

EXERCICE 1 (10 points)

0.25 A-1- Vérifier que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2- En déduire que, $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par,

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0, +\infty[; f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2-a) Montrer que, $(\forall x \in]0, +\infty[)$; $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

0.5

$$\text{où } g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$$

0.5 b) Montrer que, $(\forall x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0.25 c) En déduire que, $(\forall x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de f

b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5

(On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

0.5 C-1- Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

2- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par,

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0, 1]$

0.5 b) Montrer que, $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right) |u_n - \alpha|$

www.educaprof.com

0.5

c) Montrer par récurrence que , $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0.25

d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α

D- Pour tout $x \in I$, on pose , $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5

1- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0.5

2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que ,

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 2 \ln 2 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(1+x)$$

0.5

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis en déduire que , $\int_0^1 f(t)dt = 2 \ln 2 - 1$

0.5

c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

E- On pose , pour tout k de \mathbb{N} , $\Delta_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

$$\text{et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* , S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k$$

0.25

1-a) Vérifier que , $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq \Delta_k \leq f(k) - f(k+1)$

0.5

b) En déduire que , $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0.25

2-a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.

0.25

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

0.25

c) Montrer que la limite ℓ de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie , $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

EXERCICE2 (3.5 points)

Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

0.5

1- Vérifier que , $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

0.25

2-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est , $\Delta = [m(1-j)]^2$

- 0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_n)
- 0.5 3- Dans cette question, on suppose que , $m = 1 + i$
 Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.
- II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
- Soit φ la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que , $z' = (1 + j)z$
- 0.25 1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application φ
- 2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2
 et on note $A'(a'), B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C
 par l'application φ et soient $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA'], [CB']$ et $[AC']$
- 0.75 a) Montrer que , $a' = -mj^2, b' = -m$ et $c' = -mj$
- 0.25 b) Montrer que , $p + qj + rj^2 = 0$
- 0.5 c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE3 (3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans \mathbb{N}^2 l'équation $(E_n) : (x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans \mathbb{N}^2 et soit p le plus petit diviseur premier de n

- 0.25 1-a) Montrer que , $(x+1)^n \equiv x^n \pmod{p}$
- 0.25 b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$
- 0.25 c) En déduire que , $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \pmod{p}$
- 0.5 2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans \mathbb{N}^2
- 3- On suppose que n est impair.
- 0.5 a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de \mathbb{Z}^2 tel que , $nu + (p-1)v = 1$
 (On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)
- 0.25 b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que , $nr = 1 - (p-1)(v + nq)$

0.5

c) On pose, $v' = -(v + nq)$. Montrer que, $v' \geq 0$

0.5

d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans \mathbb{N}^2

EXERCICE4 (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

0.25

1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

0.25

b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de \mathbb{Z} , on a,

$$M(a, b) \times M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0.5

c) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit φ l'application définie de E vers \mathbb{Z} par,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = |a^2 - 3b^2|$$

0.5

Montrer que φ est un homomorphisme de (E, \times) vers (\mathbb{Z}, \times)

3- Soit $M(a, b) \in E$

0.25

a) Montrer que $M(a, b) \times M(a, -b) = (a^2 - 3b^2) \cdot I$

0.5

b) Montrer que si $M(a, b)$ est inversible dans (E, \times) alors $\varphi(M(a, b)) = 1$

0.5

c) On suppose que $\varphi(M(a, b)) = 1$.

Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans (E, \times) et préciser son inverse.

0.25

4-a) Montrer que, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; \varphi(M(a, b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

0.25

b) En déduire que l'anneau $(E, +, \times)$ est intègre.

0.25

c) Est-ce que $(E, +, \times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN