លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ
បរិញ្ញាត្រផ្នែកគណិតវិទ្យា

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

សម្រាប់

សិស្សពូកែផ្នែកគណិតវិទ្យា

ត្រៀមប្រឡងអាហារូបករណ៍

ភាគ៨

$$f([x]y)=f(x)\,[f(y)]$$

រក្សាសិទ្ធិ

គណៈកម្មការនិពន្ធ និង រៀបរៀង

លឹម ផល្គុន និង សែន ពិសិដ្ឋ

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យបច្ចេកទេស

លោក លឹម ឆុន	លោក អ៊ឹង សំណាង
លោក នន់ សុខណា	លោកស្រី ទុយ រីណា
លោក ព្រឹម សុនិត្យ	លោក ផល ប៊ុនឆាយ
លោក និត្យ ម៉េង	

គណៈកម្មការត្រួតពិនិត្យអក្ខរាវិរុទ្ធ

លោក លឹម មិគ្គសិរ

ការីកុំព្យូទ័រ

កញ្ញា លី គុណ្ណាភា លោក អ៊ឹង សំណាង

អារម្ភកថា

សៀវភៅគណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោកភាគទី៨ ដែលអ្នកសិក្សាកំពុងកាន់នៅក្នុងដៃនេះ ចែកចេញជាបីផ្នែកដែលផ្នែកទី១ ជាកម្រងលំហាត់ជ្រើសរើស ផ្នែកទី២ ជាផ្នែកដំណោះស្រាយ និង ផ្នែកទី៣ ជាលំហាត់អនុវត្តន៍ ។ រាល់បប្រធានលំហាត់នីមួយៗនៅក្នុងសៀវភៅនេះ យើងខ្ញុំបានជ្រើសរើសយកតែ លំហាត់ណាដែលមានលក្ខណៈពិបាក មកធ្វើដំណោះស្រាយគំរូយ៉ាងក្បោះក្បាយបំផុត ។

គោលបំណងនៃការរៀបរៀងចងក្រងគឺដើម្បីទុកជាឯកសារជំនួយសម្រាប់អ្នកសិក្សាក្នុងគ្រប់មជ្ឈដ្ឋាន និង ម្យ៉ាងទៀតដើម្បីចូលរួមលើកស្ទួយវិស័យគណិតវិទ្យាក្នុងប្រទេសកម្ពុជាយើងឱ្យកាន់តែរីកចម្រើនឆាប់រហ័ស្របតាមសម័យវិទ្យាសាស្ត្រទំនើប ។

សៀវភៅនេះមិនល្អហួសគេហួសឯងនោះទេ ។ កំហុសឆ្គងដោយអចេតនាប្រាកដជាមានទាំងបច្ចេកទេស និង អក្ខរាវិរុទ្ធ ។ ហេតុនេះយើងខ្ញុំជាអ្នកនិពន្ធ រងចាំជានិច្ចនូវមតិរិះគន់បែបស្ថាបនាពីអ្នកសិក្សាគ្រប់មជ្ឈដ្ឋានដោយក្ដីរីករាយដើម្បីកែលំអសៀវនេះឱ្យកាន់តែមានសុក្រិត្យភាពប្រសើរឡើងថែមទៀត ។

ជាទីបញ្ចប់ ខ្ញុំបាទអ្នកនិពន្ធសូមគោរពជូនពរអ្នកសិក្សាទាំងអស់មានសុខភាពល្អ មានប្រាជ្ញាឈ្លាសវៃ និង ទទួលបានជោគជ័យជានិច្ចក្នុងការសិក្សា ។

បាត់ដំបង ថ្ងៃទី ២៧ ខែធ្នូ ឆ្នាំ២០១០

អ្នកនិពន្ធ និង ស្រាយជ្រាវ **លឹម ផល្គុន**
Tel : 017 768 246
Email: lim_phalkun@ymail.com
Website: www.mathtoday.wordpress.com

កម្រងលំហាត់

1. ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $\mathbf{f:\ IR \to IR}$ ដោយដឹងថាសមភាព

$\mathbf{f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor}$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $\mathbf{x, y \in IR}$ ។

($\lfloor \mathbf{a} \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ $\mathbf{a}$) ។ (IMO 2010)

2. ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

ចូរស្រាយថា $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x} \ge 2 + \sqrt{3}$ ។

3. ដោះស្រាយសមីការ :

$$6 + \log_{\frac{1}{3}}(1 + 2^x) + \log_3{}^2(1 + 2^x) = 2\sqrt{8 + \log_3{}^3(1 + 2^x)}$$

4. គេមានអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{x+4}{x+1}$ ដែល $x \ne -1$ ។

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

5. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = \dfrac{1}{a + b\sin^2 x} + \dfrac{1}{c + b\cos^2 x}$

ដែល $a > 0$, $b > 0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(x) \ge \dfrac{4}{a+b+c}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

6. គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1 - \tan a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $n = 0, 1, 2, ...$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង

$v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

7. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$f(x) + \sqrt{2} f(\frac{\pi}{4} - x) = \sin x + 3\cos x$$

ចូរស្រាយថា $| f(x) | \leq \sqrt{2}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

8. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$2f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

កំណត់ចំនួនពិត r និង φ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរ :

$f(x)=r\sin(x+\varphi)$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

9.គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$5f(x)-3\sin x\, f(\pi-x)=4\cos x$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$

10. គេឱ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$\begin{cases} f(x)+g(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin x \\ 3f(\frac{\pi}{2}-x)-g(x)=2\cos x \end{cases}$$

ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

11. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in (-1,1)$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$f(x)-2f(-x)=\ln(\frac{1-3x+3x^2-x^3}{1+3x+3x^2+x^3})$$

ចូររក $f(\cos\theta)$ ជាអនុគមន៍នៃ $t=\tan\frac{\theta}{2}$ ។

12. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$f(x)+3f(-x)+8=4(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x^2}$

13. គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f:IR \mapsto IR}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$$\begin{cases} f(1)=-2 \\ (x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \end{cases}$$

ក. កំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$

ខ. កំណត់ $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{f(x)=\sqrt{3}}$ ។

14. ចំពោះ $\mathbf{a}$ និង $\mathbf{b}$ ជាចំនួនពិត សមីការ

$\mathbf{x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0}$ មានឫសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ $\mathbf{a^2+b^2}$? $\mathbf{(IMO\ \ 1973)}$

15. គេឱ្យអនុគមន៍លេខ $\mathbf{f}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$\mathbf{f(1)=\frac{7}{5}}$ និង $\mathbf{f(n+1)=\frac{13f(n)-16}{9f(n)-11}}$ ដែល $\mathbf{n=1,2,3,...}$

ចូរស្រាយថា $\mathbf{f(n)}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

16. គេឱ្យស៊ីតនៃចំនួនពិត $\mathbf{(u_n)}$ កំណត់ដោយ :

$u_1 = \frac{7}{2}$ និង $u_{n+1} = {u_n}^2 + u_n - \frac{1}{4}$ គ្រប់ $n \geq 1$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

17. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z = \sqrt{2+\cos\varphi} + i\sqrt{2+\sin\varphi}$

ដែល $\varphi \in IR$ ។

ក្នុងប្លង់កំផ្លិច $(o, \vec{i}, \vec{j})$ គេហៅ M ជាចំនុចរូបភាពនៃ z ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $r = OM$?

18. គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1, z_2, z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ និង } \frac{{z_1}^2}{z_2 z_3} + \frac{{z_2}^2}{z_1 z_3} + \frac{{z_3}^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

19.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1 និង z_2 ដែល $|z_1| = |z_2| = 1$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + 1| + |z_2 + 1| + |z_1 z_2 + 1| \geq 2$

20. គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1 = 1 , a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \ \ , n = 1 , 2 , 3 ,... \end{cases}$$

គេតាងស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៏

នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ?

21. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ :

$$z_1 = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{2} \ \text{និង}\ z_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} z_n + \frac{2 - \sqrt{3} - i}{2}$$

ដែល $n = 1 , 2 ,3 ,...$ ។

ក. តាង $w_n = z_n - 1$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួន

កុំផ្លិច រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៏នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់

ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

22. គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្ទីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្ទីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

23. គេឱ្យស្ទីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = {u_n}^2 - {v_n}^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 0$$

ក. គេពិនិត្យស្ទីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = {z_n}^2$ រួចទាញថា $z_n = {z_0}^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

24. គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (I_n) កំណត់ដោយ :

$$I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}\ ,\ I_1=\int_0^1\frac{e^x dx}{1+e^x},...,I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}.dx$$

ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ក. គណនា $I_0+I_1;I_1$ រួចទាញរកតម្លៃនៃ I_0 ។

ខ. គណនា I_n+I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ I_2 និង I_3 ។

គ. ចំពោះ $x\in[0,1]$ ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃ e^{nx} និង $e^{(n+1)x}$ ។

បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតកើន ដោយមិនចាំបាច់គណនា I_n ។

ឃ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ គេមាន $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^x}\le\frac{1}{2}$

រួចទាញរកកន្សោមអមនៃ I_n តាមការគណនា $\int_0^1 e^{nx}.dx$ ។

តើស្វ៊ីត (I_n) មានលីមីតឬទេ ?

25. គេឱ្យស្វ៊ីត $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x+x^2}.dx$ ដែល $n\ge 0$

ក. បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. គណនា $I_n+I_{n+1}+I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរស្រាយថា $\frac{1}{3(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{3(n-1)}$ ចំពោះ $n\ge 2$

រួចទាញរក លីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ ។

26. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^{\pi} x\sin x\cos^6 x.dx$

27. គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+1}.dx$

28. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^a \frac{x^4dx}{x^n+a^n}$ ដែល $a>0$ ។

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a រួចគណនា I_n ចំពោះតម្លៃនៃ a ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

29. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{x^4+a^4}}$ ដែល $a>0$ ។

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a រួចគណនា I_n ចំពោះតម្លៃនៃ a ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

30. ចូរស្រាយថា $\left|\int_0^1 \frac{a\cos x+b\sin x}{1+x^2}.dx\right|\le\frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$

ដែល a និង b ជាពីរចំនួនពិត ។

31. គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) នៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN^* ដោយ :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$ ។

ក. កំនត់ចំនួនពិត A, B, C ដើម្បីឱ្យ

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$ ។

ខ. តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ។

គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេតាង $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$

ដែល g ជាអនុគមន៏កំនត់ដោយ $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n

និង $\lim_{n\to+\infty} S'_n$ ។

32. គណនាអាំងតេក្រាល :

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$ និង $$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

33. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ក្នុងចន្លោះ $[\,0\,;\pi]$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi}xf(\sin x).dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x).dx$

ខ. អនុវត្តន៍ ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.dx$

34. គេឱ្យអនុគមន៍ f កំនត់លើ $[a\,;b]$

ដែល $\forall x\in[a\,;b]:\ f(a+b-x)=f(x)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b xf(x).dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x).dx$ ។

អនុវត្តន៍

ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}.\,dx$ ។

35. គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$, $x>-1$

ក. បង្ហាញថា $f(\frac{1-t}{1+t})=\frac{1}{2}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t)^2 f(t)$ ដែល $0\le t\le 1$ ។

ខ. គណនា $I=\int_{0}^{1} f(x).dx$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃ $J=\int_{0}^{1}\frac{\arctan x}{1+x}.dx$ ។

36. គេមានស្វ៊ីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n\ge 1$ ដោយ :

$$I_n=\frac{1}{n!}.\int_{0}^{1}(1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា :

$$I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

រួចទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right)=e=2.71828$

37. គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{0}^{a}f(x).dx$, $q>0$,$q\ne 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ :

ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$ និង $J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx$

38. ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx=\int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៏ :

ចូរគណនា $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

39. គេសន្មតថា f ជាអនុគមន៏មួយកំនត់លើ IR ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$ ។ ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}f(x).dx$ ។

40. គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^3 x.dx$ ដែល $n\in IN$ ។

ក. ចូរគណនា I_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ. ចូរគណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=0}^{n}(I_k)=I_0+I_1+I_2+.........+I_n$

ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty}S_n$ ។

41. គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,.dx$ ដែល $n \in IN$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៏នៃ n ។

គ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (P_k) = P_1 + P_2 + ... + P_n$

ជាអនុគមន៏នៃ n រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

42. គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$$

និង $$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$$

ចូរបង្ហាញថា $I_n = J_n$ រួចទាញរកតម្លៃ I_n និង J_n ។

43. គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \frac{1}{2n-1} . \int_0^1 \left(x^2\right)^n .dx$, $n \in IN^*$ ។

ក-គណនា I_n ជាអនុគមន៏នៃ n ។

ខ-គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + ... + I_n$ រកលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

44. គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$

និង $J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ $, n \in IN^*, a > 0$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក :

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$ ។

45. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A} + \frac{\sin^2 B}{\cos^3 B} + \frac{\sin^2 C}{\cos^3 C} \geq 18$

46. គេឧបមាថាសមីការ $8x^3 - 6x + 1 = 0$ មានឫសបី x_1, x_2, x_3

ចូរគណនា $S = x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$ ។

ផ្នែកដំណោះស្រាយ

គណិតវិទ្យាជុំវិញពិភពលោក

ភាគទី ៨

រក្សាសិទ្ធិដោយ លឹម ផល្គុន

Tel : 017 768 246

លំហាត់ទី១

ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: IR \to IR$ ដោយដឹងថាសមភាព

$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$ ពិតជានិច្ចគ្រប់ $x, y \in IR$ ។

($\lfloor a \rfloor$ តាងឱ្យផ្នែកគត់នៃ a) ។ (IMO 2010)

ដំណោះស្រាយ

កំណត់គ្រប់អនុគមន៍ $f: IR \to IR$

គ្រប់ $x, y \in IR$ គេមានសមភាព

យក $x = 0$ និង $y = 0$ គេបាន $f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor$

គេទាញ $f(0)(1 - \lfloor f(0) \rfloor) = 0$ នោះ $f(0) = 0$ ឬ $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

-ករណី $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

យក $y = 0$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន $f(0) = f(x)\lfloor f(0) \rfloor$

ឬ $f(x) = f(0)$ នាំឱ្យ $f(x)$ ជាអនុគមន៍ថេរ

តាង $f(x) = c$ ជំនួសក្នុងសមីការ (*) គេបាន $c = c\lfloor c \rfloor$

នោះ $c = 0$, $\lfloor c \rfloor = 1$ ។

ដូចនេះ $f(x) = 0$ ឬ $f(x) = c$ ដែល $c \in [1,2)$ (ព្រោះ $\lfloor c \rfloor = 1$)

-ករណី $f(0)=0$

យក $x=y=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(1)\lfloor f(1)\rfloor$

នោះ $f(1)=0$ ឬ $\lfloor f(1)\rfloor=1$

ក. ចំពោះ $f(1)=0$ នោះយើងយក $x=1$ ជំនួសក្នុង (*) គេបាន

$f(y)=f(1)\lfloor f(y)\rfloor=0\ \forall y\in IR$ ។

ខ. ចំពោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ នោះយើងយក $y=1$ គេបាន $f(\lfloor x\rfloor)=f(x)$ (**)

យក $x=2$, $y=\frac{1}{2}$ ក្នុង (*) គេបាន $f(1)=f(2)\left\lfloor f(\frac{1}{2})\right\rfloor$

តែតាម (**) គេបាន $f(\frac{1}{2})=f(0)=0$ ហេតុនេះគេទាញបាន $f(1)=0$

មិនពិតព្រោះ $\lfloor f(1)\rfloor=1$ ។

សរុបមកគេបានចម្លើយ $f(x)=0\ ,\forall x\in IR$

ឬ $f(x)=c\ ,\forall x\in IR$ ដែល $1\le c<2$ ។

លំហាត់ទី២

ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

ចូរស្រាយថា $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 2 + \sqrt{3}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 2 + \sqrt{3}$

តាមវិសមភាព $Cauchy - Schwarz$ គេបាន :

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}\sin x} + \frac{1^2}{\cos x} \geq \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}\sin x + \cos x}$$

ដោយ $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin(x + \frac{\pi}{6}) \leq 2$

គេបាន $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$

ដូចនេះ $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \geq 2 + \sqrt{3}$ ។

លំហាត់ទី៣

ដោះស្រាយសមីការ :

$$6+\log_{\frac{1}{3}}(1+2^x)+\log_3{}^2(1+2^x)=2\sqrt{8+\log_3{}^3(1+2^x)}$$

ដំណោះស្រាយ

ដោះស្រាយសមីការ :

តាង $t=\log_3(1+2^x)$ សមីការអាចសរសេរ :

$$6-t+t^2=2\sqrt{8+t^3}$$

$$t^2-t+6=2\sqrt{(t+2)(t^2-2t+4)}$$

យក $u=t+2$ និង $v=t^2-2t+4$ ដែល $t\geq -2$

គេបាន $u+v=2\sqrt{uv}$

លើកជាការេ $u^2+2uv+v^2=4uv \Leftrightarrow (u-v)^2=0$

គេទាញ $u=v$ ឬ $t+2=t^2-2t+4$

$$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t_1=1\ ,\ t_2=2$$

-ចំពោះ $t=1$ គេបាន $\log_3(1+2^x)=1$ នាំឱ្យ $x=1$ ។

-ចំពោះ $t=2$ គេបាន $\log_3(1+2^x)=2$ នាំឱ្យ $x=3$ ។

ដូចនេះ $x=1\ ;\ x=3$ ។

លំហាត់ទី៤

គេមានអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{x+4}{x+1}$ ដែល $x\neq -1$ ។

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$

តាង $a_1 = f(x)$

$$a_2 = f[f(x)] = f(a_1)$$

$$a_3 = f[f[f(x)]] = f(a_2)$$

$$-----------------$$

$$-----------------$$

$$a_n = f_n[f[....f[f(x)]....]] = f(a_{n-1})$$

គេបាន $a_{n+1} = f(a_n) = \dfrac{a_n+4}{a_n+1}$

ដូចនេះការគណនា $f_n[f[...f[f(x)]...]]$ គឺត្រូវកំណត់តួ a_n

នៃស្វ៊ីតដែលកំណត់ដោយ $\begin{cases} a_1 = f(x) = \dfrac{x+4}{x+1} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+4}{a_n+1}, n\geq 1 \end{cases}$

សមីការសម្គាល់នៃស៊ីតគឺ $r = \dfrac{r+4}{r+1}$

គេបាន $r^2 + r = r + 4$ នាំឱ្យ $r_1 = -2$, $r_2 = 2$

តាងស៊ីតជំនួយ $b_n = \dfrac{a_n - r_1}{a_n - r_2} = \dfrac{a_n + 2}{a_n - 2}$

គេបាន $b_{n+1} = \dfrac{a_{n+1} + 2}{a_{n+1} - 2} = \dfrac{\dfrac{a_n + 4}{a_n + 1} + 2}{\dfrac{a_n + 4}{a_n + 1} - 2}$

$$b_{n+1} = \frac{3a_n + 6}{-a_n + 2} = -3.\frac{a_n + 2}{a_n - 2} = -3b_n$$

នាំឱ្យ (b_n) ជាស៊ីតធរណីមាត្រមានរេសុង $q = -3$

និងតួ $b_1 = \dfrac{a_1 + 2}{a_1 - 2} = \dfrac{x + 4 + 2x + 2}{x + 4 - 2x - 2} = -3.\dfrac{x+2}{x-2}$

តាមរូបមន្ត $b_n = b_1 \times q^{n-1} = \dfrac{x+2}{x-2} \times (-3)^n$

ដោយ $b_n = \dfrac{a_n + 2}{a_n - 2}$ គេទាញ $a_n = \dfrac{2(b+1)}{b-1}$

ដូចនេះ $a_n = \dfrac{2[(x+2)(-3)^n + x - 2]}{(x+2)(-3)^n - x + 2}$ ។

លំហាត់ទី៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{1}{a+b\sin^2 x}+\dfrac{1}{c+b\cos^2 x}$

ដែល $a>0\ ,\ b>0$ ។

ចូរបង្ហាញថា $f(x)\geq\dfrac{4}{a+b+c}$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $f(x)\geq\dfrac{4}{a+b+c}$

តាមវិសមភាព $(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)$

យក $a_1=\sqrt{a+b\sin^2 x}\ ,\ a_2=\sqrt{c+b\cos^2 x}$

និង $b_1=\dfrac{1}{\sqrt{a+b\sin^2 x}}\ ,\ b_2=\dfrac{1}{\sqrt{c+b\cos^2 x}}$

គេបាន $(1+1)^2\leq(a+b\sin^2 x+c+b\cos^2 x).f(x)$

គេទាញបាន $f(x)\geq\dfrac{4}{a+c+b(\sin^2 x+\cos^2 x)}$

ដោយ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ គ្រប់ចំនួនពិត x

ដូចនេះ $f(x)\geq\dfrac{4}{a+b+c}$ ។

លំហាត់ទី៦

គេមានស្វ៊ីត (x_n) និង (y_n) កំណត់ដោយ $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ និង

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1-\tan a)y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n \end{cases}$$

ដែល $0 < a < \frac{\pi}{2}$ និង $n = 0,1,2,....$ ។

ក. ចំពោះគ្រប់ $n \geq 0$ តាង $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$ និង

$v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$ ។

ចូរស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (u_n) និង (v_n) សុទ្ធតែជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

គេមាន :

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)x_n + \frac{1}{2}\sin a(1-\tan a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\cos a$ គេបាន :

$$x_{n+1}\cos a = \frac{\cos a(\sin a + \cos a)}{2}x_n + \frac{\sin a(\cos a - \sin a)}{2}y_n \quad (1)$$

គេមាន :

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a(\cot a - 1)x_n + \frac{1}{2}(\sin a + \cos a)y_n$$

គុណអង្គទាំងពីរនឹង $\sin a$ គេបាន :

$$y_{n+1}\sin a = \frac{\cos a(\cos a - \sin a)}{2}x_n + \frac{\sin a(\sin a + \cos a)}{2}y_n \quad (2)$$

បូកសមីការ **(1)** និង **(2)** អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$x_{n+1}\cos a + y_{n+1}\sin a = \cos a(x_n\cos a + y_n\sin a)$$

ដោយ $u_n = x_n\cos a + y_n\sin a$

គេទាញបាន $u_{n+1} = \cos a . u_n$ នាំឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q_u = \cos a$ ។

ដកសមីការ **(1)** និង **(2)** អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$x_{n+1}\cos a - y_{n+1}\sin a = \sin a(x_n\cos a - y_n\sin a)$$

ដោយ $v_n = x_n\cos a - y_n\sin a$

គេទាញបាន $v_{n+1} = \sin a . v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រមាន

រេសុង $q_v = \sin a$ ។

ខ.គណនា u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

គេមាន $u_0 = x_0 \cos a + y_0 \sin a = \cos a$

គេបាន $u_n = u_0 \times {q_u}^n = \cos a . \cos^n a = \cos^{n+1} a$

ហើយ $v_0 = x_0 \cos a - y_0 \sin a = \cos a$

គេបាន $v_n = v_0 \times {q_v}^n = \cos a . \sin^n a$

ដូចនេះ $u_n = \cos^{n+1} a$, $v_n = \cos a \sin^n a$ ។

គ. ទាញរក x_n និង y_n ជាអនុគមន៍នៃ n និង a

ដោយ $u_n = x_n \cos a + y_n \sin a$

និង $v_n = x_n \cos a - y_n \sin a$

គេបាន $u_n + v_n = 2x_n \cos a$

គេទាញ $x_n = \dfrac{\cos^{n+1} a + \cos a \sin^n a}{2\cos a}$

$$x_n = \frac{\cos^n a + \sin^n a}{2}$$ ។

ហើយ $u_n - v_n = 2y_n \sin a$

គេទាញ $y_n = \dfrac{\cos^{n+1} a - \cos a \sin^n a}{2\sin a}$ ។

លំហាត់ទី៧

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$f(x)+\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)=\sin x+3\cos x$$

ចូរស្រាយថា $|f(x)| \leq \sqrt{2}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|f(x)| \leq \sqrt{2}$

គេមាន $f(x)+\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)=\sin x+3\cos x \quad (1)$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{4}-x$ ក្នុង (1) គេបាន :

$$f(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{2}f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}-x)+3\cos(\frac{\pi}{4}-x)$$

$$f(\frac{\pi}{4}-x)+\sqrt{2}f(x)=\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\cos x$$

$$\sqrt{2}f(\frac{\pi}{4}-x)+2f(x)=2\sin x+4\cos x \quad (2)$$

ដកសមីការ (2) និង (1) អង្គ និងអង្គគេបាន $f(x)=\sin x+\cos x$

ហេតុនេះ $|f(x)| \leq \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sqrt{2}$

ដូចនេះ $|f(x)| \leq \sqrt{2}$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

លំហាត់ទី៨

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$2f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

កំណត់ចំនួនពិត r និង φ ដើម្បីឱ្យអនុគមន៍ $f(x)$ អាចសរសេរ :

$f(x)=r\sin(x+\varphi)$ គ្រប់ $x \in IR$ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត r និង φ

គេមាន $2f(\frac{\pi}{2}-x)+f(\frac{\pi}{2}+x)=\sin x+3\sqrt{3}\cos x$ (1)

ជំនួស x ដោយ $-x$ គេបាន :

$$2f(\frac{\pi}{2}+x)+f(\frac{\pi}{2}-x)=-\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

$$4f(\frac{\pi}{2}+x)+2f(\frac{\pi}{2}-x)=-2\sin x+6\sqrt{3}\cos x \quad (2)$$

ដកសមីការ (2) និង (1) អង្គ និងអង្គគេបាន

$$3f(\frac{\pi}{2}+x)=-3\sin x+3\sqrt{3}\cos x$$

ឬ $f(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ (3)

ជំនួស x ដោយ $-\frac{\pi}{2}+x$ គេបាន :

$$f(x)=-\sin(-\frac{\pi}{2}+x)+\sqrt{3}\cos(-\frac{\pi}{2}+x)$$

$$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$$

$$f(x)=2(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)$$

$$f(x)=2(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos x)$$

$$f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$$

ដោយប្រៀបធៀបជាមួយនឹង $f(x)=r\sin(x+\varphi)$

ដូចនេះ $r=2$; $\varphi=\frac{\pi}{6}$ ។

លំហាត់ទី៩

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$5f(x) - 3\sin x\ f(\pi - x) = 4\cos x$$

ចូររកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$

ដំណោះស្រាយ

រកតម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $f(x)$

$$5f(x) - 3\sin x\ f(\pi - x) = 4\cos x \quad (1)$$

ជំនួស x ដោយ $\pi - x$ ក្នុង (1) គេបាន :

$$5f(\pi - x) - 3\sin(\pi - x).f(x) = 4\cos(\pi - x)$$

$$5f(\pi - x) - 3\sin x.f(x) = -4\cos x$$

$$f(\pi - x) - \frac{3\sin x}{5}.f(x) = -\frac{4\cos x}{5}$$

$$3\sin x.f(\pi - x) - \frac{9\sin^2 x}{5}f(x) = -\frac{12\sin x\cos x}{5} \quad (2)$$

បូកសមីការ (1) និង (2) គេបាន :

$$\left(5 - \frac{9\sin^2 x}{5}\right)f(x) = \frac{4\cos x(5 - 3\sin x)}{5}$$

$$f(x) = \frac{4\cos x(5 - 3\sin x)}{(25 - 9\sin^2 x)}$$

$$f(x)=\frac{4\cos x(5-3\sin x)}{(5+3\sin x)(5-3\sin x)}$$

$$f(x)=\frac{4\cos x}{5+3\sin x}$$

$$(5+3\sin x)f(x)=4\cos x$$

$$5f(x)+3f(x)\sin x=4\cos x$$

$$4\cos x-3f(x)\sin x=5f(x)\quad(1)$$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេបាន :

$$|4\cos x-3f(x)\sin x|\le\sqrt{16+9f^2(x)}\quad(2)$$

តាម (1) និង (2) គេបាន :

$$|5f(x)|\le\sqrt{16+9f^2(x)}$$

$$25f^2(x)\le16+9f^2(x)$$

$$f^2(x)\le1$$

$$|f(x)|\le1\Leftrightarrow-1\le f(x)\le1$$

ដូចនេះ $f_{\min}(x)=-1$ និង $f_{\max}(x)=1$ ។

លំហាត់ទី១០

គេឱ្យអនុគមន៍ f និង g កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$\begin{cases} f(x)+g(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin x \\ 3f(\frac{\pi}{2}-x)-g(x)=2\cos x \end{cases}$$

ចូររកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

ដំណោះស្រាយ

រកអនុគមន៍ $f(x)$ និង $g(x)$

គេមាន $\begin{cases} f(x)+g(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin x & (1) \\ 3f(\frac{\pi}{2}-x)-g(x)=2\cos x & (2) \end{cases}$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2}-x$ ក្នុង (2) គេបាន :

$$3f(x)-g(\frac{\pi}{2}-x)=2\cos(\frac{\pi}{2}-x)$$

$$3f(x)-g(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin x \quad (3)$$

បូកសមីការ $(1)\,\&\,(3)$ គេបាន $4f(x)=4\sin x$

គេទាញ $f(x) = \sin x$ ។

តាម (1) គេទាញបាន $g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin x - f(x) = \sin x$

ជំនួស x ដោយ $\frac{\pi}{2} - x$ គេបាន $g(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

ដូចនេះ $f(x) = \sin x$; $g(x) = \cos x$ ។

លំហាត់ទី១១

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in (-1,1)$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$f(x) - 2f(-x) = \ln(\frac{1-3x+3x^2-x^3}{1+3x+3x^2+x^3})$$

ចូររក $f(\cos\theta)$ ជាអនុគមន៍នៃ $t = \tan\frac{\theta}{2}$ ដែល $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ដំណោះស្រាយ

រក $f(\cos\theta)$ ជាអនុគមន៍នៃ $t = \tan\frac{\theta}{2}$

គេមាន $f(x) - 2f(-x) = \ln(\frac{1-3x+3x^2-x^3}{1+3x+3x^2+x^3})$

$$f(x) - 2f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3$$

$$f(x) - 2f(-x) = 3\ln(\frac{1-x}{1+x}) \quad (1)$$

ជំនួស x ដោយ $-x$ ក្នុង (1) គេបាន :

$$f(-x) - 2f(x) = 3\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

$$2f(-x) - 4f(x) = -6\ln(\frac{1-x}{1+x}) \quad (2)$$

បូកសមីការ **(1)** និង **(2)** គេបាន :

$$-3f(x) = -3\ln(\frac{1-x}{1+x})$$

$$f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+x})$$

ហេតុនេះ $f(\cos\theta) = \ln(\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta})$

$$= \ln(\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}})$$

$$= \ln(\tan^2\frac{\theta}{2})$$

$$= 2\ln|\tan\frac{\theta}{2}|$$

ដោយ $t = \tan\frac{\theta}{2}$ ដូចនេះ $f(\cos\theta) = \ln|t|$ ។

លំហាត់ទី១២

គេឱ្យអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ $x \in IR$ ដោយទំនាក់ទំនង :

$$f(x)+3f(-x)+8=4(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2$$

ចូរគណនាលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x^2}$

ដំណោះស្រាយ

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x^2}$

គេមាន $\mathbf{f(x)+3f(-x)+8=4(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2}$ **(1)**

ជំនួស $\mathbf{x}$ ដោយ $\mathbf{-x}$ ក្នុងទំនាក់ទំនង **(1)** គេបាន :

$$\mathbf{f(-x)+3f(x)+8=4(e^{-\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}})^2}$$

$$\mathbf{3f(-x)+9f(x)+24=12(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2} \quad \mathbf{(2)}$$

ធ្វើផលដកសមីការ **(2) & (1)** គេបាន :

$$\mathbf{8f(x)+16=8(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}})^2}$$

$$\mathbf{\Rightarrow f(x)=e^{x}+e^{-x}}$$

យើងបាន $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{e^x}-2}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{x^2e^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2.\frac{1}{e^x}=1$$

ដូចនេះ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x^2}=1$ ។

លំហាត់ទី១៣

គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f : IR \mapsto IR}$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ (x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2) \end{cases}$$

ក. កំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$

ខ. កំណត់ $\mathbf{x}$ ដើម្បីឱ្យ $\mathbf{f(x) = \sqrt{3}}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំណត់រកអនុគមន៍ $\mathbf{f(x)}$

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2) \quad (1)$$

យក $\mathbf{x = 1 , y = 1}$ ជំនួសក្នុង $\mathbf{(1)}$ គេបាន :

$\mathbf{-2f(0) = 0}$ នាំឱ្យ $\mathbf{f(0) = 0}$

តាង $\mathbf{x + y = u}$ និង $\mathbf{x - y = v}$ នោះ $\begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$

ទំនាក់ទំនង $\mathbf{(1)}$ អាចសរសេរ :

$$uf(v) - vf(u) = uv(u^2 - v^2)$$

ចែកសមីការនេះនឹង $\mathbf{uv \neq 0}$ គេបាន :

$$\frac{f(v)}{v}-\frac{f(u)}{u}=u^2-v^2$$

$$\frac{f(u)}{u}-u^2=\frac{f(v)}{v}-v^2$$

តាមទំនាក់ទំនងនេះបញ្ជាក់ថា $\frac{f(x)}{x}-x^2$ ជាអនុគមន៍ថេរគ្រប់ $x\neq 0$

គេទាញ $\frac{f(x)}{x}-x^2=\frac{f(1)}{1}-1^2=-3$

ដូចនេះ $f(x)=x(x^2-3)$ ។

ខ. កំណត់ x ដើម្បីឱ្យ $f(x)=\sqrt{3}$

គេបាន $x(x^2-3)=\sqrt{3}$

$x^3-3x=\sqrt{3}$ តាង $x=2\cos\varphi$ គេបាន

$8\cos^3\varphi-6\cos\varphi=\sqrt{3}$

$2\cos 3\varphi=\sqrt{3}$

$$3\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad ,k=0,1,2$$

គេទាញ $\varphi\in\{\frac{\pi}{18},\frac{13\pi}{18},\frac{25\pi}{18}\}$

ដូចនេះ $x_1=2\cos\frac{\pi}{18}, x_2=2\cos\frac{13\pi}{18}, x_3=2\cos\frac{25\pi}{18}$

លំហាត់ទី១៤

ចំពោះ a និង b ជាចំនួនពិត សមីការ

$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ មានឬសយ៉ាងតិច

មួយជាចំនួនពិត ។

ចូរគណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2 ? **(IMO 1973)**

ដំណោះស្រាយ

គណនាតម្លៃតូចបំផុតនៃ a^2+b^2

គេមាន $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$

ចែកអង្គទាំងពីរនៃសមីការនេះ នឹង $x^2\neq 0$ គេបាន :

$$x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+a(x+\frac{1}{x})+b=0$$

$$(x+\frac{1}{x})^2+a(x+\frac{1}{x})+b-2=0$$

តាង $z=x+\frac{1}{x}$ សមីការនេះអាចសរសេរ :

$z^2+az+b-2=0$ ឬ $az+b=2-z^2$ (1)

តាមវិសមភាព **Cauchy – Schwarz** គេមាន :

$$(az+b)^2 \le (a^2+b^2)(z^2+1) \quad (2)$$

តាម **(1) & (2)** គេបាន :

$$(a^2+b^2)(z^2+1) \ge (2-z^2)^2$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{(2-z^2)^2}{z^2+1}$$

$$a^2+b^2 \ge \frac{[3-(1+z^2)]^2}{z^2+1}$$

$$a^2+b^2 \ge z^2-5+\frac{9}{z^2+1}$$

យក $t = z^2$ ដោយ $z = x+\frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

នោះ $|z| \ge \frac{|x^2+1|}{|x|} \ge \frac{|2x|}{|x|} = 2$ ហើយ $t = z^2 = |z|^2 \ge 4$

គេបាន $a^2+b^2 \ge t-5+\frac{9}{t+1}$

តាងអនុគមន៍ $f(t) = t-5+\frac{9}{t+1}$

គេបាន $f'(t) = 1-\frac{9}{(t+1)^2} = \frac{(t+4)(t-2)}{(t+1)^2} > 0 \; \forall t \ge 4$

គេទាញបាន $\mathbf{f(t)}$ ជាអនុគមន៍កើនគ្រប់ $\mathbf{t \geq 4}$ ។

តាមលក្ខណៈនៃអនុគមន៍កើនគេបាន $\mathbf{f(t) \geq f(4)}$

តែ $\mathbf{f(4) = 4 - 5 + \frac{9}{4+1} = -1 + \frac{9}{5} = \frac{4}{5}}$ នោះ $\mathbf{f(t) \geq \frac{4}{5}}$

គេទាញបាន $\mathbf{a^2 + b^2 \geq f(t) \geq \frac{4}{5}}$

ដូចនេះ តម្លៃតូចបំផុតនៃ $\mathbf{a^2 + b^2}$ ស្មើនឹង $\mathbf{\frac{4}{5}}$ ។

លំហាត់ទី១៥

គេឱ្យអនុគមន៍លេខ $\mathbf{f}$ កំនត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$\mathbf{f(1)=\frac{7}{5}}$ និង $\mathbf{f(n+1)=\frac{13f(n)-16}{9f(n)-11}}$ ដែល $\mathbf{n=1,2,3,...}$

ចូរស្រាយថា $\mathbf{f(n)}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\mathbf{f(n)}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន :

សមីការសម្គាល់ $\mathbf{r=\frac{13r-16}{9r-11}}$

$$\mathbf{9r^2-11r=13r-16}$$

$$\mathbf{9r^2-24r+16=0}$$

$$\mathbf{(3r-4)^2=0\Rightarrow r=\frac{4}{3}}$$

តាងស្វ៊ីតជំនួយ $\mathbf{z_n=\frac{1}{f(n)-\frac{4}{3}}}$

គេបាន $\mathbf{z_{n+1}=\frac{1}{f(n+1)-\frac{4}{3}}}$ ដោយ $\mathbf{f(n+1)=\frac{13f(n)-16}{9f(n)-11}}$

នោះ $z_{n+1} = \dfrac{1}{\dfrac{13f(n)-16}{9f(n)-11} - \dfrac{4}{3}}$

$= \dfrac{9f(n)-11}{\dfrac{39f(n)-48-36f(n)+44}{3}}$

$= \dfrac{9f(n)-11}{f(n)-\dfrac{4}{3}}$

គេមាន $z_{n+1} - z_n = \dfrac{9f(n)-11}{f(n)-\dfrac{4}{3}} - \dfrac{1}{f(n)-\dfrac{4}{3}} = 9$ ថេរ

នាំឱ្យ (z_n) ជាស្វ៊ីតនព្វន្តមានផលសងរួម $d = 9$ និង $z_1 = \dfrac{1}{f(1)-\dfrac{4}{3}}$

តែ $f(1) = \dfrac{7}{5}$ នោះ $z_1 = \dfrac{1}{\dfrac{7}{5}-\dfrac{4}{3}} = 15$ ។

គេបាន $z_n = z_1 + (n-1)d = 15 + 9(n-1) = 9n+6$

ហើយ $z_n = \dfrac{1}{f(n)-\dfrac{4}{3}}$ នោះ $f(n) = \dfrac{1}{z_n} + \dfrac{4}{3}$

$$f(n) = \frac{1}{9n+6} + \frac{4}{3} = \frac{1+4(3n+2)}{3(3n+2)} = \frac{4n+3}{3n+2}$$

តាង $\mathbf{GCD(4n+3, 3n+2) = d}$

គេបាន $\begin{cases} 4n+3 = dp \\ 3n+2 = dq \end{cases}$ ដែល $\mathbf{GCD(p,q) = 1}$

គេមាន $\mathbf{3(4n+3) - 4(3n+2) = 3dp - 4dq}$

$$\mathbf{1 = (3p - 4q)d}$$

គេទាញបាន $\mathbf{1}$ ចែកដាច់នឹង $\mathbf{d}$ នោះ $\mathbf{d = 1}$

នាំឱ្យ$\mathbf{GCD(4n+3, 3n+2) = 1}$ ។

ដូចនេះ $\mathbf{f(n) = \frac{4n+3}{3n+2}}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបាន ។

លំហាត់ទី១៦

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) កំណត់ដោយ :

$u_1 = \frac{7}{2}$ និង $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$ គ្រប់ $n \geq 1$

បង្ហាញថាគេអាចកំណត់ចំនួនពិត a ដែល $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$

ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ រួចគណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ចំនួនពិត a

គេមាន $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$ (1)

ហើយ $u_{n+1} + a = (u_n + a)^2$ (2)

យក (1) ជំនួសក្នុង (2) គេបាន :

$$u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = (u_n + a)^2$$

$$u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + a = u_n^2 + 2au_n + a^2$$

$$(1 - 2a)u_n = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

សមីការនេះពិតជានិច្ចចំពោះគ្រប់តម្លៃ n លុះត្រាតែ :

$$\begin{cases} 1-2a=0 \\ a^2-a+\frac{1}{4}=0 \end{cases}$$ នាំឱ្យ $a=\frac{1}{2}$

ដូចនេះ $a=\frac{1}{2}$ ។

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ចំពោះ $a=\frac{1}{2}$ គេបាន $u_{n+1}+\frac{1}{2}=(u_n+\frac{1}{2})^2$

គេទាញ $\ln(u_{n+1}+\frac{1}{2})=2\ln(u_n+\frac{1}{2})$ (3)

តាង $v_n=\ln(u_n+\frac{1}{2}) \Rightarrow v_{n+1}=\ln(u_{n+1}+\frac{1}{2})$

តាម (3) គេបាន $v_{n+1}=2v_n$ នាំឱ្យ (v_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ

មានផលធៀបរួម $q=2$ និង $v_1=\ln(u_1+\frac{1}{2})=\ln 4$

គេបាន $v_n=v_1\times q^{n-1}=2^{n-1}\ln 4=2^n\ln 2=\ln 2^{2^n}$

ដោយ $v_n=\ln(u_n+\frac{1}{2})$ គេទាញ $u_n+\frac{1}{2}=2^{2^n}$

ដូចនេះ $v_n=2^{2^n}-\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី១៧

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\cos\varphi}+i\sqrt{2+\sin\varphi}$ ដែល $\varphi\in IR$

ក្នុងប្លង់កំផ្លិច $(o,\vec{i},\vec{j})$ គេហៅ M ជាចំនុចរូបភាពនៃ z ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $r=OM$?

ដំណោះស្រាយ

កំណត់តម្លៃតូចបំផុត និង ធំបំផុតនៃ $r=OM$

គេមាន :

$$OM^2=a^2+b^2=(\sqrt{2+\cos\varphi})^2+(\sqrt{2+\sin\varphi})^2$$

$OM^2=4+\cos\varphi+\sin\varphi$ ឬ $OM=\sqrt{4+\cos\varphi+\sin\varphi}$

គេបាន $r=\sqrt{4+\cos\varphi+\sin\varphi}$

តាមវិសមភាព $Cauchy-Schwarz$ គេមាន :

$$|\cos\varphi+\sin\varphi|\le\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\sqrt{2}$$

ឬ $-\sqrt{2}\le\cos\varphi+\sin\varphi\le\sqrt{2}$

គេទាញ $\sqrt{4-\sqrt{2}}\le r\le\sqrt{4+\sqrt{2}}$ គ្រប់ $\varphi\in IR$

ដូចនេះ $r_{min}=\sqrt{4-\sqrt{2}}$ និង $r_{max}=\sqrt{4+\sqrt{2}}$ ។

លំហាត់ទី១៨

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច z_1, z_2, z_3 ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង :

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ និង $\frac{z_1^2}{z_2 z_3} + \frac{z_2^2}{z_1 z_3} + \frac{z_3^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

ចូរស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$

គេមាន $\frac{z_1^2}{z_2 z_3} + \frac{z_2^2}{z_1 z_3} + \frac{z_3^2}{z_1 z_2} + 1 = 0$

គេបាន $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_1 z_2 z_3 = 0$

ឬ $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 - 3z_1 z_2 z_3 = -4z_1 z_2 z_3$

តាង $z = z_1 + z_2 + z_3$ គេបាន :

$$z^3 - 3z(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3) = -4z_1 z_2 z_3$$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3 \left[3z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) - 4 \right]$$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3 \left[3z(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}) - 4 \right]$$

$$z^3 = z_1 z_2 z_3 (3z.\overline{z} - 4) = z_1 z_2 z_3 \left(3|z|^2 - 4\right)$$

គេបាន $|z|^3 = |z_1 z_2 z_3 (3|z|^2 - 4)|$

ឬ $|z|^3 = |3|z|^2 - 4|$

-បើ $3|z|^2 - 4 \geq 0$ ឬ $|z| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$

គេបាន $|z|^3 = 3|z|^2 - 4$

$$|z|^3 - 3|z|^2 + 4 = 0$$

$$(|z|+1)(|z|-2)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 2$$

-បើ $3|z|^2 - 4 < 0$ ឬ $|z| < \frac{2}{\sqrt{3}}$

គេបាន $|z|^3 = -(3|z|^2 - 4)$

$$|z|^3 + 3|z|^2 - 4 = 0$$

$$(|z|-1)(|z|+2)^2 = 0 \Rightarrow |z| = 1$$

ដូចនេះ $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{1, 2\}$ ។

លំហាត់ទី១៩

គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $\mathbf{z_1}$ និង $\mathbf{z_2}$ ដែល $|\mathbf{z_1}|=|\mathbf{z_2}|=\mathbf{1}$

ចូរស្រាយថា $|\mathbf{z_1}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_2}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_1 z_2}+\mathbf{1}|\geq \mathbf{2}$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $|\mathbf{z_1}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_2}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_1 z_2}+\mathbf{1}|\geq \mathbf{2}$

តាមវិសមភាពត្រីកោណ $|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|\geq|\mathbf{a}\pm\mathbf{b}|$ គេបាន :

$|\mathbf{z_2}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_1 z_2}+\mathbf{1}|\geq|\mathbf{z_2}+\mathbf{1}-\mathbf{z_1 z_2}-\mathbf{1}|$

$|\mathbf{z_2}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_1 z_2}+\mathbf{1}|\geq|\mathbf{z_2}||\mathbf{1}-\mathbf{z_1}|=|\mathbf{1}-\mathbf{z_1}|$

ហើយ $|\mathbf{z_1}+\mathbf{1}|+|\mathbf{1}-\mathbf{z_1}|\geq|(\mathbf{z_1}+\mathbf{1}+\mathbf{1}-\mathbf{z_1})|=\mathbf{2}$

ដូចនេះ $|\mathbf{z_1}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_2}+\mathbf{1}|+|\mathbf{z_1 z_2}+\mathbf{1}|\geq \mathbf{2}$ ។

លំហាត់ទី២០

គេឱ្យស្វ៊ីតចំនួនពិត (a_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \text{ , } a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{ , } n = 1 \text{ , } 2 \text{ , } 3 \text{ ,...} \end{cases}$$

គេតាងស្វ៊ីតចំនួនកុំផ្លិច $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$ ។

ក. ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ។

ខ. ចូរដាក់ $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្ររួចទាញរក z_n ជាអនុគមន៍

នៃ n ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n ។ តើ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា $z_{n+1} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} z_n$ ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$

គេបាន $z_{n+1} = a_{n+2} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_{n+1}$

ដោយ $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

គេបាន $z_{n+1}=a_{n+1}-a_n-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}a_{n+1}-a_n$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1}-\frac{2}{1+i\sqrt{3}}a_n)$$

$$=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(a_{n+1}-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_n)$$

ដូចនេះ $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ ។

ខ. ដាក់ $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ :

គេបាន $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

ទាញរក z_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

ដោយ $z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n$ នោះ (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួន

កុំផ្លិចដែលមានរេសុង $q=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

និងតួ $z_1=a_2-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}a_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

តាមរូបមន្ត $z_n = z_1 \times q^{n-1} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^n$

តាមរូបមន្តដឺម័រគេបាន $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$ ។

គ. ទាញរកតួទូទៅនៃស្វ៊ីត a_n

គេមាន $z_n = a_{n+1} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} a_n$

គេបាន $z_n = (a_{n+1} - \frac{a_n}{2}) + i\frac{\sqrt{3}}{2} a_n \quad (1)$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{3} + i.\sin\frac{n\pi}{3} \quad (2)$

តាមទំនាក់ទំនង $(1) \& (2)$ គេបាន $\frac{\sqrt{3}}{2} a_n = \sin\frac{n\pi}{3}$

ដូចនេះ $a_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{n\pi}{3}$ ។

ហើយ (a_n) ជាស្វ៊ីតខួបដែលមានខួប $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ ។

លំហាត់ទី២១

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច (z_n) កំណត់ដោយ :

$$z_1 = \frac{2+\sqrt{3}+i}{2} \text{ និង } z_{n+1} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \frac{2-\sqrt{3}-i}{2}$$

ដែល $n = 1, 2, 3, \ldots$ ។

ក. តាង $w_n = z_n - 1$ ។ បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $w_n = z_n - 1$

គេបាន $w_{n+1} = z_{n+1} - 1$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2} z_n + \frac{2-\sqrt{3}-i}{2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}+i}{2}(z_n - 1) = \frac{\sqrt{3}+i}{2} w_n$$

ដូចនេះ (w_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា w_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $w_n = w_1 \times q^{n-1}$

ដោយ $w_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

និង $q = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

គេបាន $w_n = (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})^n$

ដូចនេះ $w_n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. ទាញបង្ហាញថា $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$

គេមាន $w_n = z_n - 1$ នោះ $z_n = 1 + w_n$

$$z_n = 1 + \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$$

$$= 2\cos^2\frac{n\pi}{12} + 2i.\sin\frac{n\pi}{12}\cos\frac{n\pi}{12}$$

$$= 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$$

ដូចនេះ $z_n = 2\cos\frac{n\pi}{12}(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12})$ ។

លំហាត់ទី២២

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ និង } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ដែល } n \geq 1$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច រួចគណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n ដោយសរសេរលទ្ធផលជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. ស្រាយថា (z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច :

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + i.v_{n+1}$

$$= \frac{u_n - v_n}{\sqrt{2}} + i.\frac{u_n + v_n}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}(u_n + iv_n) = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1} z_n$$

ដូចនេះ(z_n) ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រនៃចំនួនកុំផ្លិច ។

គណនា z_n ជាអនុគមន៍នៃ n :

គេបាន $z_n = z_1 \times q^{n-1}$

តែ $z_1 = u_1 + iv_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

និង $q = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}$

គេបាន $z_n = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^n$

ដូចនេះ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$ (រូបមន្តដឺម័រ)

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

ដោយ $z_n = \cos\frac{n\pi}{4} + i.\sin\frac{n\pi}{4}$

ដូចនេះ $u_n = \cos\frac{n\pi}{4}$ និង $v_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ ។

លំហាត់ទី២៣

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (u_n) និង (v_n) កំណត់ដោយ :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{និង} \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 - v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad \text{ដែល } n \geq 0$$

ក. គេពិនិត្យស្វ៊ីតនៃចំនួនកុំផ្លិច $z_n = u_n + i.v_n$ ។

ចូរស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^2$ រួចទាញថា $z_n = z_0^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក.ស្រាយថា $z_{n+1} = z_n^2$ រួចទាញថា $z_n = z_0^{2^n}$:

គេមាន $z_n = u_n + i.v_n$

គេបាន $z_{n+1} = u_{n+1} + iv_{n+1}$

$$= u_n^2 - v_n^2 + 2iu_n v_n$$

$$= u_n^2 + 2iu_n v_n + (iv_n)^2$$

$$= (u_n + iv_n)^2$$

ដូចនេះ $z_{n+1} = z_n^2$ ។

ម្យ៉ាងទៀតបើ $n=0$ នោះ $z_1 = {z_0}^2$

បើ $n=1$ នោះ $z_2 = {z_1}^2 = {z_0}^4$

បើ $n=2$ នោះ $z_3 = {z_2}^2 = {z_0}^8$

ឧបមាថាវាពិតដល់តួទី k គឺ $z_k = {z_0}^{2^k}$

យើងនឹងស្រាយថាវាពិតដល់តួទី $k+1$ គឺ $z_{k+1} = {z_0}^{2^{k+1}}$

គេមាន $z_{k+1} = {z_k}^2$ តែតាមការឧបមា $z_k = {z_0}^{2^k}$

គេបាន $z_{k+1} = ({z_0}^{2^k})^2 = {z_0}^{2^{k+1}}$ ពិត ។

ដូចនេះ $z_n = {z_0}^{2^n}$ ។

ខ. សំដែង u_n និង v_n ជាអនុគមន៍នៃ n

គេមាន $z_n = {z_0}^{2^n}$ ដោយ $z_0 = u_0 + iv_0 = 1 + i\sqrt{3}$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

គេបាន $z_n = 2^{2^n}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{2^n}$

$$= 2^{2^n}(\cos\frac{2^n\pi}{3} + i\sin\frac{2^n\pi}{3})$$

ដូចនេះ $u_n = 2^{2^n}\cos\frac{2^n\pi}{3}$; $v_n = 2^{2^n}\sin\frac{2^n\pi}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៤

គេឱ្យស្វ៊ីតនៃចំនួនពិត (I_n) កំណត់ដោយ :

$$I_0=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}\ ,\ I_1=\int_0^1\frac{e^x dx}{1+e^x},...,I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}.dx$$

ដែល n ជាចំនួនគត់ធម្មជាតិ ។

ក. គណនា $I_0+I_1;I_1$ រួចទាញរកតម្លៃនៃ I_0 ។

ខ. គណនា I_n+I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ I_2 និង I_3 ។

គ. ចំពោះ $x\in[0,1]$ ចូរប្រៀបធៀបតម្លៃ e^{nx} និង $e^{(n+1)x}$ ។

បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតកើន ដោយមិនចាំបាច់គណនា I_n ។

ឃ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ គេមាន $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^x}\le\frac{1}{2}$

រួចទាញរកកន្សោមអមនៃ I_n តាមការគណនា $\int_0^1 e^{nx}.dx$ ។

តើស្វ៊ីត (I_n) មានលីមីតឬទេ ?

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា $I_0+I_1;I_1$ រួចទាញរកតម្លៃនៃ I_0

គេបាន $I_0+I_1=\int_0^1\frac{dx}{1+e^x}+\int_0^1\frac{e^x dx}{1+e^x}$

$$I_0+I_1=\int_0^1\frac{(1+e^x)}{1+e^x}.dx=\int_0^1 dx=1-0=1$$

ដូចនេះ $I_0+I_1=1$ ។

គេបាន $I_1=\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}.dx=\int_0^1\frac{(1+e^x)'.dx}{1+e^x}$

$$=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^1=\ln(1+e)-\ln 2=\ln(\frac{1+e}{2})$$

ដូចនេះ $I_1=\ln(\frac{1+e}{2})$ ។

ហើយ $I_0=1-I_1=1-\ln(\frac{1+e}{2})=\ln(\frac{2e}{1+e})$ ។

ខ. គណនា I_n+I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃ I_2 និង I_3

គេមាន $I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}.dx$ និង $I_{n+1}=\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}.dx$

គេបាន $I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}.dx=\int_0^1 e^{nx}dx$

$$=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^1=\frac{e^n-1}{n}\ ;\ n\neq 0$$

ដូចនេះ $I_n+I_{n+1}=\frac{e^n-1}{n}$ ចំពោះគ្រប់ $n\geq 1$ ។

បើ $\mathbf{n=1}$ គេបាន $\mathbf{I_1+I_2=e-1}$ ដោយ $\mathbf{I_1=\ln(\frac{1+e}{2})}$

គេបាន $\mathbf{I_2=e-1-\ln(\frac{e+1}{2})}$ ។

បើ $\mathbf{n=2}$ គេបាន $\mathbf{I_2+I_3=\frac{e^2-1}{2}}$

គេទាញ $\mathbf{I_3=\frac{e^2-1}{2}-(e-1)+\ln(\frac{e+1}{2})}$

ដូចនេះ $\mathbf{I_3=\frac{(e-1)^2}{2}+\ln(\frac{e+1}{2})}$ ។

គ. ប្រៀបធៀបតម្លៃ $\mathbf{e^{nx}}$ និង $\mathbf{e^{(n+1)x}}$

គេមាន $\mathbf{e^{(n+1)x}-e^{nx}=e^{nx}(e^x-1)}$

ចំពោះ $\mathbf{x\in[0,1]}$ គេមាន $\mathbf{e^{nx}>0}$ និង $\mathbf{e^x-1\geq 0}$

គេបាន $\mathbf{e^{(n+1)x}-e^{nx}=e^{nx}(e^x-1)\geq 0}$

ដូចនេះ $\mathbf{e^{(n+1)x}\geq e^{nx}}$ ។

បង្ហាញថា $\mathbf{(I_n)}$ ជាស្វ៊ីតកើន ដោយមិនចាំបាច់គណនា $\mathbf{I_n}$:

ដោយ $\mathbf{e^{(n+1)x}\geq e^{nx}}$ គ្រប់ $\mathbf{x\in[0,1]}$ គេបាន :

$\mathbf{\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}\geq\frac{e^{nx}}{1+e^x}}$ នោះ $\mathbf{\int_0^1\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}.dx\geq\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}.dx}$

ដូចនេះ $\mathbf{I_{n+1}\geq I_n}$ នាំឱ្យ $\mathbf{(I_n)}$ ជាស្វ៊ីតកើន ។

ឃ. បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ $x\in[0,1]$ គេមាន $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^{x}}\le\frac{1}{2}$

ចំពោះ $x\in[0,1]$ គេបាន $2\le 1+e^{x}\le 1+e\le 4$

គេទាញបាន $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^{x}}\le\frac{1}{2}$ ។

ទាញរកកន្សោមអមនៃ I_n តាមការគណនា $\int_0^1 e^{nx}.dx$:

ដោយ $\frac{1}{4}\le\frac{1}{1+e^{x}}\le\frac{1}{2}$ នោះ $\frac{1}{4}e^{nx}\le\frac{e^{nx}}{1+e^{x}}\le\frac{1}{2}e^{nx}$

$$\int_0^1 \frac{1}{4}e^{nx}dx\le\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^{x}}.dx\le\int_0^1 \frac{1}{2}e^{nx}.dx$$

ដូចនេះ $\frac{e^{n}-1}{4n}\le I_n\le\frac{e^{n}-1}{2n}$ គ្រប់ $n\ge 1$ ។

ដោយ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{e^{n}-1}{n}=+\infty$ នោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$ ។

លំហាត់ទី២៥

គេឱ្យស្វ៊ីត $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}.dx$ ដែល $n \geq 0$

ក. បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរស្រាយថា $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n-1)}$ ចំពោះ $n \geq 2$

រួចរក $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ

គ្រប់ $x \in [0,1]$ គេមាន $x^{n+1} \leq x^n$

ចែកអង្គទាំងពីរនឹង $1+x+x^2 > 0$ គេបាន :

$$\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2}.dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}.dx$$

$$I_{n+1} \leq I_n$$

ដូចនេះ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះ ។

ខ. គណនា $I_n + I_{n+1} + I_{n+2}$ ជាអនុគមន៍នៃ n

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1} + x^{n+2}}{1+x+x^2}.dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(1+x+x^2)}{1+x+x^2}.dx$$

$$= \int_0^1 x^n.dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ដូចនេះ $I_n + I_{n+1} + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$ ។

គ.ស្រាយថា $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$ រួចរក $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

ដោយ (I_n) ជាស្វ៊ីតចុះនោះចំពោះគ្រប់ $n \ge 2$ គេមាន

$$I_n + I_{n+1} + I_{n+2} \le 3I_n \le I_{n-2} + I_{n-1} + I_n$$

$$\frac{1}{n+1} \le 3I_n \le \frac{1}{n-1}$$

ដូចនេះ $\dfrac{1}{3(n+1)} \le I_n \le \dfrac{1}{3(n-1)}$ និង $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \dfrac{1}{3}$ ។

លំហាត់ទី២៦

គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int_0^{\pi} x\sin x\cos^6 x.dx}$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $\mathbf{I=\int_0^{\pi} x\sin x\cos^6 x.dx}$

តាង $\mathbf{x=\pi-t}$ នោះ $\mathbf{dx=-dt}$

ចំពោះ $\mathbf{x=0}$ គេបាន $\mathbf{t=\pi}$

ចំពោះ $\mathbf{x=\pi}$ គេបាន $\mathbf{t=0}$

អាំងតេក្រាលអាចសរសេរ :

$$\mathbf{I=\int_{\pi}^{0}(\pi-t)\sin(\pi-t)\cos^6(\pi-t)(-dt)}$$

$$\mathbf{I=\int_0^{\pi}(\pi-t)\sin t\cos^6 tdt=\pi\int_0^{\pi}\sin t\cos^6 tdt-I}$$

$$\mathbf{2I=\pi\int_0^{\pi}\sin t\cos^6 tdt=\pi\left[-\frac{1}{7}\cos^7 t\right]_0^{\pi}=\frac{2\pi}{7}}$$

ដូចនេះ $\mathbf{I=\frac{\pi}{7}}$ ។

លំហាត់ទី២៧

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+1}.dx$

ដំណោះស្រាយ

គណនា $I=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+1}.dx$

គេបាន $I=\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^4+1}.dx=\int_0^1 \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(x^2+\frac{1}{x^2})}.dx$

$$=\int_0^1 \frac{(x+\frac{1}{x})'}{(x+\frac{1}{x})^2-(\sqrt{2})^2}.dx=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|\right]_0^1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}})$$

ដូចនេះ $I=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}-1)$ ។

លំហាត់ទី២៨

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^4 dx}{x^n + a^n}$ ដែល $a > 0$ ។

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a រួចគណនា I_n ចំពោះតម្លៃនៃ a ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

គេមាន $I_n = \int_0^a \frac{x^4 dx}{x^n + a^n}$ ដែល $a > 0$

តាង $x = at$ នោះ $dx = a.dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 0$ និង បើ $x = a$ នោះ $t = 1$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(at)^4.adt}{(at)^n + a^n} = a^{5-n} \int_0^1 \frac{t^4.dt}{t^n + 1}$

ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ $5 - n = 0$ នោះ $n = 5$ ។

ចំពោះ $n = 5$ គេបាន $I_5 = \int_0^1 \frac{t^4.dt}{t^5 + 1} = \frac{1}{5}\left[\ln|t^5 + 1|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{5}$

ដូចនេះ $n = 5$ និង $I_5 = \frac{\ln 2}{5}$ ។

លំហាត់ទី២៩

គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$ ដែល $a > 0$ ។

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a រួចគណនា I_n ចំពោះតម្លៃនៃ a ដែលបានរកឃើញខាងលើ ។

ដំណោះស្រាយ

កំណត់ n ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a

គេមាន $I_n = \int_0^a \frac{x^n dx}{\sqrt{x^4 + a^4}}$ ដែល $a > 0$

តាង $x = at$ នោះ $dx = a.dt$

បើ $x = 0$ នោះ $t = 0$ និង បើ $x = a$ នោះ $t = 1$

គេបាន $I_n = \int_0^1 \frac{(at)^n .adt}{\sqrt{(at)^4 + a^4}} = a^{n-1} \int_0^1 \frac{t^n .dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$

ដើម្បីឱ្យ I_n មិនអាស្រ័យនឹង a លុះត្រាតែ $n - 1 = 0$ នោះ $n = 1$ ។

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t.dt}{\sqrt{t^4 + 1}} = \frac{1}{2}\left[\ln|t^2 + \sqrt{t^4 + 1}|\right]_0^1 = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2}$$

ដូចនេះ $n = 1$ និង $I_1 = \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣០

ចូរស្រាយថា $\left|\int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}.dx\right| \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$

ដែល **a** និង **b** ជាពីរចំនួនពិត ។

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\left|\int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}.dx\right| \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$

គេមាន $\left|\int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}.dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}\right|.dx$

តាមវិសមភាព $\text{Cauchy} - \text{Schwarz}$ គ្រប់ $x \in IR$

គេមាន $|a\cos x + b\sin x| \le \sqrt{a^2+b^2}$

គេទាញ $\left|\int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}.dx\right| \le \int_0^1 \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{1+x^2}.dx$

ដោយ $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

ដូចនេះ $\left|\int_0^1 \frac{a\cos x + b\sin x}{1+x^2}.dx\right| \le \frac{\pi}{4}\sqrt{a^2+b^2}$ ។

លំហាត់ទី៣១

គេឱ្យស្វ៊ីត (u_n) នៃចំនួនពិតកំនត់លើ IN^* ដោយ :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \text{ ។}$$

ក. កំនត់ចំនួនពិត $A\ ,B\ ,C$ ដើម្បីឱ្យ

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \text{ ។}$$

ខ. តាង $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ ។ គណនា $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

គ. ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ គេតាង $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$

ដែល g ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$

និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$ ។

ចូរបង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ហើយទាញរក S'_n

និង $\lim_{n\to+\infty} S'_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. កំនត់ចំនួនពិត $A\ ,B\ ,C$ ដែល $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2}$

យើងបាន $1=A(n+1)(n+2)+B(n+2)n+C(n+1)n$

សមមូល $1=(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+2A$

គេទាញ $\begin{cases}2A=1\\ A+B+C=0\\ 3A+2B+C=0\end{cases}$

នាំឱ្យ $A=\frac{1}{2}\ ,\ B=-1\ ,\ C=\frac{1}{2}$ ។

ខ. គណនា $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

មាន $S_n=u_1+u_2+u_3+....+u_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_k)$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{2(k+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$$

ដូចនេះ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$ ។

គ. បង្ហាញថា $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$

ចំពោះគ្រប់ $n \in IN^*$ យើងមាន $V_n = u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx$

ដែល g ជាអនុគមន៍កំនត់ដោយ $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

និង $S'_n = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$

យើងបាន $S'_n = \sum_{k=1}^{n} (V_n) = \sum_{k=1}^{n} \left[u_n - \int_n^{n+1} g(x).dx \right]$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u_n) - \left[\int_1^2 g(x).dx + \int_2^3 g(x).dx + ... + \int_n^{n+1} g(x).dx \right]$$

ដូចនេះ $S'_n = S_n - \int_1^{n+1} g(x).dx$ ។

ម្យ៉ាងទៀតគេមាន $g(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$

មានលំនាំដូច $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

គេបាន $g(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)}$

ដោយ $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$ (តាមសម្រាយខាងលើ)

យើងបាន $S'_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} - \int_1^{n+1} \left[\frac{1}{2x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} \right].dx$

$$=\frac{1}{4}-\frac{n+2-n-1}{2(n+1)(n+2)}-\left[\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x+2|\right]_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2}\ln(n+1)+\ln(n+2)-\frac{1}{2}\ln(n+3)+\frac{1}{2}\ln 3-\ln 2$$

$$=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$$

ដូចនេះ $S'_n=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\ln\left[\frac{n+2}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}\right]$

និង $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n=\frac{1}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

លំហាត់ទី៣២

គណនាអាំងតេក្រាល :

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx \quad \text{និង} \quad I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$$

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}.dx$

តាង $u=\frac{\pi}{2}-x$ នាំឱ្យ $du=-dx$

បើ $x=\frac{\pi}{6}$ នោះ $u=\frac{\pi}{3}$ ហើយ $x=\frac{\pi}{3}$ នោះ $u=\frac{\pi}{6}$

គេបាន $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^n(\frac{\pi}{2}-u)}{\sin^n(\frac{\pi}{2}-u)+\cos^n(\frac{\pi}{2}-u)}(-du)$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n u}{\cos^n u+\sin^n u}.du=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}.dx=J$$

យើងបាន :

$$2I = 2J = I + J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

ដូចនេះ $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx = \frac{\pi}{12}$

និង $J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}.dx = \frac{\pi}{12}$

លំហាត់ទី៣៣

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍កំនត់ក្នុងចន្លោះ $[\,0\,;\,\pi]$

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

ខ. អនុវត្តន៍ ចូរគណនា $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.dx$

ដំណោះស្រាយ

កំបងខាញថា $\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$

តាង $u = \pi - x$ នាំឱ្យ$du = -dx$

ចំពោះ $x = 0$ នោះ $u = \pi$ និង ចំពោះ $x = \pi$ នោះ $u = 0$

គេបាន $\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - u)f[\sin(\pi - u)](-du)$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \int_0^{\pi} (\pi - u)f(\sin u)du$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin u)du - \int_0^{\pi} uf(\sin u).du$$

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x).dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x).dx$$

ដូចនេះ $\int_0^{\pi} xf(\sin x).dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x).dx$ ។

ខ. អនុវត្តន៏

គេមាន $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.dx=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{2-\sin^2 x}.dx=\int_0^{\pi}xf(\sin x).dx$

គេបាន $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.dx=\frac{\pi}{2}\left[-\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$ ។

ដូចនេះ $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}.dx=\frac{\pi^2}{4}$ ។

លំហាត់ទី៣៤

គេឱ្យអនុគមន៍ $\mathbf{f}$ កំនត់លើ $[a\,;b]$

ដែល $\forall x\in[a\,;b]:\ f(a+b-x)=f(x)$ ។

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b x f(x).dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x).dx$ ។

អនុវត្តន៏

ចូរគណនា $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}.\,dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_a^b x f(x).dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x).dx$

តាង $u=a+b-x$ នាំឱ្យ $du=-dx$

ចំពោះ $x=a$ នោះ $u=b$

ហើយ $x=b$ នោះ $u=a$

គេបាន $\int_a^b x f(x).dx=\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-du)$

$$\int_a^b x f(x).dx = \int_a^b (a+b-u) f(a+b-u)\,du$$

$$\int_a^b x\, f(x).dx = \int_a^b (a+b-x)\, f(a+b-x)dx$$

$$\int_a^b x\, f(x).dx = \int_a^b (a+b-x) f(x).dx$$

$$\int_a^b x\, f(x)\ .dx = (a+b)\int_a^b f(x).dx - \int_a^b x f(x).dx$$

$$2\int_a^b x\, f(x).dx = (a+b)\ \int_a^b f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_a^b x f(x).dx = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x).dx$ ។

អនុវត្តន៍

គណនា $I = \int_0^{\pi} \dfrac{x \sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}.\,dx$

តាង $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}$ ដោយ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

គេបាន $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{3-(2\cos^2 x - 1)}} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos^2 x}}$

យើងមាន $f(\pi - x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{\sqrt{4-2\cos^2(\pi - x)}} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{4-2\cos^2 x}} = f(x)$

តាមសម្រាយខាងលើយើងបាន

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}.dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x.dx}{\sqrt{4-2\cos^2 x}}$$

តាង $U=\sqrt{2}\cos x$ នាំឱ្យ $dU=-\sqrt{2}\sin x.dx$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $U=\sqrt{2}$ និង $x=\pi$ នោះ $u=-\sqrt{2}$

យើងបាន $I=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}}\frac{-du}{\sqrt{2}\sqrt{4-U^2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\frac{du}{\sqrt{4-U^2}}$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\arcsin\left(\frac{U}{2}\right)\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}.dx=\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}}$ ។

លំហាត់ទី៣៥

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$, $x>-1$

ក. បង្ហាញថា $f(\dfrac{1-t}{1+t})=\dfrac{1}{2}\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}-\dfrac{1}{2}(1+t)^2 f(t)$

ដែល $0\le t\le 1$ ។

ខ. គណនា $I=\displaystyle\int_0^1 f(x).dx$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃ $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}.dx$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. បង្ហាញថា $f(\dfrac{1-t}{1+t})=\dfrac{1}{2}\dfrac{(1+t)^2}{1+t^2}-\dfrac{1}{2}(1+t)^2 f(t)$

មាន $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$

យើងបាន $f(\dfrac{1-t}{1+t})=\dfrac{\ln(1+\dfrac{1-t}{1+t})}{1+(\dfrac{1-t}{1+t})^2}=\dfrac{\ln(\dfrac{2}{1+t})}{\dfrac{(1+t)^2+(1-t)^2}{(1+t)^2}}$

$$f(\frac{1-t}{1+t})=\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}}=\frac{1}{2}(1+t)^2\,\frac{\ln 2-\ln(1+t)}{1+t^2}$$

$$f(\frac{1-t}{1+t})=\frac{1}{2}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t)^2\,\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}$$

ដូចនេះ $f(\frac{1-t}{1+t})=\frac{1}{2}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t)^2 f(t)$ ។

ខ. គណនា $I=\int_0^1 f(x).dx$

តាង $x=\frac{1-t}{1+t}$ នាំឱ្យ $dx=-\frac{2}{(1+t)^2}.dx$

ចំពោះ $x=0$ នោះ $t=1$ ហើយ $x=1$ នោះ $t=0$

គេបាន $I=\int_1^0 f(\frac{1-t}{1+t})\,\frac{-2}{(1+t)^2}.dt=\int_0^1 f(\frac{1-t}{1+t})\frac{2}{(1+t)^2}.dt$

ដោយ $f(\frac{1-t}{1+t})=\frac{1}{2}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t)^2 f(t)$ គេបាន

$$I=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\frac{(1+t)^2}{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t)^2 f(t)\right]\frac{2}{(1+t)^2}.dt$$

$$I=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^1 f(t).dt=\frac{\pi}{4}-I$$

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_0^1 f(x).dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}=\frac{\pi}{8}}$ ។

គ. ទាញរកតម្លៃ $J=\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}.dx$

តាង $\begin{cases} u=\arctan x \\ dv=\frac{1}{1+x}.dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du=\frac{1}{1+x^2}.dx \\ V=\ln(1+x) \end{cases}$

យើងបាន $J=\left[\arctan x \ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}.dx$

$$J=\left(\frac{\pi}{4}\ln 2-0\right)-I=\frac{\pi}{4}\ln 2-\frac{\pi}{8}$$

ដូចនេះ $\boxed{J=\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}.dx=\frac{\pi}{8}(2\ln 2-1)}$ ។

លំហាត់ទី៣៦

គេមានស្វ៊ីត (I_n) កំនត់ចំពោះគ្រប់ $n \geq 1$ ដោយ :

$$I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$$

ក-ចូរគណនាតួ I_1 ។

ខ-ចូរបញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n រួចទាញឱ្យបានថា :

$$I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$$ ។

គ-ចូររកលីមីត $\lim_{n \to +\infty} I_n$

រួចទាញថា $\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = e = 2.71828$

ដំណោះស្រាយ

ក-គេមាន $I_1 = \frac{1}{1!}\int_0^1 (1-x)e^x.dx = \int_0^1 (1-x).e^x.dx$

តាង $\begin{cases} u = 1 - x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -dx \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I = \left[(1-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x(-dx) = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = e - 2$

ដូចនេះ $\boxed{I = e - 2}$ ។

ខ-បញ្ជាក់ I_{n+1} ជាអនុគមន៍នៃ I_n

គេមាន $I_n = \frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-x)^n.e^x.dx$

នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.\int_0^1 (1-x)^{n+1}.e^x dx$

តាង $\begin{cases} u = (1-x)^{n+1} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} du = -(n+1)(1-x)^n \\ v = e^x \end{cases}$

គេបាន $I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[(1-x)^{n+1}e^x\right]_0^1 + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx$

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

ដូចនេះ $\boxed{I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}}$ ។

ទាញឱ្យបានថា $I_n = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{P!}\right)$

គេមាន $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

ចំពោះ $n = 1$: $I_2 = I_1 - \frac{1}{2!}$

ចំពោះ $n = 2$: $I_3 = I_2 - \frac{1}{3!}$

....

ចំពោះ $n = n-1 : I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$

ដោយធ្វើផលបូកទំនាក់ទំនងនេះអង្គ និង អង្គ គេបាន :

$I_n = I_1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - .... - \frac{1}{n!}$ ដោយ $I_1 = e - 2 = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - .... - \frac{1}{n!} = e - \sum_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)}$ ។

គ-រកលីមីត $\lim_{n \to +\infty} I_n$

ចំពោះ $x \in [0, 1]$ គេមាន $1 \le e^x \le e$ និង $(1-x)^n \ge 0$

គេបាន $(1-x)^n \le e^x(1-x)^n \le e(1-x)^n$

នាំឱ្យ $\frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx \le \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^x.dx \le \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-x)^n.dx$

ដោយ $\int_0^1 (1-x)^n.dx = \left[-\frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

គេទាញបាន $\frac{1}{n!(n+1)} \le I_n \le \frac{e}{n!(n+1)}$ ។

កាលណា $n \to +\infty$ នាំឱ្យ $\frac{1}{n!(n+1)} \to 0$

ដូចនេះ $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$ ។

ទាញថា $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right)=e=2.71828$

គេមាន $I_n=e-\sum\limits_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)$

នាំឱ្យ $\sum\limits_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)=e-I_n$

គេបាន $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{p=0}^{n}\left(\frac{1}{p!}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(e-I_n\right)=e$

ព្រោះ $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$ ។

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....+\frac{1}{n!}\right)=e=2.71828}$

លំហាត់ទី៣៧

គេឱ្យ f ជាអនុគមន៍គូលើ $[-a,a]$ ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ :

ចូរគណនា $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^x}.dx$ និង $J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx$

ដំណោះស្រាយ

ក.បង្ហាញថា $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_0^a f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

គេមាន $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}+\int_0^a\frac{f(x).dx}{1+q^x}\ (1)$

តាង $x=-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$

និងចំពោះ $x\in[-a,0]$ នាំឱ្យ $t\in[a,0]$

គេបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^x}=-\int_a^0\frac{f(-t).dt}{1+q^{-t}}=\int_0^a\frac{q^t.f(-t)dt}{1+q^t}=\int_0^a\frac{q^x f(-x).dx}{1+q^x}$

ដោយ $f(x)$ ជាអនុគមន៍គូនោះ $f(-x)=f(x)\ ,\ \forall x\in[-a,a]$

គេទាញបាន $\int_{-a}^{0}\frac{f(x).dx}{1+q^{x}}=\int_{0}^{a}\frac{q^{x}.f(x)}{1+q^{x}}.dx\ (2)$

យក (2) ទៅជួសក្នុង (1) គេបាន :

$$\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^{x}}=\int_{0}^{a}\frac{q^{x}.f(x).dx}{1+q^{x}}+\int_{0}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^{x}}$$

$$=\int_{0}^{a}\frac{(q^{x}+1)f(x).dx}{1+q^{x}}=\int_{0}^{a}f(x).dx$$

ដូចនេះ $\int_{-a}^{a}\frac{f(x).dx}{1+q^{x}}=\int_{0}^{a}f(x).dx\ ,\ q>0\ ,q\neq 1$ ។

ខ. អនុវត្តន៏ : គណនាអាំងតេក្រាល

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^{x}}.dx$ ដោយ $\cos x$ ជាអនុគមន៏គូនោះគេបាន :

$I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.dx=\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$ ។

ដូចនេះ $\boxed{I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+3^{x}}.dx=1}$ ។

គណនា $J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx$

ដោយ $f(x)=x^2-4|x|+3$ ជាអនុគមន៍គូព្រោះ $f(-x)=f(x)$

យើងបាន $J=\int_{0}^{3}\left(x^2-4|x|+3\right).dx$

$=\int_{0}^{3}\left(x^2-4x+3\right).dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_0^3$

$=(9-18+9)-(0)=0$

ដូចនេះ $\boxed{J=\int_{-3}^{3}\frac{x^2-4|x|+3}{e^x+1}.dx=0}$ ។

លំហាត់ទី៣៨

ចូរបង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

អនុវត្តន៍ :

ចូរគណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx$

តាង $x = a+b-t$ នាំឱ្យ $dx = -dt$

និង ចំពោះ $x \in [a,b]$ នាំឱ្យ $t \in [b,a]$

គេបាន $\int_a^b f(x).dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t).dt$

ដូចនេះ $\boxed{\int_a^b f(x).dx = \int_a^b f(a+b-x).dx}$ ។

អនុវត្តន៍ :

គណនា $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx$

យើងបាន $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left[1+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{3}-x)\right].dx$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left[1+\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}-\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right].dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left(\frac{1+\sqrt{3}\tan x+3-\sqrt{3}\tan x}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2\left(\frac{4}{1+\sqrt{3}\tan x}\right).dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left[\log_2 4-\log_2(1+\sqrt{3}\tan x)\right].dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2 4.dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{2\pi}{3}-I$$

នាំឱ្យគេទាញបាន $\boxed{I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\log_2(1+\sqrt{3}\tan x).dx=\frac{\pi}{3}}$ ។

លំហាត់ទី៣៩

គេសន្មតថា f ជាអនុគមន៍មួយកំនត់លើ **IR** ហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនង:

$\mathbf{f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}}$ ។

ចូរគណនា $\mathbf{I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx}$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនាអាំងតេក្រាល $\mathbf{I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx}$

យើងមាន $\mathbf{I=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx}$

តាង $\mathbf{x=-t}$ នាំឱ្យ $\mathbf{dx=-dt}$

និង ចំពោះ $\mathbf{x\in\left[-\frac{\pi}{3}\,,\,0\right]}$ នាំឱ្យ $\mathbf{t\in\left[\frac{\pi}{3},0\right]}$

គេបាន $\mathbf{\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x).dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0} f(-t).(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-t).dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx}$

គេទាញ $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(-x).dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [f(-x) + f(x)].dx$

ដោយ $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x} = \sqrt{4\sin^2 x} = 2|\sin x|$

គេបាន $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2|\sin x|.dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x.dx = 2[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1$

ដូចនេះ $\boxed{I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x).dx = 1}$ ។

លំហាត់ទី៤០

គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^3 x.dx$ ដែល $n \in IN$ ។

ក. ចូរគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក. គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^3 x.dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos^2 x.\cos x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x(1-\sin^2 x)\cos x.dx$$

តាង $U = \sin x$ នាំឱ្យ $dU = \cos x.dx$ ។

ចំពោះ $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ នាំឱ្យ $U \in [0\ ,1\ ]$

យើងបាន :

$$I_n = \int_0^1 U^n(1-U^2).dU = \int_0^1 U^n.dU - \int_0^1 U^{n+2}.dU$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}U^{n+1}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{n+3}U^{n+3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$= \frac{n+3-n-1}{(n+1)(n+3)}$$

$$= \frac{2}{(n+1)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)}}$ ។

ខ. គណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I_k) = I_0 + I_1 + I_2 + ... + I_n$

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន :

$$I_n = \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

យើងបាន :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\left[(1-\frac{1}{2})+....+(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})\right]+\left[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+....+(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3})\right]$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+2)(n+3)}}$ ។

គណនាតម្លៃនៃលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

យើងមាន $S_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$

យើងបាន $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{3}{2}$

ដូចនេះ $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}}$ ។

លំហាត់ទី៤១

គេឱ្យស្វ៊ីតអាំងតេក្រាល $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,.dx$ ដែល $n \in IN$ ។

ក. ចូររកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ. ចូរគណនាផលបូក $S_n = \sum_{k=1}^{n} (P_k) = P_1 + P_2 + ... + P_n$

ជាអនុគមន៍នៃ n រួចទាញរកតម្លៃនៃលីមីត $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ដំណោះស្រាយ

ក. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2}

យើងមាន $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2}\,.dx$

និង $I_{n-2} = \int_0^1 x^{n-2} . \sqrt{1-x^2}\,.dx$

តាង $\begin{cases} U = \sqrt{1-x^2} \\ dV = x^n .dx \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}.dx \\ V = \int x^n .dx = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1} \end{cases}$

យើងបាន $I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}.\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{1-x^2}}.dx$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n - (x^n - x^{n+2})}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n - x^n(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^n.dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}.dx$$

$$I_n = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n-1}.\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{n+1}I_n$$

តាង $\begin{cases} U = x^{n-1} \\ dV = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$ នាំឱ្យ $\begin{cases} dU = (n-1)x^{n-2}.dx \\ V = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

យើងបាន

$$\frac{n+2}{n+1}I_n = \frac{1}{n+1}\left\{\left[-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 + (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}.dx\right\}$$

គេទាញ $(n+1)I_n = (n-1)I_{n-2} - I_n$

នាំឱ្យ $I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n+2}I_{n-2}\,,\ \forall n \ge 2}$ ។

ខ. គណនាផលគុណ $P_n = I_n . I_{n-1}$, $\forall n \geq 1$ ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងមាន $P_n = I_n . I_{n-1}$ នាំឱ្យ $P_{n+1} = I_{n+1} . I_n$

ដោយ $I_n = \frac{n-1}{n+2} I_{n-2}$ នាំឱ្យ $I_{n+1} = \frac{n}{n+3} . I_{n-1}$

គេទាញ $P_{n+1} = \frac{n}{n+3} I_{n-1} . I_n = \frac{n}{n+3} P_n$

(ព្រោះ $P_n = I_n . I_{n-1}$)

នាំអោយ $\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n}{n+3} = \frac{n}{n+1} . \frac{n+1}{n+2} . \frac{n+2}{n+3}$ ។

យើងបាន $\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k}{k+1} . \frac{k+1}{k+2} . \frac{k+2}{k+3} \right)$

$$\prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right) = \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k}{k+1} \right) \times \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k+1}{k+2} \right) \times \prod_{k=1}^{(n-1)} \left(\frac{k+2}{k+3} \right)$$

$$\frac{P_2}{P_1} . \frac{P_3}{P_2} .... \frac{P_n}{P_{n-1}} = \left(\frac{1}{2} . \frac{2}{3} .... \frac{n-1}{n} \right) \times \left(\frac{2}{3} . \frac{3}{4} .... \frac{n}{n+1} \right) \times \left(\frac{3}{4} . \frac{4}{5} .... \frac{n+1}{n+2} \right)$$

$$\frac{P_n}{P_1} = \frac{1}{n} . \frac{2}{n+1} . \frac{3}{n+2}$$

នាំឱ្យគេទាញ $P_n = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} . P_1 = \frac{6}{n(n+1)(n+2)} . I_0 . I_1$

(ព្រោះ $P_1 = I_0 . I_1$)

ដោយ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} . dx = \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

និង $I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}.dx=\left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$

គេបាន $P_n=\frac{6}{n(n+1)(n+2)}.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}$ ។

គ. គណនាផលបូក $S_n=\sum_{k=1}^{n}(P_k)=P_1+P_2+.........+P_n$

យើងមាន $P_n=\frac{\pi}{2}.\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$

យើងបាន $S_n=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$=\frac{\pi}{4}\left[(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3})+.....+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$

$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$

ដូចនេះ $\boxed{S_n=\frac{\pi}{8}.\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}}$ និង $\boxed{\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{8}}$ ។

ឃ. រករូបមន្តគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

តាមសម្រាយខាងលើយើងមាន $I_n=\frac{n-1}{n+2}I_{n-2}\ ,\ \forall n\geq 2$

-ករណី $n = 2p+1$ (ចំនួនសេស)

យើងបាន $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+3}.I_{2p-1}$ ឬ $\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2p}{2p+3}$

គេទាញ $\frac{I_3}{I_1}.\frac{I_5}{I_3}.\frac{I_7}{I_5}.....\frac{I_{2p+1}}{I_{2p-1}} = \frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$

$$\frac{I_{2p+1}}{I_1} = \frac{2}{5}.\frac{4}{7}.\frac{6}{9}.....\frac{2p}{2p+3}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.I_1$

ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1} = \frac{2.4.6....2p}{5.7.9....(2p+3)}.\frac{1}{3}}$ ។

-ករណី $n = 2p$ (ចំនួនគូ)

យើងបាន $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p+2}.I_{2p-2}$ ឬ $\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}} = \frac{2p-1}{2p+2}$

គេទាញ $\frac{I_2}{I_0}.\frac{I_4}{I_2}.\frac{I_6}{I_4}.....\frac{I_{2p}}{I_{2p-2}} = \frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$

$$\frac{I_{2p}}{I_0} = \frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.....\frac{2p-1}{2p+2}$$

នាំឱ្យ $I_{2p+1} = \frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.I_0$

ដោយ $I_0 = \frac{\pi}{4}$ ដូចនេះ $\boxed{I_{2p+1} = \frac{1.3.5....(2p-1)}{4.6.8....(2p+2)}.\frac{\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៤២

គេឱ្យអាំងតេក្រាល

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x}+\sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$$

និង $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\cos^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x}+\sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$

ចូរបង្ហាញថា $I_n=J_n$ រួចទាញរកតម្លៃ I_n និង J_n ។

ដំណោះស្រាយ

បង្ហាញថា $I_n=J_n$ រួចទាញរកតម្លៃ I_n និង J_n

យើងមាន $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x}+\sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$

តាង $x=\frac{\pi}{2}-t$ នាំឱ្យ $dx=-dt$

ចំពោះ $x=0$ នាំឱ្យ $t=\frac{\pi}{2}$

ហើយ $x=\frac{\pi}{2}$ នាំឱ្យ $t=0$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}$$

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt[n]{\sin^2(\frac{\pi}{2} - t)}}{\sqrt[n]{\sin^2(\frac{\pi}{2} - t)} + \sqrt[n]{\cos^2(\frac{\pi}{2} - t)}}(-dt)$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 t}}{\sqrt[n]{\cos^2 t} + \sqrt[n]{\sin^2 t}}.dt = J_n$$

ដូចនេះ $I_n = J_n$ ។

ម្យ៉ាងទៀតយើងបាន :

$$I_n + J_n = 2I_n = 2J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\cos^2 x}}{\sqrt[n]{\sin^2 x} + \sqrt[n]{\cos^2 x}}.dx$$

$$I_n + J_n = 2I_n = 2J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = J_n = \frac{\pi}{4}}$ ។

លំហាត់ទី៤៣

គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \frac{1}{2n-1}.\int_0^1 \left(x^2\right)^n.dx \quad ,n \in IN^*$ ។

ក-គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$

រួចទាញរកលីមីត $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-គណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n

$$I_n = \frac{1}{2n-1}.\int_0^1 (x^2)^n.dx \quad ,n \in IN^*$$

$$= \frac{1}{2n-1}\int_0^1 x^{2n}.dx$$

$$= \frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}$ ។

ខ-គណនាផលបូក $S_n = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$

យើងមាន $I_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

យើងបាន $S_n = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) + ... + \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$

$$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}.\frac{2n+1-1}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

ដូចនេះ $\boxed{S_n = \frac{n}{2n+1}}$ ។

ទាញរកលីមីត $\lim_{n\to+\infty} S_n$

យើងបាន $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់ទី៤៤

គេអោយអាំងតេក្រាល $I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$

និង $J_n = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$ $, n \in IN^*, a > 0$ ។

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-ប្រើលទ្ធផលខាងលើចូរបង្រួមផលបូក :

$$S_n = \frac{1}{\cos a \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$ ។

ដំណោះស្រាយ

ក-បង្ហាញថា $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$

យើងបាន :

$$I_1 + I_2 + ... + I_n = \int_{a}^{2a} \frac{dx}{\cos^2 x} + \int_{2a}^{3a} \frac{dx}{\cos^2 x} + ... + \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_{a}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

ដូចនេះ $I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = J_n$ ។

ខ-គណនា I_n និង J_n ជាអនុគមន៍នៃ n

យើងបាន $I_n = \int_{na}^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\tan x \right]_{na}^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan(na)$

និង $J_n = \int_a^{(n+1)a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \Big[\tan x \Big]_a^{(n+1)a} = \tan(n+1)a - \tan a$

ដូចនេះ $\boxed{I_n = \frac{\sin a}{\cos(na)\cos(n+1)a} \quad , \quad J_n = \frac{\sin(na)}{\cos a.\cos(n+1)a}}$

គ-គណនាផលបូក

$$S_n = \frac{1}{\cos a\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a\cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

យើងបាន :

$$S_n = \frac{1}{\cos a\cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a\cos 3a} + ... + \frac{1}{\cos(na)\cos(n+1)a}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\cos ka.\cos(k+1)a}\right] = \frac{1}{\sin a}\sum_{k=1}^{n}[I_k] = \frac{1}{\sin a}.J_n$$

ដូចនេះ $S_n = \frac{\sin(na)}{\sin a\cos a\cos(n+1)a}$

លំហាត់ទី៤៥

គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយមានមុំ A,B,C ជាមុំស្រួច ។

ចូរស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

ដំណោះស្រាយ

ស្រាយថា $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\geq 18$

តាង $\sum=\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}$

$$=\frac{\tan^2 A}{\cos A}+\frac{\tan^2 B}{\cos B}+\frac{\tan^2 C}{\cos C}$$

តាមវិសមភាព Cauchy – Schwarz គេបាន :

$$\sum\geq\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\quad (1)$$

តាងអនុគមន៍ $f(x)=\tan x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

$$f''(x)=2\tan x(1+\tan^2 x)>0$$

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន :

$$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f(\frac{A+B+C}{3})$$

ឬ $\tan A+\tan B+\tan C\ge 3\tan(\frac{A+B+C}{3})=3\tan\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

គេទាញ $(\tan A+\tan B+\tan C)^2\ge 27$ (2)

តាងអនុគមន៍ $g(x)=\cos x$ ដែល $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

គេបាន $g'(x)=-\sin x$

$$g''(x)=-\cos x<0\ ,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

នាំឱ្យ $g(x)$ ជាអនុគមន៍ប៉ោង ។

តាមវិសមភាព Jensen គេបាន :

$$g(A)+g(B)+g(C)\le 3g(\frac{A+B+C}{3})$$

$$\cos A+\cos B+\cos C\le 3\cos(\frac{A+B+C}{3})=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$$

គេទាញ $\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C}\ge\frac{2}{3}$ (3)

គុណវិសមភាព (2) & (3) អង្គ និង អង្គគេបាន :

$$\frac{(\tan A+\tan B+\tan C)^2}{\cos A+\cos B+\cos C}\ge\frac{27\times 2}{3}=18\ (4)$$

តាម (1) & (4) គេទាញបាន $\sum\ge 18$ ។

ដូចនេះ $\frac{\sin^2 A}{\cos^3 A}+\frac{\sin^2 B}{\cos^3 B}+\frac{\sin^2 C}{\cos^3 C}\ge 18$ ។

លំហាត់ទី៤៦

គេឧបមាថាសមីការ $8x^3-6x+1=0$ មានឫសបី x_1 , x_2 , x_3

ចូរគណនា $S = {x_1}^5 + {x_2}^5 + {x_3}^5$ ។

ដំណោះស្រាយ

គណនា $S = {x_1}^5 + {x_2}^5 + {x_3}^5$

ដោយ x_1 , x_2 , x_3 ជាឫសសមីការ $8x^3-6x+1=0$

គេបាន $$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 & (1) \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=-\dfrac{3}{4} & (2) \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{1}{8} & (3) \end{cases}$$

ម្យ៉ាងទៀត x_1 , x_2 , x_3 ត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ $8x^3-6x+1=0$

គេបាន $$\begin{cases} 8{x_1}^3-6x_1+1=0 \ (4) \\ 8{x_2}^3-6x_2+1=0 \ (5) \\ 8{x_3}^3-6x_3+1=0 \ (6) \end{cases}$$

បូកសមីការនេះអង្គ និង អង្គគេបាន :

$$8({x_1}^3+{x_2}^3+{x_3}^3)-6(x_1+x_2+x_3)+3=0 \ (7)$$

យកទំនាក់ទំនង (1) ជួសក្នុង (7) គេទាញបាន ៖

$$x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}+x_3^{\ 3}=-\frac{3}{8}\ \ (8)$$

គុណសមីការ $(4)\ ,\ (5),(6)$ នឹង $x_1^{\ 2}, x_2^{\ 2}, x_3^{\ 2}$ រៀងគ្នាគេបាន ៖

$$\begin{cases}8x_1^{\ 5}-6x_1^{\ 3}+x_1^{\ 2}=0\\ 8x_2^{\ 5}-6x_2^{\ 3}+x_2^{\ 2}=0\\ 8x_3^{\ 5}-6x_3^{\ 3}+x_3^{\ 2}=0\end{cases}$$

បូកសមីការនេះអង្គ និង អង្គគេបាន ៖

$$8S-6(x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}+x_3^{\ 3})+(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2})=0\,(9)$$

ដោយ

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$$

ឬ $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=0^2-2(-\frac{1}{8})=\frac{1}{4}\ \ (10)$

យកទំនាក់ទំនង $(8)\&(10)$ ជំនួសក្នុង (9) គេបាន ៖

$8S-6(-\frac{3}{8})+\frac{1}{4}=0$ នាំឱ្យ $S=\frac{1}{4}$

ដូចនេះ $S=x_1^{\ 5}+x_2^{\ 5}+x_3^{\ 5}=\frac{1}{4}$ ។

លំហាត់អនុវត្តន៍

1. គេឱ្យ $0 \le x , y , z \le 1$ ដែល $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ។

ចូរស្រាយថា $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$

2. ដោះស្រាយសមីការ

$$\frac{4x^2+4x+12}{3x+10} - 39\sqrt{\frac{x^2+x+3}{3x+10}} + 27 = 0$$

3. គេឱ្យត្រីកោណពីរមានជ្រុង :

$1009 , 1009 , a$ និង $1009, 1009, b$ ដែល $a \ne b$ ។

ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (a,b) មានផ្ទៃក្រឡាស្មើគ្នា ។

4. គេឱ្យចតុកោណប៉ោង **ABCD** មួយ ។ បន្ទាត់ **(AD)** និង **(BC)** កាត់គ្នាត្រង់ចំនុច **P** ។ **M** និង **N** ជាចំនុចកណ្តាលនៃអង្កត់ទ្រូង **[AC]** និង **[BD]** រៀងគ្នា ។

ចូរស្រាយថាក្រឡាផ្ទៃនៃចតុកោណ **ABCD** ស្មើនឹង **4** ដងនៃក្រឡាផ្ទៃត្រីកោណ **MNP** ?

5.គេឱ្យចតុកោណប៉ោង $ABCD$ មួយមានជ្រុង $AB = a$, $BC = b$ $CD = c$ និង $DA = d$ ។ តាង $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ ។

ចូរស្រាយថាកន្សោមផ្ទៃក្រឡារបស់ចតុកោណ $ABCD$ កំណត់ដោយ :

$$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{A+C}{2}}$$

6. ចូរស្រាយថា $\frac{3n+4}{4n+5}$ ជាប្រភាគសម្រួលមិនបានគ្រប់ $n \in IN$ ។

7. ចូរស្រាយថាចំនួននីមួយៗខាងក្រោមនេះ ជាគូបនៃចំនួនគត់ :

$$\frac{107811}{3}, \frac{110778111}{3}, \frac{111077781111}{3}, \ldots$$ ។

8.ចូរកំណត់គ្រប់គូចំនួនគត់វិជ្ជមាន (x, y, z) ដើម្បីឱ្យ :

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x(z-1) + 2y(z+1)$ ជាការេប្រាកដ ។

9. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ :

$$\begin{cases} x + \log(x + \sqrt{x^2+1}) = y \\ y + \log(y + \sqrt{y^2+1}) = z \\ z + \log(z + \sqrt{z^2+1}) = x \end{cases}$$

10. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} \log(2xy) = \log x \log y \\ \log(yz) = \log y \log z \\ \log(2zx) = \log z \log x \end{cases}$

11.កំណត់គ្រប់ចម្លើយចំនួនពិតនៃប្រពន្ធ័សមីការ :

$$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{4x^2+1} = y \\ \dfrac{4y^2}{4y^2+1} = z \\ \dfrac{4z^2}{4z^2+1} = x \end{cases}$$

12.ចូរកំណត់ $ax^5 + by^5$ បើចំនួនពិត a, b, x និង y ផ្ទៀងផ្ទាត់ :

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 7 \\ ax^3 + by^3 = 16 \\ ax^4 + by^4 = 42 \end{cases}$$

13. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x + \dfrac{2}{x} = 2y \\ y + \dfrac{2}{y} = 2z \\ z + \dfrac{2}{z} = 2x \end{cases}$

14. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធ $\begin{cases} (x+y)^3 = z \\ (y+z)^3 = x \\ (z+x)^3 = y \end{cases}$

15. ដោះស្រាយប្រព័ន្ធសមីការ $\begin{cases} x^3 - 9(y^2 - 3y + 3) = 0 \\ y^3 - 9(z^2 - 3z + 3) = 0 \\ z^3 - 9(x^2 - 3x + 3) = 0 \end{cases}$

16. ដោះស្រាយប្រពន្ធ័សមីការ $\begin{cases} ax + by = (x - y)^2 \\ by + cz = (y - z)^2 \\ cz + ax = (z - x)^2 \end{cases}$

17. គេឱ្យអនុគមន៍ $f : IR \mapsto IR$ ដោយដឹងថា :

$$f(x + \frac{1}{6}) + f(x + \frac{1}{7}) = f(x) + f(x + \frac{13}{42})$$

ចូរស្រាយថា f ជាអនុគមន៍ខួប ។

18. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា :

$$f(x) + \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4} - x) = \cos x \quad \text{គ្រប់ } x \in IR$$

19. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា :

$$f(-x) + \sqrt{2}f(\frac{\pi}{4} + x) = 2\cos x \quad \text{គ្រប់ } x \in IR$$

20. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា :

$$f(x) + 3f(\frac{\pi}{2} - x) = 1 + 2\sin^2 x \quad \text{គ្រប់ } x \in IR$$

21. ចូរកំណត់អនុគមន៍ $f(x)$ បើគេដឹងថា :

$$f(-x)+2f(\frac{\pi}{2}+x)=1+2\sin^2 x \quad \text{គ្រប់ } x\in IR$$

22. គេឱ្យអនុគមន៍ $f: IR \to IR$ កំណត់ដោយទំនាក់ទំនង :

$$2f(x)+f(-x)=\frac{3\cos 3x+a\sin 3x+3}{2+3\cos 3x}$$

ចូរស្រាយថា $|f(x)|\le \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$

23. ចំពោះគ្រប់ $n\ge 2$ ចូរស្រាយថា :

$$1+\frac{1}{\sqrt[n]{2}}+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}+...+\frac{1}{\sqrt[n]{n}}>n\sqrt[n]{\frac{2}{n+1}}$$

24. គេឱ្យ a,b,c ជាចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$$

25. ចូរបង្ហាញថា $\cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7}=5$

26. គេឱ្យត្រីកោណ ABC មួយដោយដឹងថា :

$$\begin{cases}\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A=k\\(1+\sin A)(1+\sin B)(1+\sin C)=2(1+k)\end{cases}$$

ចូរស្រាយថា ΔABC មានមុំមួយកែង ។

27. ក្នុងគ្រប់ត្រីកោណចូរស្រាយថា $\dfrac{p}{r}\ge 3\sqrt{3}$

p ជាកន្លះបរិមាត្រ និង r ជាកាំរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។

28. បង្ហាញថាក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមាន :

$$\frac{\cos A}{a^3}+\frac{\cos B}{b^3}+\frac{\cos C}{c^3}\geq\frac{81}{16p^3}$$

ដែល a, b, c ជាជ្រុង និង p ជាកន្លះបរិមាត្រនៃ ΔABC ។

29. បង្ហាញថាក្នុងគ្រប់ត្រីកោណគេមាន :

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4(\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2})$$

ដែល a, b, c ជាជ្រុងនៃ ΔABC ។

30. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ :

$u_o = 2$ និង $u_{n+1} = 3u_n + \sqrt{8u_n^{\ 2}+1}$ ដែល $n \in IN$

ចូរស្រាយថា $u_n = \alpha(1+\sqrt{2})^{2n} + \beta(1-\sqrt{2})^{2n}$ ដែល α, β

ជាឫសសមីការ $x^2 - 8x - \frac{1}{32} = 0$ ។

31. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ :

$$u_n = (1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^2})....(1+\frac{n}{n^2})$$

ក. ស្រាយថា $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ គ្រប់ $x > 0$ ។

ខ. គ្រប់ $k \geq 1$ និង $n \geq 1$ បង្ហាញថា :

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}<\ln(1+\frac{k}{n^2})<\frac{k}{n^2}$$

គ. ទាញរកកន្សោមអមនៃ u_n រួចគណនាលីមីតវាកាលណា $n \to +\infty$ ។

32. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ ៖

$u_1 = 0$ និង $u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}\right)$ ដែល $n \geq 1$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

33. គេឱ្យ (u_n) ជាស្វ៊ីតចំនួនពិតកំណត់ដោយ ៖

$u_1 = 0$ និង $2u_{n+1} = u_n + \frac{\ln(1 + a^{2^n})}{2^n}$ ដែល $n \geq 1$ $, a \neq 1$

គណនា u_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

34. គេឱ្យ $\varphi(x) = -\int_0^x \ln(\cos y)\, .dy$

ក. បង្ហាញថា $\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x\ln 2$ ។

ខ. ប្រើទំនាក់ទំនងខាងលើចូរគណនា $\varphi(\frac{\pi}{2}) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos y)\, .dy$ ។

35. ចូរស្រាយថា $\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

36. គេឱ្យអនុគមន៍លេខ $f(n) = n^2 + n + 6$, $n \in Z$ ។

ចូរកំនត់ n ដើម្បីឱ្យ $f(n)$ ជាការេប្រាកដ?

37. គេឱ្យ $\phi(x)=\dfrac{x^2+2ax+b}{x^2+1}$, $a\neq 0$, $a , b\in IR$ ។

ចូរបង្ហាញថាមានពីរចំនួនពិត λ_1 និង λ_2 ($\lambda_1<\lambda_2$) ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់

$$\phi(x)-\lambda_r=\frac{[\,(1-\lambda_r)x+a\,]^2}{(1-\lambda_r)(x^2+1)} \quad , \ r=1\,,\,2$$ ។

ទាញបង្ហាញថា $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)=-a^2$

រួចបញ្ជាក់ថាចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត x គេបាន $\lambda_1\le\phi(x)\le\lambda_2$ ។

38.គេឱ្យខ្សែកោង $(c): y=\dfrac{x^2-3x+1}{1-x}$ និងបន្ទាត់ $y=-x+m$ ។

កំនត់ m ដើម្បីឱ្យបន្ទាត់ (d) កាត់ខ្សែកោង(c) បាននពីរចំនុចឆ្លុះគ្នាធៀប

នឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយនៃអក្ស័កូអរដោនេ ។

39.គណនាអាំងតេក្រាល :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^n x} \quad \text{និង} \quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cot^n x}$$

40. គេអោយអាំងតេក្រាលៈ

$$I_n(t)=\int_0^t\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}+\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}}+\dots+\frac{2x+n}{\sqrt{x^2+nx}}-\frac{2nx}{\sqrt{x^2+1}}\right).dx$$

ក-គណនាកន្សោម$I_n(t)$ ។

ខ-គណនាលីមីតនៃកន្សោម $I_n(t)$ កាលណា $t\to+\infty$ ។

41. គេអោយស្វ៊ីតចំនួនពិត $(I_n), n \in IN$ ដោយ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx.dx$

ក-គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ-ស្រាយថា I_n ជាស្វ៊ីតធរណីមាត្រ រួចគណនា I_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

គ-រកផលបូក $S_n = I_0 + I_1 + I_3 + ... + I_n$ រួចគណនា $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ។

42. គេអោយអាំងតេក្រាល

$$I_n = \int_1^e \frac{x^{-(2n+1)}}{1+x^2}.dx \quad , n \in IN, e = 2,71828...$$

ក-ចូរគណនាតួ I_0 ។

ខ-ចូរបង្ហាញថា: $I_{n+1} + I_n = \frac{e^{2n+2} - 1}{2(n+1).e^{2n+2}}$ ។

គ-ចូរស្រាយបញ្ជាក់វិសមភាព :

$$\frac{1}{2} x^{-2(n+1)} \le \frac{x^{-2n}}{1+x^2} \le \frac{1}{2} x^{-2n} \quad , \forall x \ge 1$$ ។

ឃ-គណនាលីមីត $\lim_{n \to +\infty} I_n$ និង $\lim_{n \to +\infty} (nI_n)$ ។

43.គេអោយអាំងតេក្រាល :

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos^2 x.dx \quad \text{និង} \quad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin^2 x.dx \ ,n\in IN$$

ក-គណនា I_n+J_n នឹង I_n-J_n ជាអនុគមន៍នៃ n ។

ខ-ទាញអោយបាននូវតំលៃ I_n នឹង J_n

44. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int \frac{x^n}{1+x}.dx \ ,n\in IN$ ។

ក. គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-1} ។

45. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int \tan^n x.dx \ ,n\in IN$ ។

ក. គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ។

គ. គណនា $K=\int \tan^{10} x.dx$ ។

46. គេឱ្យអាំងតេក្រាល $I_n=\int \cos^n x.dx \ ,n\in IN$ ។

ក. គណនាតួ I_0 និង I_1 ។

ខ. រកទំនាក់ទំនងរវាង I_n និង I_{n-2} ។

គ. គណនា $K=\int \cos^{10} x.dx$ ។

47. គេឱ្យចំនួន $N = \underbrace{444...444}_{n+1}\underbrace{888...888}_{n}9$

ចូរស្រាយថា N ជាការេប្រាកដ ។

48.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិចពីរ Z_1 និង Z_2 ។

ក. ចូរបង្ហាញថា $|Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$ ។

ខ. ជាទូទៅចំពោះគ្រប់ចំនួនកុំផ្លិច $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_n$ ចូរបង្ហាញថា :

$$|Z_1 + Z_2 + ... + Z_n| \le |Z_1| + |Z_2| + ... + |Z_n|$$ ។

49.គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច

$$Z = (\cos^3\theta + \frac{1}{\cos^3\theta}) + i.(\sin^3\theta + \frac{1}{\sin^3\theta}) \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$ ។

ចូររកតម្លៃបរមារបស់ម៉ូឌុលនៃចំនួនកុំផ្លិចខាងលើ ។

50. គេឱ្យ Z_1 and Z_2 ជាចំនួនកុំផ្លិចពីរមានម៉ូឌុលស្មើ 1 និងអាគុយម៉ង់

រៀងគ្នា θ_1 , θ_2 ។

ក. ចូររកលក្ខខ័ណ្ឌលើ θ_1, θ_2 ដើម្បីឱ្យ $1 + Z_1.Z_2$ ខុសពីសូន្យ ។

ខ. ក្នុងលក្ខខ័ណ្ឌខាងលើនេះចូរស្រាយថា $Z = \frac{Z_1 + Z_2}{1 + Z_1.Z_2}$ ជាចំនួនពិត ។

51. គឱ្យកន្សោមផលបូក :

$$C_n = 1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + ... + \frac{\cos nx}{\cos^n x}$$

$$S_n = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + ... + \frac{\sin nx}{\cos^n x}$$

$$(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ,k \in Z)$$

ក. ចូរបង្ហាញថា $Z = C_n + i.S_n = \frac{1-U^n}{1-U}$

ដែល $U = 1 + i.\tan x$ រួចសរសេរ Z ជារាងពិជគណិត ។

ខ. ទាញរកកន្សោមបង្រួមនៃ C_n និង S_n ។

52-ក. ចូរគណនាតម្លៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{5}$, $\sin\frac{\pi}{5}$, $\tan\frac{\pi}{5}$ ។

ខ. ចូរសរសេរ $Z = 1 + i.\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ

រួចគណនា $Z^{1000000}$ ។

53-គេឧបមាថាសមីការ (E) $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$,$a,b,c \in IR$

មានឬសពីរជាចំនួនកុំផ្លិចដែលតាងរៀងគ្នាដោយ Z_1 និង Z_2

និងចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់រឺឡាទីហ្វ n គេតាង $S_n = {Z_1}^n + {Z_2}^n$ ។

ក. ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា $aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$ ។

ខ. អនុវត្តន៍ ដោយមិនពន្លាតគណនា $M = \left(\frac{1+i\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-i\sqrt{5}}{2}\right)^5$ ។

54-គេឱ្យចំនួនកុំផ្លិច $z=\sqrt{2+\sqrt{2}}+i.\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ។

ក-ចូរសរសេរ z^2 ជាទំរង់ពិជគណិត រួចចូរសរសេរ z^2 និង z

ជាទំរង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ-ទាញរកតំលៃប្រាកដនៃ $\cos\frac{\pi}{8}$ និង $\sin\frac{\pi}{8}$ ។

55-គេឱ្យកន្សោម :

$C_n=\cos\theta+\cos 2\theta+......+\cos(n\theta)$

$S_n=\sin\theta+\sin 2\theta+..........+\sin(n\theta)$

ក. ចូរបង្ហាញថា $C_n+i.S_n$ ជាផលបូកនៃស្វ៊ីតធរណីមាត្រចំនួនកុំផ្លិចមួយ ។

ខ. ទាញបង្ហាញថា :

$$C_n=\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ និង } S_n=\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \text{ ។}$$

56- ក. ចូរបង្ហាញថា :

$$1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}=\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}} \text{ ។}$$

ខ. ទាញរកតម្លៃនៃផលបូក :

$$C=\sum_{k=0}^{4}\cos\frac{k\pi}{5} \text{ and } S=\sum_{k=0}^{4}\sin\frac{k\pi}{5} \text{ ។}$$

57. គេមាន $A = 1 + 4\cos\frac{2\pi}{9} + 6\cos\frac{4\pi}{9} + 4\cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$

$B = 4\sin\frac{2\pi}{9} + 6\sin\frac{4\pi}{9} + 4\sin\frac{6\pi}{9} + \sin\frac{8\pi}{9}$ ។

ក. គេតាង $Z = \cos\frac{2\pi}{9} + i.\sin\frac{2\pi}{9}$ ។

ចូរបង្ហាញថា $A + i.B = (1 + Z)^4$?

ខ. ចូរសរសេរ $(1 + Z)^4$ ជាទម្រង់ត្រីកោណមាត្រ ។

គ. ទាញរកកន្សោមបង្រួមនៃ A និង B ។

រៀបរៀងដោយ លឹម ផល្គុន
Tel: 017 768 246

សូមរង់ចាំអានភាគទី៩