ ، ٢٠ مترا ، وعمل حمام سباحة دائري الشكل طول نصف قطره ٧ أمتار ، وزرعت المساحة الباقية حديقة . فإذا كانت مساحة الحديقة تساوي ١١٤٦ مترا مربعاً فأحسب طول ضلع قطعة الأرض .

(١٠) ٨ ب ﺟ ء صفيحة على شكل مثلث أطوال أضلاعه $\overline{٨ب}$ ، $\overline{بﺟ}$ ، $\overline{ﺟ٨}$ هي ١٦سم ، ٢٠ سم ، ٢٤ سم على الترتيب . أوجد مساحة سطح الصفيحة ثم طول العمود النازل من ٨ علي الضلع $\overline{بﺟ}$.

(١١) ٨ ب ﺟ ء شبه منحرف فيه $\overline{٨ء} \parallel \overline{بﺟ}$ ، $\overline{٨ب} \perp \overline{بﺟ}$ فإذا كان ٨ ب = ٨ سم ب ﺟ = ١٥ سم ، ﺟ ء ١٠ سم ، ء٨ = ٩سم . أحسب مساحة سطح △ ٨ ﺟ ء .

سابعاً: مساحة سطح الدائرة



مساحة سطح الدائرة التي طول نصف قطرها نق

مساحة سطح الدائرة = ط × نق^{٢}

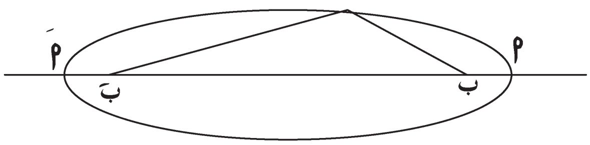
محيط الدائرة = ٢ × ط × نق

القطع الناقص

القطع الناقص أحد الأشكال الهندسية الهامة في الطبيعة فكواكب المجموعة الشمسية تدور حول الشمس في قطاعات ناقصة كذلك فإن الأقمار الصناعيةومحطات الفضاء تدور حول الكواكب في قطاعات ناقصة وتستخدم القطاعات الناقصة في تنسيق أحواض الزهور وعمل الأشكال الزخرفية .

القطع الناقص هو مجموعة نقط المستوي التي مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين في المستوي يساوي مقدار ثابتاً.

النقطتين الثابتتين تسميان بؤرتي القطع الناقص . الخط المستقيم المار بالبؤرتين يقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسي القطع الناقص والبعد بينهما يساوي المقدار الثابت هذا المقدار الثابت هو طول المحور الأكبر للقطع .وشكل القطاع كما في الشكل.



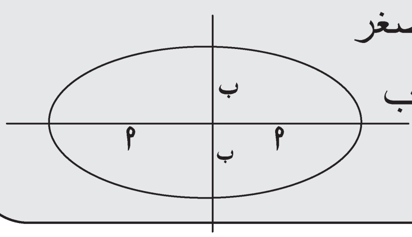
ويجب ملاحظة أنه إذا انطبقت النقطتين الثابتتين (أي البؤرتين) فإن القطع الناقص يصبح دائرة ولذلك يمكن النظر إلى الدائرة على أنها حالة خاصة من القطع الناقص .

ثامناً:مساحة سطح القطع الناقص

القطع الناقص له محوران المحور الأكبر ٢أ ، المحور الأصغر ٢**ب**

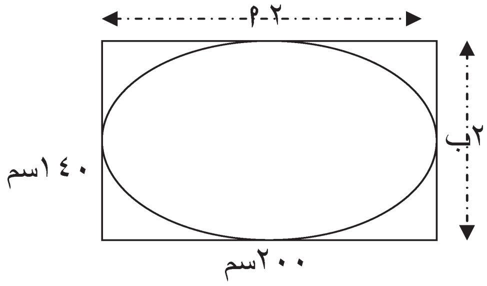
مساحة سطح القطع الناقص = ط × نصف طول المحور الأكبر× نصف طول المحور الأصغر

م = ط × أ × ب



مثال[١] :

يراد عمل قرصة نضد خشبي على شكل قطع ناقص من لوح من الخشب الكونتر أبعاده ١٤٠ سم ، ٢٠٠سم أحسب المساحة الكلية لهذه القرصة ، ثم أحسب الجزء الفاقد من خشب الكونتر .



الحل :

طول المحور الأكبر للقطع الناقص = ٢٠٠ سم

∴ ٢أ = ٢٠٠ ومنها أ = ١٠٠

طول المحور الأصغر للقطع الناقص = ١٤٠ سم

∴ ٢ ب = ١٤٠ ومنها ب = ٧٠

∴ مساحة سطح القطع الناقص = ط أ ب

$= \frac{٢٢}{٧} \times ١٠٠ \times ٧٠ = ٢٢٠٠٠$ سم^{٢}

∵ مساحة سطح لوح الكونتر = ١٤٠ × ٢٠٠ = ٢٨٠٠٠ سم^{٢}

∴ مساحة الجزء الفاقد = ٢٨٠٠٠ − ٢٢٠٠٠ = ٦٠٠٠سم^{٢}

مثال[٢] :

إذا كانت النسبة بين طولي محوري قطع ناقص تساوي ٣ : ٤ وكانت مساحة سطحه تساوي $١٣٥٧\frac{٥}{٧}$ سم^{٢}، فأوجد طول كل من المحورين .

الحل :

نفرض أن طول المحور الأصغر= ٣ س سم ، طول المحور الأكبر = ٤ س سم

∴ مساحة سطح القطع الناقص = ط أ ب

$= ط \times \frac{٣ س}{٢} \times \frac{٤ س}{٢} = \frac{٦٦}{٧}$ س^{٢} سم^{٢}

بالتالي : $\frac{٦٦}{٧}$ س^{٢} = $١٣٥٧\frac{٥}{٧}$

∴ س^{٢} = $١٣٥٧\frac{٥}{٧} \times \frac{٧}{٦٦} = ١٤٤$ ∴ س = ١٢ سم

ويكون طول المحور الأكبر = ٤ × ١٢ = ٤٨ سم

طول المحور الأصغر = ٣ × ١٢ = ٣٦ سم

تمارين [٢]

(١) أوجد مساحة سطح الدائرة التي طول نصف قطرها ١٠ سم .

(٢) مساحة سطح دائرة يساوي عشرة أمثال مساحة سطح دائـــرة أخـــرى طـــول نصف قطرها ٢ متر أوجد نصف قطر الدائرة الكبري .

(٣) النسبة بين مساحتي سطح دائرتين ٦ : ١٩ أوجد النسبة بين طـــولي نصـــف قطريهما .

(٤) أوجد طول نصف قطر الدائرة التي مساحة سطحها تساوي مســـاحة ســـطح المثلث متساوي الأضلاع الذي طول ضلعه ٦ سم .

(٥) أوجد المساحة المحصورة بين دائرتين متحدتي المركز طولا نصفي قطريهما ٦ ، ٨ سم .

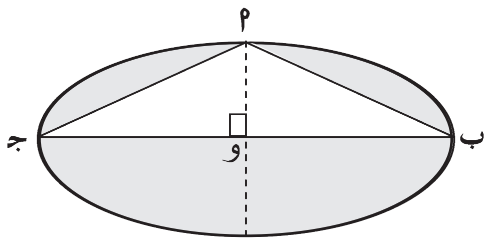
(٦) أوجد مساحة سطح القطع الناقص إذا كان :

ﻫ) طول محوره الأكبر ٩ سم ، طول محوره الأصغر ٤ سم.

ب) طول محوره الأكبر ١٦ سم ، طول محوره الأصغر ١٢ سم .

(٧) أحسب مساحة سطح صفيحة معدنية علي شكل قطع ناقص طولا محوريه ١٨ سم ، ١٢ سم (ط = ٣.١٤)

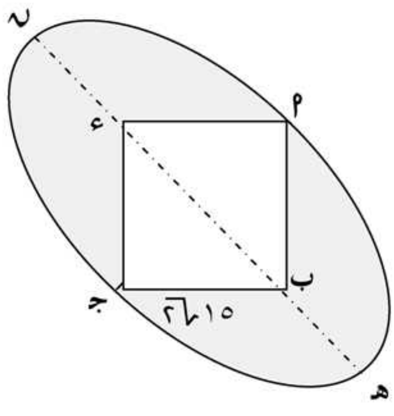
(٨) ﻫب ﺟ مثلث متساوي الساقين فيه ﻫ ب = ﻫ ﺟ = ٢٥ ســـم ، ب ﺟ = ٤٠ ســـم أحسب مساحة سطحه وإذا رسم قطع ناقص يحيط بالمثلث بحيث كـــان $\overline{\text{بج}}$ هـــو المحور الأكبر للقطع الناقص . أوجد الفرق بين المساحتين (ط = ٣.١٤)



(٩) أرسم القطع الناقص الذي طولا محوريه ١٠ سم ، ٨ سم .

(١٠) صفيحة معدنية مربعة الشكل طول ضلعها ٥٠ سم قطع منها قطع نـــاقص مركزه هو مركز المربع وطولا محوريه ٤٠ سم ، ٣٠ سم . أحسب مساحة سطح الجزء الباقي من الصفيحة (ط = ٣.١٤) .

(١١) ٩ ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٥ $\sqrt{2}$ سم رسم قطع ناقص يحيط بالمربع بحيث محوره الأصغر هو القطر $\overline{\text{٩ جـ}}$ ، فإذا كانت مساحة سطح الجزء المحصور بين المربع والقطع الناقص تساوي ٤٩٢ سم^{٢} . فإحسب مساحة سطح القطع الناقص ثم أوجد طول محوره الأكبر $\overline{\text{هـ ى}}$.



مغير البعد

سبق لنا ان درسنا في المرحلة الإعدادية من التعليم الأساسي هندسة التحويلات وهي (الأنعكاس – الأنتقال – الدوران) وتتميز هندسة التحويلات بأنها تساوي قياسي أي أن كلا منها :

١– يحافظ على الأبعاد بين النقط .
٢– يحافظ على قياسات الزوايا .
٣– يحافظ على استقامة الخطوط وتوازيها.

وسوف ندرس هذا العام موضوعاً أخر يخالفها في أنه ليس تساوي قياسي ، أي لا يحافظ على الأبعاد بين النقط ولكنه يحافظ على التناسب بين أطوال القطع المستقيمة المناظرة في صورته .

إذا كانت و نقطة ثابتة في المستوى وأجرينا العملية الهندسية التي تجعل صورة كل نقطة أ في أي شكل هندسي هي النقطة أَ بحيث و أَ = {ك} . و أ حيث ك ∈ ح – {٠} فإن هذه العملية التي مـا هي إلا تكبير أو تصـغير للشكل الهندسي يطلق عليها أسم " <u>مغير البعد</u> " لأنها تغير النقطة أ عن النقطة الثابتة و بمقدار {ك} من المرات .

وتسمى النقطة الثابتة "و" مركز مغير البعد .
كما تسمى النسبة الثابتة ({ك}) بالمعامل القياسي لمغير البعد .
ويرمز لمغير البعد رياضياً بالرمز م (و ، ك) .

مثال[١] :

و نقطة ثابتة في المستوى ، أ نقطة ما بحيث و أ =٦ سم ، عين بالرسم والقياس صورة أ بمغير البعد التالي .

(أولاً) م١ (و ، $\frac{٣}{٢}$)

(ثانياً) م٢ (و ، $\frac{٢}{٥}$)

(ثالثاً) م٣ (و ، $-\frac{٣}{٢}$)

الحل :

(أولاً) نرسم الشعاع $\overleftarrow{وس}$ ثم نأخذ عليه النقطة أ بحيث و أ = ٦ سم

لنفرض أ١ صورة أ بمغير بعد ر١ (و ، $\frac{٣}{٢}$)

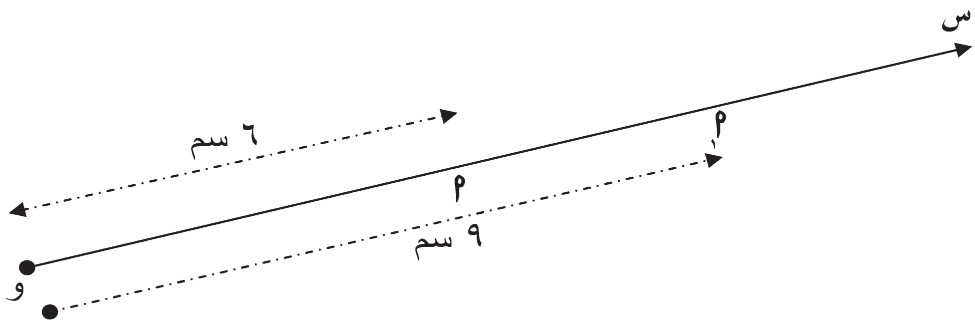
∴ و أ١ = $\frac{٣}{٢}$ و أ = $\frac{٣}{٢}$ × ٦ = ٩ سم

فنعين النقطة أ١ علي $\overleftarrow{وس}$ بحيث و أ١ = ٩ سم فتكون هي النقطة المطلوبة .

ملاحظة :

نلاحظ أن المعامل القياسي لمغير البعد ر١ = $\frac{٣}{٢}$ > ١

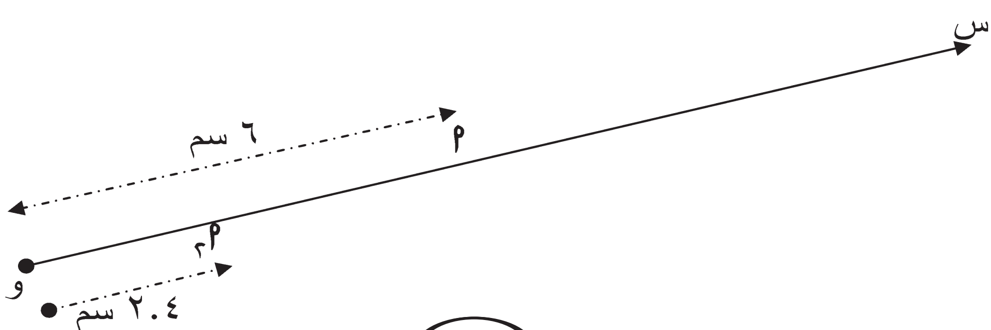
كما نلاحظ أن النقط و ، أ، أ١ تقع بهذا الترتيب على أستقامة واحدة على نفس الشعاع $\overleftarrow{وس}$.



(ثانياً) نفرض أن أ٢ صورة أ بمغير البعد ر٢ (و ، $\frac{٢}{٥}$)

∴ و أ٢ = $\frac{٢}{٥}$ و أ = $\frac{٢}{٥}$ × ٦ = ٢.٤ سم

فنعين على $\overleftarrow{وس}$ النقطة أ٢ بحيث و أ٢ = ٢.٤ سم فتكون هي النقطة المطلوبة



ملاحظة :

نلاحظ أن المعامل القياسي لمغير البعد $ر_٢ = \frac{٢}{٥} < ١$ وأكبر من الصفر

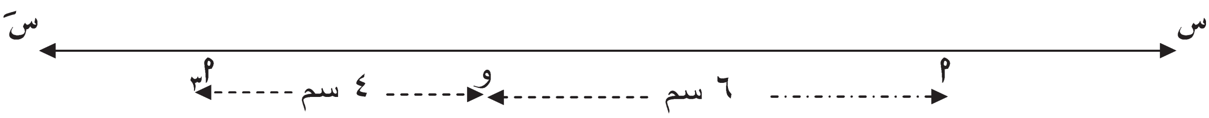
كما نلاحظ أن النقط و ، $أ_٢$ ، أ تقع بهذا الترتيب على استقامة واحدة علي نفس الشعاع $\overleftarrow{وس}$

(ثالثاً) نفرض أن $أ_٣$ صورة أ بمغير البعد $ر_٣$ (و ، $-\frac{٣}{٢}$)

∴ $و أ_٣ = \left\{ -\frac{٣}{٢} \right\}$ و أ $= \frac{٣}{٢} \times ٦ = ٤$ سم

∵ ك $= -\frac{٣}{٢}$ عدد سالب

∴ أ ، $أ_٣$ تقعان في جهتين مختلفتين من النقطة و . فنكمل المستقيم $\overleftrightarrow{س س َ}$ ونعين على الشعاع $\overleftarrow{وس َ}$ ـ النقطة $أ_٣$ بحيث و $أ_٣ = ٤$ سم فتكون هي النقطة المطلوبة .



ملاحظة :-

نلاحظ أن ك $= -\frac{٣}{٢} < ٠$

كما نلاحظ أن النقط أ ، و ، $أ_٣$ تقع بهذا الترتيب على أستقامة واحدة بحيث تقع النقطة و بين أ ، $أ_٣$ أي أن $\overleftarrow{و أ_٣}$ دائماً يعاكس $\overleftarrow{و أ}$ ـ بالنسبة للنقطة و .

خواص مغير البعد

مغير البعد يحافظ على:

(١) النسب بين أبعاد النقط .

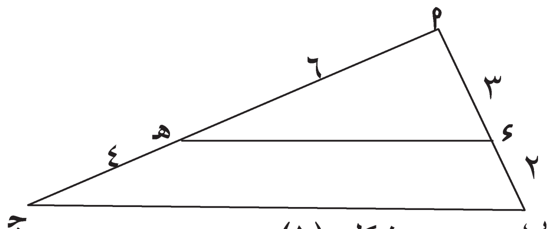
(٢) قياسات الزوايا .

(٣) أستقامة الخطوط وتوازيها .

مثال [٢] :

أي الأشكال التي أمامك فيها $\overline{\text{ءه}} \parallel \overline{\text{بج}}$

في شكل (١) :



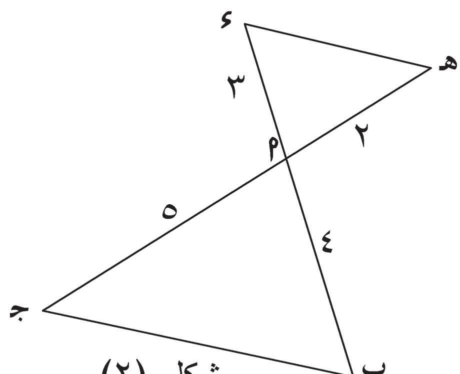
شكل (١)

$\because \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٣}{٢}$

، $\frac{\text{أه}}{\text{هج}} = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أه}}{\text{هج}}$ $\therefore \overleftrightarrow{\text{ءه}} \parallel \overleftrightarrow{\text{بج}}$

في شكل (٢) :



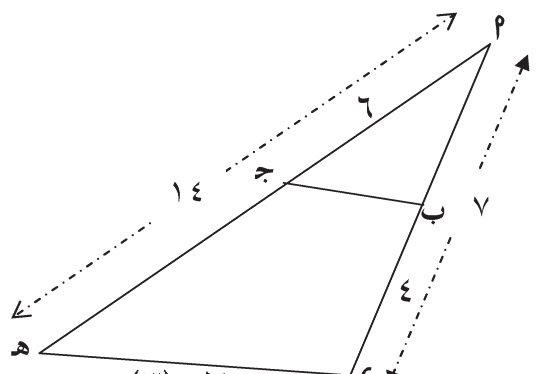
شكل (٢)

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أء}}{\text{أء} + \text{أب}} = \frac{٣}{٣ + ٤} = \frac{٣}{٧}$

$\frac{\text{أه}}{\text{هج}} = \frac{\text{أه}}{\text{أه} + \text{أج}} = \frac{٢}{٢ + ٥} = \frac{٢}{٧}$

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} \neq \frac{\text{أه}}{\text{هج}}$ $\therefore \overleftrightarrow{\text{ءه}}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{\text{بج}}$

في شكل (٣) :



شكل (٣)

$\frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{٧}{٤}$

$\frac{\text{أه}}{\text{هج}} = \frac{\text{أه}}{\text{أه} - \text{أج}} = \frac{١٤}{١٤ - ٦} = \frac{١٤}{٨}$

$\therefore \frac{\text{أء}}{\text{ءب}} = \frac{\text{أه}}{\text{هج}}$ $\therefore \overleftrightarrow{\text{ءه}} \parallel \overleftrightarrow{\text{بج}}$

مثال [٣] :

$\triangle$ ٩ ب جـ مثلث فيه ٩ ب = ٨ سم ، ٩ جـ = ١٢ سم . أخذت نقطة ء على $\overline{\text{٩ ب}}$ بحيث ٩ء = ٢ سم ورسم منها $\overline{\text{ءهـ}}$ // $\overline{\text{٩ جـ}}$ قاطعة $\overline{\text{ب جـ}}$ في هـ ، ورسم منها أيضاً $\overline{\text{ء و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ قاطعه $\overline{\text{٩ جـ}}$ في و . فإذا كان هـ جـ = ٢.٥ سم فأوجد طول كل من:

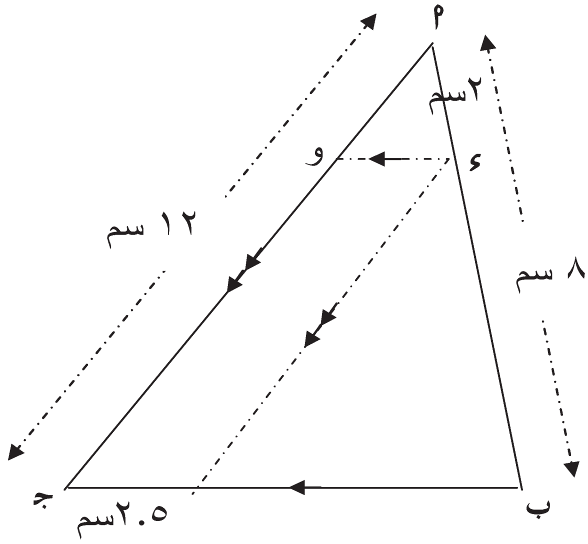
$\overline{\text{بء}}$ ، $\overline{\text{بهـ}}$ ، $\overline{\text{٩و}}$

هل $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب٩}}$ ؟ لماذا ؟

الحل :

∵ ٩ ب = ٨ ، ٩ ء = ٢ سم ∴ ب ء = ٦ سم

∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{٩ جـ}}$



∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{ء ٩}} = \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ جـ}}$

∴ $\frac{٦}{٢} = \frac{\text{ب هـ}}{٢.}$ منها ب هـ = ٧.٥ سم

∵ $\overline{\text{ءو}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ $\frac{\text{٩ ء}}{\text{٩ ب}} = \frac{\text{٩و}}{\text{٩جـ}}$

∴ $\frac{٢}{٨} = \frac{\text{٩و}}{١٢}$ منها ٩ و = ٣ سم

∵ و جـ = ٩ جـ − ٩و = ١٢ − ٣ = ٩ سم

∵ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ب}} = \frac{٢.٥}{٧.٥} = \frac{١}{٣}$

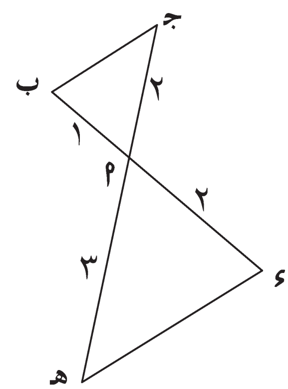
$\frac{\text{جـ و}}{\text{٩و}} = \frac{٩}{٣} = \frac{٣}{١}$

∴ $\frac{\text{جـ هـ}}{\text{هـ ب}} \neq \frac{\text{جـ و}}{\text{٩و}}$

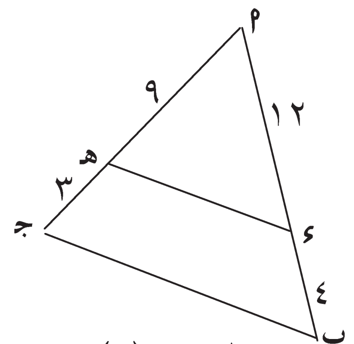
اي أن $\overline{\text{هـ و}}$ لا يوازي $\overline{\text{ب٩}}$

تمرين[٣]

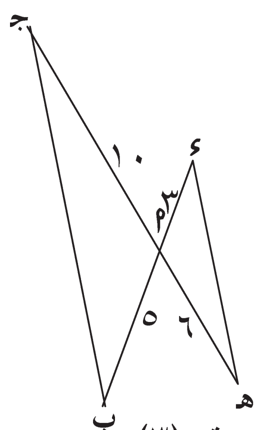
١) في أي من الأشكال الآتية ءهـ // ب جـ .



شكل رقم (١)



شكل رقم (٢)



شكل رقم (٣)

٢) م ب جـ ء متوازي أضلاع فيه م ب = ٦ سم ، ب جـ = ٩ سم . أخذت النقط

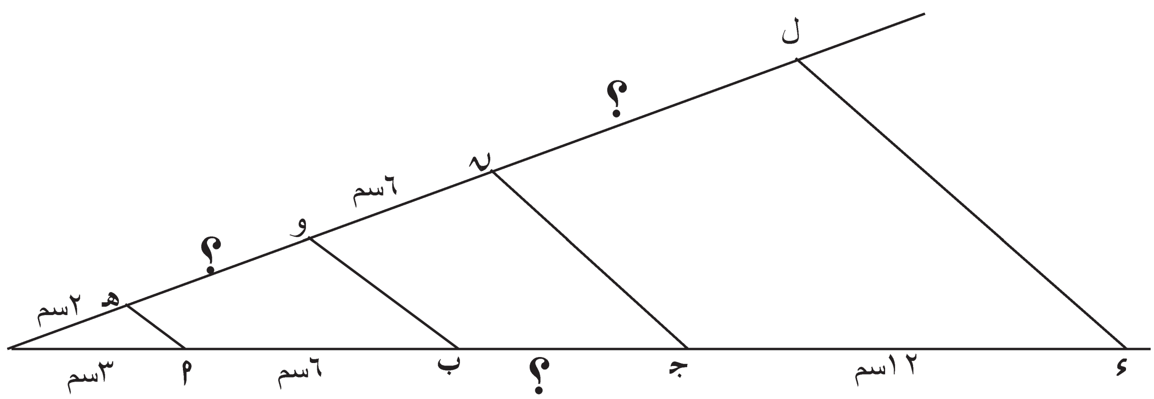
س ، ص ، ع ، ل على الأضلاع م ب ، ب جـ ، جـ ء ، ء م على الترتيب

بحيث م س = جـ ع = ٤ سم ، ب ص = ء ل = ٣ سم . أثبت أن : س ص // ل ع

٣) م ب جـ ء شكل رباعي تقاطع قطراه م جـ ، ب ء في هـ فإذا كان م جـ = ١٢ سم

م هـ = ٣ سم ، ب ء = ٤√٣ سم ،ب هـ = ٣√٣ سم **أثبت أن : م ء // ب جـ**

٤) **في الشكل التالي** م هـ // ب و ، جـ ب // ء ل .



أحسب أطوال القطع المستقيمة هـ و ، ب جـ ، ن ل

٥) م ب جـ مثلث فية م ب = ١٢ سم ، ب جـ = ١٦ سم ، ء ∈ م ب

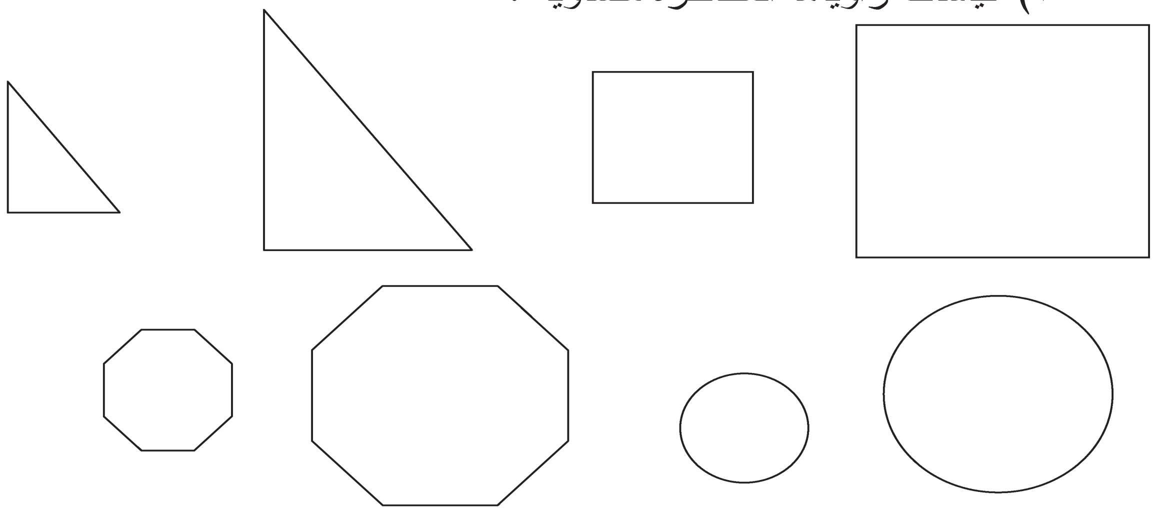
بحيث ب ء =٨ سم رسم ء هـ // م جـ قاطعة ب جـ في هـ أوجد طول ب هـ .

التشابه

درسنا فيما سبق مفهوم تطابق الأشكال الهندسية فبالنسبه للمضلعات يتطابق المضلعين إذا كانت :

١) أطوال أضلاعهما المتناظره متساويه .

٢) قياسات زاوياها المتناظره متساويه .



إذا كان س ، ص مضلعين متطابقين فإن مساحة سطح س تساوى مساحة سطح ص وكمفهوم عام ، يقال لشكلين هندسيين انهما متشابهان إذا كان لهما نفس الهيئه وكان أحدهما تكبير أو تصغير للآخر فمثلا أى مربعين يكونان متشابهين أى مثلثين متساوي الأضلاع يكونان متشابهين ، أى دائرتين تكونان متشابهين وفى حياتنا العمليه نحتاج إلى عمل نماذج مصغره أو مكبره لما نشاهده فى الواقع وذلك باتخاذ مقياس رسم للحصول على هذا التصغير أو التكبير ، وبصفه خاصة ، إذا كان الشكل المطلوب تصغيره أو تكبيره على صورة مضلع فيراعى أَن تكون قياسات الزوايا على الرسم مساويه لقياسات نظائرها فى الواقع .

وبصفة خاصة :

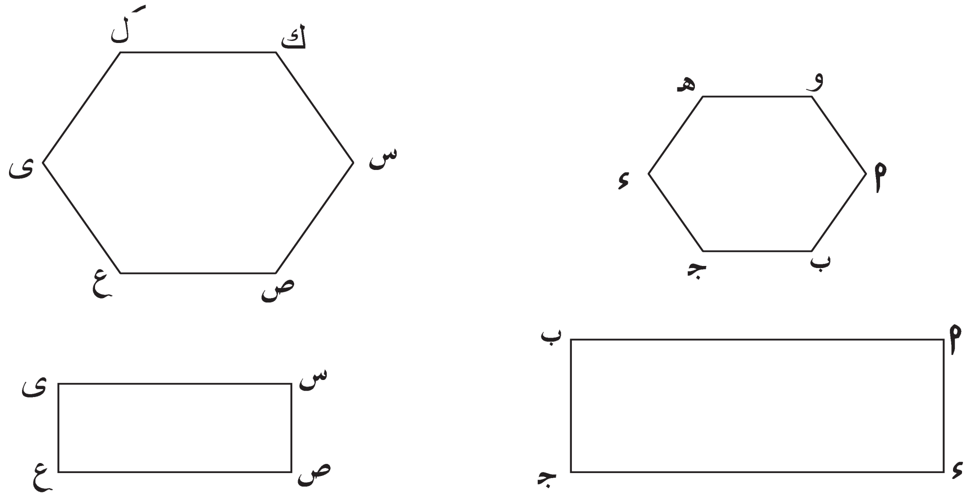
يقال لمضلعين(لهما نفس العدد من الأضلاع) إنهما متشابهين إذا :

(١) تساوت قياسات زوياهما المتناظرة .

(٢) كانت أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة .

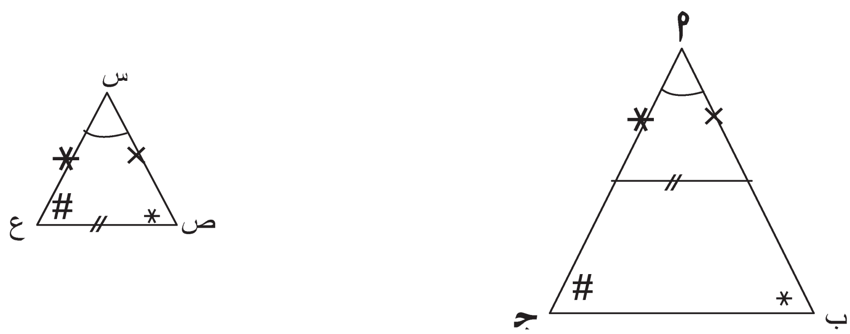
فمثلا كل مسدسين منتظمين يكونان متشابهين ويتشابه المستطيلين ٩ ب جـ ء ،

س ص ع ى إذا كان $\frac{\text{٩ ب}}{\text{س ص}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{ص ع}}$ (كما في الشكل)



تشابه المثلثات :

إذا ساوت قياسات زوايا أحد مثلثين قياسات نظائرهما في المثلث الآخر كان المثلثين متشابهين



من هذا ينتج أن :

١- يتشابه المثلثان إذا ساوى قياسا زاويتين من أحدهما قياس زاويتين من الآخر .

٢- يتشابه المثلثان القائما الزاوية إذا ساوى قياس إحدى الزاويتين الحادتين في أحدهما قياس إحدى الزاويتين الحادتين في الآخر .

فمثلاً :

المثلث الذي فيه قياسا زاويتين ٧٢°، ٤٣° يتشابه مع المثلث الذي فيه قياسا زاويتين ٧٢°، ٤٣° ، لماذا ؟

المثلث القائم الزاوية الذي فيه قياس إحدى الزاويتين الحادتين ٣٨° يتشابه مع المثلث القائم الزاوية الذي فيه قياس إحدى الزاويتين الحادتين ٥٢° ، لماذا ؟

، لماذا ؟

إذا ساوت قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخروتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتويها هاتان الزاويتان فإن المثلثين يتشابهان

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة في مثلثين فإنهما يتشابهان

فمثلاً المثلث الذي أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ سم يتشابه مع المثلث الذي أطوال أضلاعه ٦ ، ٨ ، ١٠ سم ويجب ملاحظة أن :

أرتفاعات وأطوال متوسطات وأطوال منصفات زوايا مثلثين متشابهين المتناظرة تكون النسبة بين كل متناظرين منها كالنسبة بين أي ضلعين متناظرين في المثلثين

مثـال [١] :

مثلث طول قاعدته ٤ سم وأرتفاعه ١٨ سم إذا كان طول القاعدة المناظرة لمثلث مشابه ١٢ سم فأوجد الارتفاع المناظر.

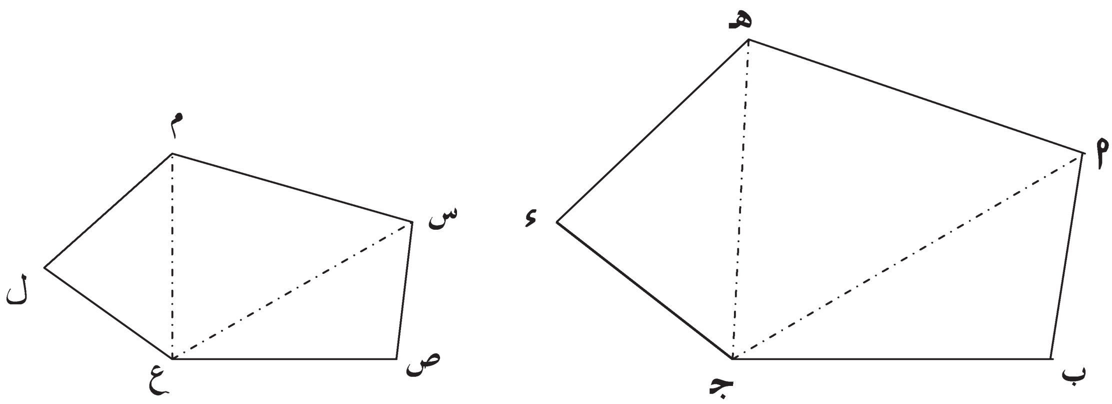
الحل:

نفرض أن (س) الأرتفاع المطلوب

$$\therefore \quad \frac{\text{س}}{١٨} = \frac{١٢}{٤} \qquad \therefore \text{ س } = ٥٤ \text{ سم}$$

مما سبق نعلم أن كل مضلع نوني يمكن أن ينقسم إلى (ن – ٢) من المثلثات وحيث إن المضلعين المتشابهين لهما نفس العدد من الأضلاع فإنه يمكن تقسيمهما إلي نفس العدد من المثلثات . وفي الحقيقة فإن :

المضلعان المتشابهان يمكن أن ينقسما إلى نفس العدد من المثلثات التى يشابه كل منها نظيره.



ويمكننا كتابة :

النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما

النسبة بين مساحتي سطحي مثلثين متشابهين تساوي مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما

مثـال [٢] :

أ ب جـ ، أَ بَ جَ مثلثان متشابهان فيهما أ ب = ٣ سم ، أَ بَ = ٥ سم أوجد النسبة بين مساحتي سطحيهما.

الحل:

$$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ أَ بَ جَ}} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{أَ بَ})^{٢}} = \frac{٩}{٢٥}$$

مثـال [٣] :

أ ب جـ مثلث أطوال أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ سم . ما هي أطوال أضلاع مثلث س ص ع مشابه له ومساحته ضعف مساحة المثلث أ ب جـ .

الحل:

$$\frac{\text{مساحة } \triangle \text{ أ ب جـ}}{\text{مساحة } \triangle \text{ س ص ع}} = \frac{(\text{أ ب})^{٢}}{(\text{س ص})^{٢}} = \frac{١}{٢}$$

$$\therefore \frac{٩}{(\text{س ص})^{٢}} = \frac{١}{٢}$$

$(\text{س ص})^{٢} = ١٨$ 　　　 $\text{س ص} = ٣\sqrt{٢}$

وبالمثل $\text{ص ع} = ٤\sqrt{٢}$ سم ، $\text{ع س} = ٥\sqrt{٢}$ سم

> النسبة بين محيطي مضلعين متشابهين تساوي
> النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما

> النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين تساوي
> النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما

مثـال [٤] :

مضلعين متشابهين مساحتيهما ١١٥٦ متر مربع ، ٤٤٨٩ متر مربع . ما هي النسبة بين محيطيهما ؟

الحل:

نفرض أن ح ، حَ محيطي المضلعين

$$\therefore \frac{١١٥٦}{٤٤٨٩} = \frac{\text{ح}^{٢}}{\text{حَ}^{٢}} \longleftarrow \frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = \frac{٣٤}{٦٧}$$

تدريب :

أكمل ما يأتي :

(١)إذا كانت النسبة بين طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين تساوي ٣ :٤ **فإن** النسبة بين محيطيهما ....

(٢) مضلعين متشابهين النسبة بين محيطيهما ٢:٥ فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي...............

تمرين [٤]

(١) مثلث طول قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٩ سم إذا كان طول القاعــدة المنــاظرة لمثلث مشابه ١٠ سم فأوجد ارتفاعه المناظر .

(٢) طولا قاعدتي شبه منحرف متساوي الساقين ٣ ، ٨ سم وطول كلا من ساقيه ٥ سم ما هو الطول الذي يجب أن يمد به الساقين لنحصل على مثلث .

(٣) أ ب جـ ء شبه منحرف "و" نقطة تقاطع قطريه $\overline{أ جـ}$ ، $\overline{ب ء}$ إذا كان أو = ٦ سم ، ب و = ٥ سم ، و ء = ٣ سم ، فأوجد طول $\overline{و جـ}$.

(٤) النسبة بين أطوال أضلاع مثلثين متشابهين ٣ : ٤ إذا كانت أطوال متوسطات المثلث الأصغر ٦ ، ٧ ، ٨ سم ، فما هي أطوال متوسطات المثلث الأكبر ؟

(٥) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، جـ أ = ١٥ سم. رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ // $\overline{ب جـ}$ قاطعاً $\overline{أ ب}$ في ء ، $\overline{أ جـ}$ في هـ . أوجد طول كلاً من $\overline{ء هـ}$ ، $\overline{هـ جـ}$ إذا كان أ ء = ٧ سم .

(٦) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = أ ء = ٦ سم ، ب جـ = ١٣.٥ سم ، جـ ء = ٤ سم ، أ جـ = ٩ سم . أثبت أن $\triangle$ أ ب جـ $\sim$ $\triangle$ ء جـ أ ، $\overline{ب جـ}$ // $\overline{أ ء}$.

(٧) $\triangle$ أ ب جـ فيه أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٩ سم ، س $\in$ أ ب ، ص $\in$ ب جـ بحيث ب ص = ٢ سم ، ب س = ٣ سم فإثبت أن $\triangle$ س ب ص $\sim$ $\triangle$ جـ ب أ ، ق ($\angle$ ب س ص) = ق ($\angle$ جـ) .

(٨) إذا كان طولا ضلعين متناظرين من مضلعين متشابهين ٨ سم ، ٢٤ سم علي الترتيب فأوجد النسبة بين طولي محيطي المضلعين وكذا النسبة بين مساحتي سطحيهما .

(٩) إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشــابهين ٧ ســم ، ٢١ ســم وكانت مساحة سطح المضلع الأصغر = ١٩٨ سم^{٢} فأوجد مساحة المضلع الآخر .

(١٠) إذا كانت النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشــابهين تســاوي $\frac{١٦}{٤٩}$ ، وطول أحد أضلاع المضلع الأصغر يساوي ١٦ سم فأوجد طول الضلع المنــاظر في المضلع الأكبر.

نماذج أختبارات للمراجعة

[الفصل الدراسي الثاني]

النموذج الأول

<u>السؤال الأول</u> :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١)إذا كانت $٢^{س-١} = ٣^{س-١}$ فإن س =........... { ٣ ، ٢ ، ١ ، -١ }

(٢) إذا كان $لو_{٣}$ س = ١ فإن س = ... { ٣ ، -٣ ، ±٣ ، $\frac{١}{٣}$ }

(٣)إذا كانت حا هـ = $\frac{٣}{٥}$ فإن حتا هـ = ... { $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ }

(٤)إذا كانت٣حتا هـ +١= صفر فإن زاوية هـ تقع في الربع ....

{الأول ، الثاني ، الثالث ، الثاني والثالث }

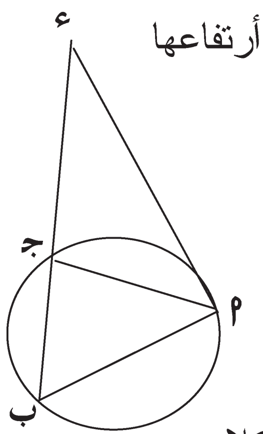
<u>السؤال الثاني</u> :

(١)أختصر لأبسط صورة $(\sqrt[٣]{أ} \times \sqrt[٣]{ب})^{٦}$

(٢) بدون إستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة :

لو٢٠.٠٠ – لو ١.٠٥ +٢ لو٧ – لو ١٤ + لو ٠.٠١٥

<u>السؤال الثالث</u> :



(١) رصد رجل طائرة على أرتفاع ١٥٠٠ متر فوجد أن قياس زاوية أرتفاعها

٢٥° $١٧'$ أوجد بعد الراصد عن الطائرة.

(٢) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

أ ب : أ جـ = ٥ : ٣ رسم مماس للدائرة

عند أ فقطع $\overleftrightarrow{ب جـ}$ في ء أوجد م △ أ جـ ء : م △ أ ب جـ

<u>السؤال الرابع</u> :

(١) زاوية مركزية طول نصف قطرها ٥سم تقابل قوساً ١٠سم أوجد كلا من

القياسين الدائري والستيني لهذه الزاوية .

(٢) أوجد قياس (∠ هـ) إذا كان حتا ٢ هـ = ٠.٥ حيث صفر° < هـ < ٩٠°

النموذج الثاني

السؤال الأول :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١)إذا كانت ٣ $^{س+٥}$ = ١ فإن س = ... {صفر ، -٥ ، ٥ }

(٢) إذا كان لو$_{١٠}$ ٠.٠٠١ = س فإن س = ... { ٣ ، -٣ ، ١٠٠ }

(٣) حا ٦٧° = حتا.....° { ٦٧° ، ١١٣° ، ٢٣° }

(٤)إذا كانت ٢ = نصف طول المحور الأكبر في القطع الناقص ، ب= نصف طول المحور الأصغر في القطع الناقص فإن مساحة سطحه =..............

{ط ٢ ب ، ٢ط ٢ ب ، ٤ط ٢ ب }

السؤال الثاني :

(١) إذا كانت ٢^{س} = ٣ أوجد قيمة ٨$^{-س}$.

(٢) من نقطة على سطح الأرض علي بعد ١٥٠ متر من قاعدة برج قيست زاوية ارتفاع قمة البرج فكانت ٢٥َ ٣٠° أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

السؤال الثالث :

(١) بأستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة س مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية

س = (٢لو٧ + ٣ لو٥- لو٢)^{٢}

(٢) مضلعين متشابهين النسبة بين محيطيهما ٢ : ٣ ومساحة المضلع الأول ٩٦ سم^{٢} أوجد مساحة المضلع الثاني .

السؤال الرابع :

(١) بدون أستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة :

$$\frac{لو_{٣} ٢٧ + لو_{٣} ٣}{لو_{٣} ٢٧ - لو_{٣} ٣}$$

(٢)إذا كانت ٢و ب زاوية في وضعها القياسي في دائرة الوحدة أوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية ٢و ب إذا كانت إحداثيات نقطة ب هي (س ، - س) حيث ب نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة.

الأختبار الثالث

السؤال الأول :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

(١)إذا كانت $ص^{٤}$ = ١ فإن ص =..... { 1 ، -1 ، ±١ }

(٢) إذا كان $لو_{٧}$ س = صفر فإن س = ... { صفر ، ١ ، ٧ }

(٣) حا هـ = حتا هـ فإن هـ = ...° { ٩٠° ، ٤٥° ، ١٨٠° }

(٤)النسبة بين مساحتي سطحي مضلعين متشابهين تساوي .... بين طولي أي ضلعين متناظرين {مربع النسبة ، النسبة }

السؤال الثاني :

(١)أختصر لأبسط صورة

$$\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٦} \times \left(\frac{٥}{٣}\right)^{٣} \times \left(\frac{٣}{١٠}\right)^{-١}$$

(٢) بدون إستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة :

$$لو_{٣} \frac{٧}{٢} + ٢ لو_{٣} ١٥ - لو_{٣} ١٧٥ - ٣ لو_{٣} ٣ + ٢ لو_{٣} \sqrt{٣}$$

السؤال الثالث :

(١)Δ ٲ ب جـ ~ Δ ء هـ و فإذا كانت مساحة سطح Δ ٲ ب جـ تساوي ٩ أمثال مساحة سطح Δ ء هـ و . وكان ء هـ = ٥ سم أوجد طول $\overline{ٲ ب}$.

(٢) ٲ ب جـ مثلث فية ٲ ب = ٲ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٠ سم

أثبت أن : حتا ب حتا جـ + حا ب حا جـ = ١

السؤال الرابع :

(١) عمود من البرق أرتفاعه ٨ متر يلقي ظلا على الأرض طوله ٦ متر. فما قياس زاوية أرتفاع الشمس .

(٢) بأستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة س مقرباً الناتج لأربعة أرقام عشرية .

س = ٢لو ٣ + ٥ لو ٧ - ٤ لو ٥

الأختبار الرابع

السؤال الأول:-

أكمل مايأتي :-

(١) إذا كانت $٤^{س} = ٦٤$ فإن س = ...

(٢) إذا كان $لو_{٢}\ ٢ = س$ فإن س = ...

(٣) مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع الذي يحتوي على ن من الأضلاع..............

(٤) إذا كانت حتا ٣هـ = حا ٢هـ إن قياس زاوية هـ =..........°

السؤال الثاني:-

(١) أختصر لأبسط صوره

$$\frac{٢٧ \times ٤^{٢} \times ٦^{٢}}{٢^{٥} \times (١٨)^{٢}}$$

(٢) سلم يستند علي حائط رأسي وبطرفه الأخر علي أرض أفقية ويبعد طرفه السفلي عن الحائط بمقدار ٢.٤ متر فإذا كان قياس زاوية ميل السلم على الأرض ٦٠° . أوجد طول السلم .

السؤال الثالث :-

(١) ٢ ب جـ ء مربع مركزه م وطول ضلعه يساوي ١.٥ سم عين بالرسم صورته ٢َ بَ جَ ءَ بمغير البعد ر (١ ، ٣) ثم أحسب م □ ٢ ب جـ ء : م □ ٢َ بَ جَ ءَ

(٢) بدون أستخدام الألة الحاسبة أوجد قيمة :

$$لو\ ٢٥ \times لو\ ٥ - ٢\ (لو\ ٥)^{٢}$$

السؤال الرابع :-

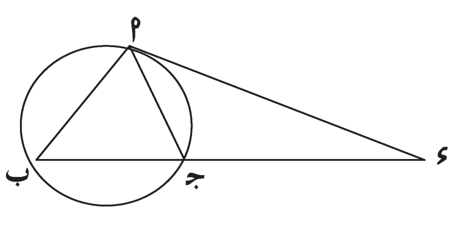
(١) أوجد قيمة حتا (٢١٠°) حا (٥١٠°) – حا (٣٣٠°) حتا(–٣٣٠°)

(٢) ٢ ب جـ Δ مرسوم داخل دائرة رسم المماس

عند ٢ يقطع $\overleftarrow{ب جـ}$ في ء

وكانت م Δ ٢ ب جـ : م Δ ٢ ب ء = ٢٤ : ٤٩

أوجد طول ٢ ب : ٢ جـ



الأختبار الخامس

السؤال الأول :

أختار الإجابة الصحيحة من بين الأقواس :

(١)إذا كانت $٦^{(س-٥)} = ٧^{(٥-س)}$ فإن س = ...

(٢) إذا كان لو$_٣$ $(س)^٢$ = ٤ فإن س = ...

(٣) مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ **حاصل ضرب طولي أي ضلعين** × ....

(٤)إذا كانت حتا هـ = − $\frac{٥}{٧}$ فإن زاويه هـ تقع في الربع ....أو.............

السؤال الثاني :

(١) أوجد قيمة $(٨١)^{\frac{١}{٢}} \times (٨١)^{\frac{١}{٤}}$

(٢) من نقطة علي سطح الأرض تبعد ٢١ متراً من قاعدة مبني رصد شخص قمة المبني فوجد أن زاوية أرتفاع القمة ٤٣° أوجد أرتفاع المبنى لأقرب متر

السؤال الثالث :

(١) بدون أستخدام الألة الحاسبة أثبت أن :−

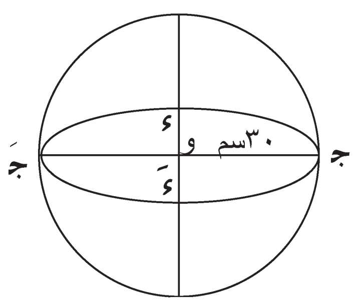
لو$_٣$ ٣٦ − لو$_٣$ ٤ = ٢

(٢) ٢ ب جـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة ء $\in$ ب جـ بحيث كان $(٢ ء)^٢$ = ب ء . ء جـ ، ب٢ . ٢ ء = ب ء . ٢ جـ أثبت أن $\overline{ب جـ}$ قطر في الدائرة .

السؤال الرابع :

(١) إذا كانت د(س) = $٥^{س}$

أوجد قيمة $\frac{د(س) - د(س-١)}{د(س+١) - د(س)}$



(٢) دائرة وقطـــــع ناقص متحدان المركز وبحيث كان قطر الدائرة هو المحور الأكبرللقطع الناقص فإذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوي ٣٠ سم والمساحة السطحية المحصورة بين الدائرة والقطع الناقص تساوي ٤٧١ $سم^٢$

أحسب مساحة القطع الناقص ثم أحسب طول محوره الأصغر(ط = ٣.١٤)

أجوبة التمارين
الفصل الدراسي الأول
التقريب والخطأ

تمـــارين (٣)

(١) ± ٠.٠٠٥ ، ± ٠.٠٠٠٦٠٣
± ٠.٠٠٠٥ ، ± ٠.٠٠٠٠٧١٤
± ٠.٥ ، ± ٠.٠١٠٢
± ٠.٠٠٥ ، ± ٠.٠٠٠٧٠٨
± ٠.٠٥ ، ± ٠.٠٠٧٤٦

(٢) ± ٠.٠٧٠٩ ، ± ١.٧٢٤ ، ± ٠.١٠٢٢
، ± ٠.١٣٥١ ، ± ٠.٠٦٩٤

(٣) ٨.١٢٥٥ ، ٨.١٢٤٥
٧.٢٩٥ ، ٧.٢٨٥
٠.٠٧٥ ، ٠.٠٦٥
٩.٥ ، ٨.٥
٠.٠٠٥ ، ٠.٠٠٤٥

تمـــارين (٤)

(١)
(أ) ± ٠.٠٥ (ب) ± ٠.٠٦٠ (حـ) ± ٠.٥٥٥
(٢) + ٠.١ ، ٩٤٠.٧
(٣) ٤١٣.٢٢٨ ، ٤١٣.٥٧٣
(٤) ٣٤٩.٨ ، ٣٤٩.٦
(٥) + ٠.١٥ (٦) ٠.٠٠٢٠٨

تمـــارين (٥)

(١)

أولا : +٠.٠٠٠٠٧٠٦   ثانياً: ٠.٠٠٠٥

ثالثاً : ٠.١٠٧٠٦   رابعاً : ٠.٠٠٠٠٢٣٥

(٢) + ٠.٠١٩٢ ، ٣٦.٠٩

(٤) + ٠.٠٤٠٧

(٥) + ٠.٠٠٤٨

الخلط والمزج :

تمـــارين (١)

(١) ١٩.٧

(٢) ٠.٩٢

(٦) ٨٩٨ قرش

(٧) ٥٧.٥ قرش

(٨) ٣٧٥ ، ٤٥٠ قرش

البرمجة الخطية :

تمـــارين (١)

(١) س ⩾ −٢ ، أي س ∈ [−٢ ، ∞ [

(٢) س > صفر ، أي س ∈] صفر ، ∞ [

(٣) س > −٢ ، أي س ∈] −٢ ، ∞ [

(٤) س ⩽ ١٧ ، أي س ∈] −∞ ، ١٧]

(٥) س < −١٠٤ ، أي س ∈] −∞ ، −١٠٤ [

(٦) ٣.٥ < س < ٩.٥ أي س ∈] ٣.٥ ، ٩.٥ [

(٧) س > $\frac{٢}{٥}$ أي س ∈] $\frac{٢}{٥}$ ، ∞ [

(٨) س > ٧ أي س ∈] ٧ ، ∞ [

تمـــارين (٣)

(٣) ٣ ، ٣ الربح = ١٣٥ جنيهاً

(٤) ٥ ، صفر الربح = ١٠٠جنيهاً

(٥) ٣ ، ٢ التكلفة = ٥٠ قرش

المتتابعات الحسابية والهندسية :

تمـــارين (١)

(١) ١٣ ، ١٩ (٢) −٢١ ، −٢٧

(٣) ٢٥ ، ٢٥ ، ١٢ ، ٢٢ (٤) ٥ ، ٥ ، ٤ ، ٥

(٥) (١ ، ٣ ، ٥ ، ....)

(٦) − $\frac{١}{٣}$ ٩٨ ، −٩٥ ، − $\frac{٢}{٣}$ ٩١ ، ....) $ح_{٣١}$ أول حد موجب

(٧) ٥ ، ٥٠

(٨) ٢٢ ، ١٩ ، ١٦ ، ....، −٢ ، −٥ ، −٨)

(٩) (٤١ ، ٣٣ ، ٢٩ ، ....، −٣ ، −٧ ، − ١١ ، −١٥)

(١٠) $\frac{١}{٢}$ ٨٧

تمـــارين (٢)

(١) ٣٢ ، ٥ ، ٣٥١ (٢) ١٧ ، ٥١

(٣) ١١٢ ، ٤ (٤) ١٤٨٨

(٥) ١٠ ، $\frac{٨٦}{٩}$ (٦) (٣ ، ٥ ، ٧ ، ....)

(٧) ١٠٣٠ (٨) ١٠ ساعات (٩) ٦٥٧٠٠٠ جنيه

تمـــارين (٣)

(١) ٩٦   (٢) $\frac{١}{٢٧}$ (٣) ٢٥٦

(٤) (٥٤ ، ١٨ ، ٦ ، ....) أو (−٥٤ ، ١٨ ، −٦ ، ....)

(٥) (١٦ ، ٢٤ ، ٣٦ ، ٥٤ ، ....)

(٦) $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ، ....) أو (١ ، −٣ ، ٩ ، −٢٧ ، .....)

تمـــارين (٤)

(١) ± ٩٦   (٢) ± ٤٢   (٣) ١٨ ، ٣٦

(٤) (−١٦٢ ، ٥٤ ، −١٨) أو (١٦٢ ، ٥٤ ، ١٨)

(٥) ± ٤

تمـــارين (٥)

(١)٢٥٤   (٢) $\frac{٣٦٤}{٩}$ (٣) ٣٨٤ ، ٧٦٥

(٤) $\frac{١}{٣}$ ، (٢٤٣ ، ٨١ ، ٢٧ ، ....)   (٥) ٥ ، ٥

(٦) ٧

(٧) (٢٤ ، ١٢ ، ٦ ، ......) ، $\frac{١٨٩}{٤}$

(٨) ٣٣

تمـــارين (٦)

(١)٣٢   (٢) ٢١٦   (٣)$\frac{٩}{٢}$

(٤) $\frac{٨١}{٢}$ ، $-\frac{٨١}{٢}$

(٥)(٦٠ ، ٢٠ ، $\frac{٢٠}{٣}$ ، ....) $جـ_{\infty}$ =٩٠

(٦) أ) $\frac{٧١}{٣٣٣}$ ب) $\frac{٣}{١١١}$ جـ) $\frac{٨}{١١}$

(٧) $حـ_{٥} = \frac{١٢١}{٢٤٣}$ ، $حـ = \frac{٩}{٢}$

مبدأ العد - التباديل - التوافيق :

تمـــارين (١)

(١) ٣٠ (٢) ٦٢٥ ، ١٢٠ (٣) ١٢

تمـــارين (٢)

(١) ٣٠ ، ١٧١٦ ، ٠.١ (٢) ٣

(٣) ٣٠ (٤) س = ١١ ، ص = ٤

(٥) ٥٠٤٠ (٦) ١٢٠

(٧) ١٢٠

تمـــارين (٣)

(١) ١٥٥٠٤ ، ١ ، ١ ، ٤٩٥٠ (٢) ١

(٣) ر = ٢ أو ر = ١٠

(٤) ﻧ = ١٠ ، س = ١٥

(٥) ٨

(٦) ${}^{٢}ق_{١} \times {}^{٩}ق_{٧} \times {}^{٧}ق_{٣} = ٤٥٢٠$

(٧) ٨٤ ، ٢١ ، ٤٥

الفصل الدراسي الثاني

الأسس والجذور :

تمـــارين (١)

(١) (أ) ٢ (ب) ٦٤

(٢) (أ) ٣ (ب) $\frac{٧}{٥}$

(حـ) $\frac{٣}{١١}$ (د) $\frac{٥}{٤}$

(٤) ١ ، ٣ ، $\frac{١}{٩}$ ، س =٢ أو س = صفر

(٥) ٥

(٦) ٤

تمـــارين (٢)

(١)(أ) ٣ $\sqrt{٦}$ (ب) -٢ $\sqrt[٤]{٥}$ (حـ) ٩ $\sqrt[٣]{٢}$

(ء) ١٤ $\sqrt[٣]{٦}$ (هـ) ٦ $\sqrt[٣]{٢}$

(٢) $(٣)^{٥}$

(٣) ٨ ، ١٢٥ ، ٤

اللوغاريتمات :

تمـــارين (١)

(٢) (أ) ١ (ب) ١٤ (حـ) $\frac{٣}{٢}$ (د) ٩

(٣) (أ) ٤ (ب) ٢ (حـ) ٥ (د) -٨

تمـــــارين (٢)

(٢) $\text{لو}_{٢}\ \frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{٣}{\text{لو}_{٧}\ ٢٧}$ (٤) ‎-٧

(٧) ٠.٩٠٣ ، - ٠.٣٩٨ ، - ١.٦٩٩ ، - ١.١٩٤

تمـــــارين (٣)

(١) (أ) ‎-٢.١٥٢ (ب) - ٢.١٠٢٤ (حـ) ٠.٠٦٧
(د) ٠.٧١٢ (هـ) ٠.٨٦٣ (و) ١.٦٩٣
(ز) ١.٣٨٨ (ح) ١.٠٠٣ (ط) ٠.٥٣٣

(٢) (أ) ٢١٩.٢٨٠ (ب) ٦٢١.٧٢٧ (حـ) ٠.٧٧٢
(د) ٢.١٧ (هـ) س = ٢، س = ٣ (و) - ٤.٤١٩

(٣) (أ) ٠.٥٩٦ (ب) ٠.٠١٦٧

حساب المثلثات :

تمـــــارين (١)

(١) (أ) الثاني (ب) الأول (حـ) **الثالث** (د) الأول

(٢) (أ) ٣.٩٣ (ب) ٥.٢٤ (حـ) ٠.٠٢
(د) - ٢.٣٦ (هـ) ١.٣٧ (و) ٢.٠٢

(٣) (أ) ٣٠َ ٢٧° (ب) ٢٢َ ٨٥°
(حـ) ٢٤َ ٢٠٣° (د) ١٣٥°

(٤) (أ) ٣٨٠° ، - ٣٤٠° (ب) ٥١٠° ، - ٢١٠°
(حـ) ٣٣٠° ، - ٣٩٠° (د) ٤٩٥° ، - ٢٢٥°

تمـــــارين (٢)

(٣) (أ) ١٥° (ب) ١٠° (حـ) ٢٦° (د) ١٨°

تمـــارين (٣)

(١) (أ) حا ٥٥° =٠.٨١٩١ ، حتا ٥٥°= ٠.٥٧٣٦.، ظـا ٥٥°=١.٤٢٨١

(ب) حا ٣٢َ ١٥٤° =٠.٤٣٠

حتا ٣٢َ ١٥٤°= − ٠.٩٠٣ ،

ظا ٣٢َ ١٥٤°=− ٠.٤٧٦

(حـ) حا ٣.٥ ء =−٠.٣٥٠

حتا ٣.٥ ء = −٠.٩٣٦

ظا ٣.٥ ء =٠.٣٧٤

(٢) (أ) ٣٢ً ٢٥َ ٥٤° (ب) ٦ً ٣٦َ ١٢٨° (حـ) ٤٠ً ٥٨َ ٤٧°

تمـــارين (٤)

(١) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (٢) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (٣) $\frac{\sqrt{٣}}{٣}$

(٤) ٣٠° (٥) ١٥٠° ، ٢١٠° (٦) $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ ، $-\sqrt{٢}$

(٧) $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $-\sqrt{٣}$ (١١) −٤ (١٢) ١ (١٣) $-\frac{١}{٢}$

تمـــارين (٥)

(١) (أ) أ جـ = ٢١.٤٦ ، ب جـ = ٤٥.١٦ ، ق∠ أ = ٣٥َ ٦٤°

(ب) أ ب = ١٩.١ ، ق∠ ب = ١٦ً ٧َ ٤٧° ،

ق∠ جـ = ٤٤ً ٥٢َ ٤٢°

(جـ) ب جـ = ٥.٨١ ، أ جـ = ١٦ ، ق∠ أ = ٢٠°

(ء) ب جـ = ٥.٤ ، أ ب = ٧.٦ ، ق∠ أ = ٤٥°

(٢) ق∠ ب = ٤ً ١٥َ ٦٥° (٣) ١٠.٧٩ مم ، ٦٨ مم

(٥) ١٥.٨ (٦) ١٥.٨ ، ١٢.٣

تمـــارين (٦)

(١) ٢٩.٢ (٢) ٦٦.٨٨ (٣)٤٤٤

(٤) ١١ متر (٥) ٢٢٩ ، ٢٧٩ (٦) ٦٣.٩

(٧) ٣١° ٤٩´

الهندسة المستوية

تمـــارين (٢)

(١) ٩٠٠ ، ١٤٤٠ ، ٢٣٤٠ ، ٤١٤٠

(٢) ٧ ، ٦ ، ٨ ، ٢٠

(٣) ١٠٨ ، ١٢٠ ، ١٤٤

(٤) تسعة أضلاع

(٥) ٨٨ ، ١٣٢ ، ٢٢٠

(٦) ٣٦ ، ٧٢ ، ١٠٨ ، ١٤٤

(٩) ١٤

محتويات الكتاب

الفصل الدراسي الأول

الفصل الدراسي الثاني

المقـــاس	٢٠ X ٢٨ سم
طبـع المتــن	١ لـــون
طبع الغلاف	٤ لـــون
ورق المتــن	٦٠ جـرام
ورق الغــلاف	١٨٠جم بنداكوت/ كوشيه

دار مكة المكرمة للطباعة

دار مكة المكرمة للطباعة